ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ
ΜΙΓΑΔΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ -ΜΙΓΑΔΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ
16/09/2024
ΔΙΑΡΚΕΙΑ: 2,5 Ω

ΘΕΜΑ 1: (i) (1 μ.) Έστω $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ολόμορφη ώστε

$$\text{Re}f(x, y) = y^3 + \lambda x^2 y + 2x^2 - 2y^2, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \lambda \in \mathbb{R}, \quad f(i) = -1 - i.$$

Να δείξετε ότι $\lambda = -3$ και στη συνέχεια να προσδιορίσετε την f.

(ii) (1 μ.) Έστω $U \subseteq \mathbb{C}$ πεδίο και $f : U \to \mathbb{C}$ συνεχής συνάρτηση ώστε f^2 ολόμορφη στο U και $f(z) \neq 0,\ \forall\, z \in U$. Να δείξετε ότι η f είναι ολόμορφη στο U. [*Υπόδειξη:* Ορισμός διαφορισιμότητας.]

ΘΕΜΑ 2: (1,5 μ.) Να αναπτύξετε σε σειρά Laurent γύρω από το σημείο $z_0 = 3$ τη συνάρτηση

$$f(z) = \frac{1}{(z-2)^2} + \frac{1}{z-1},$$

στον ανοικτό δακτύλιο $1 < |z - 3| < 2$.

ΘΕΜΑ 3: (1,5 μ.) Έστω f ολόμορφη πάνω σε ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{C}$ που περιέχει τον κλειστό δίσκο $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$. Να δείξετε ότι

$$\int_\gamma z\overline{f(z)}dz = \pi i \overline{f''(0)},$$

όπου $\gamma(t) = e^{it},\ t \in [0, 2\pi]$. [*Υπόδειξη:* Κατάλληλη εφαρμογή Ολοκλ. Τύπων Cauchy.]

ΘΕΜΑ 4: (4 μ.) Εάν $\gamma(t) = \frac{1}{2}e^{it},\ t \in [0, 2\pi], \quad a = \frac{\sqrt{3}+i}{2}$, να δείξετε ότι

$$\int_\gamma \frac{\overline{z}}{z \sin z}dz = \frac{\pi i}{12}\ (1,5 \text{ μ.}), \qquad \int_\gamma \frac{e^{1/z}}{1-z}dz = 2\pi i(e-1)\ (1 \text{ μ.}),$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^4 \cos x}{x^6 + 1}dx = \frac{\pi}{3}\left[\frac{1}{e} - 2\text{Im}(\overline{a}e^{ia})\right]\ (1,5 \text{ μ.}).$$

ΘΕΜΑ 5: (1 μ.) Έστω f ολόμορφη πάνω σε ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{C}$ που περιέχει τον κλειστό δακτύλιο $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : r \leq |z| \leq R\}$ $(0 < r < R)$.Υποθέτουμε ότι

$$\text{Re}f(z) \leq 0, \text{ για } |z| = r \quad \text{και} \quad \text{Re}f(z) \leq 1, \text{ για } |z| = R.$$

Να δείξετε ότι $\text{Re}f(z) \leq 1,\ \forall\, z \in \Delta$. [*Υπόδειξη:* Κατάλληλη εφαρμογή Αρχής Μεγίστου.]

ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ.

ΘΕΜΑ 1:
(i) Έστω $f = u + iv$ η ζητούμενη. Λόγω των Cauchy-Riemann έχουμε

$$v_y = u_x = 2\lambda xy + 4x \tag{1}$$

και

$$v_x = -u_y = -3y^2 - \lambda x^2 + 4y. \tag{2}$$

Ολοκληρώνοντας και τα δύο μέλη της (1) ως προς y παίρνουμε

$$v = \lambda xy^2 + 4xy + c(x). \tag{3}$$

Παραγωγίζοντας και τα δύο μέλη της (3) ως προς x παίρνουμε

$$v_x = \lambda y^2 + 4y + c'(x).$$

Η τελευταία σε συνδυασμό με τη (2) δίνει

$$\lambda y^2 + 4y + c'(x) = -3y^2 - \lambda x^2 + 4y \Rightarrow \lambda = -3, \quad c'(x) = -\lambda x^2 = 3x^2$$

ή

$$\lambda = -3, \quad c(x) = x^3 + c_1 , \quad \text{όπου } c_1 \text{ σταθερά.}$$

Τώρα η (3) δίνει

$$v = -3xy^2 + 4xy + x^3 + c_1 .$$

Τέλος,

$$-1 - i = f(i) = u(0,1) + iv(0,1) = -1 + ic_1 \Rightarrow c_1 = -1.$$

Άρα,

$$f(x+iy) = y^3 - 3x^2y + 2x^2 - 2y^2 + i(-3xy^2 + 4xy + x^3 - 1), \quad \forall \ x, y \in \mathbb{R}.$$

(ii) Έστω $z_0 \in U$. Θέτουμε $g(z) = f(z) + f(z_0),\ z \in U$.
Η g είναι συνεχής στο z_0 και $g(z_0) = 2f(z_0) \neq 0$, συνεπώς υπάρχει $r > 0$ ώστε

$$g(z) \neq 0. \quad \forall \ z \in D(z_0\ r).$$

Τώρα, $\forall \ z \in D(z_0\ r) \setminus \{z_0\}$,

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{f(z)^2 - f(z_0)^2}{z - z_0} \cdot \frac{1}{g(z)}$$

$$\Rightarrow \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{(f^2)'(z_0)}{2f(z_0)}$$

και άρα η f είναι διαφορίσιμη στο z_0.

ΘΕΜΑ 2:

- Ανάπτυγμα για την $\dfrac{1}{z-1}$: Θέτουμε $w=\dfrac{z-3}{2}$ κι έχουμε

$$|w|<1, \quad \frac{1}{z+1}=\frac{1}{2w+2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+w}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n w^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-3)^n}{2^{n+1}} .$$

- Ανάπτυγμα για την $\dfrac{1}{(z-2)^2}$: Θέτουμε $w=\dfrac{1}{z-3}$ κι έχουμε

$$|w|<1, \quad z-2=1+\frac{1}{w}=\frac{1+w}{w} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{(z-2)^2}=w^2\cdot\frac{1}{(1+w)^2}=-w^2\left(\frac{1}{1+w}\right)'=$$

$$=-w^2\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n w^n\right]'=-w^2\sum_{n=1}^{\infty}n(-1)^n w^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}n(-1)^{n+1}w^{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(-1)^{n+1}}{(z-3)^{n+1}} .$$

ΘΕΜΑ 3: Έχουμε

$$\begin{aligned}
\int_\gamma z\,\overline{f(z)}dz &= \int_0^{2\pi} e^{it}\,\overline{f(e^{it})}ie^{it}dt = i\int_0^{2\pi}\overline{f(e^{it})}e^{2it}dt = i\int_0^{2\pi}\overline{\left[\frac{f(e^{it})}{e^{2it}}\right]}dt \\
&= i\,\overline{\int_0^{2\pi}\frac{f(e^{it})}{e^{2it}}dt} = i\,\overline{\int_0^{2\pi}\frac{f(e^{it})}{e^{3it}}e^{it}dt} = -\overline{\int_0^{2\pi}\frac{f(e^{it})}{e^{3it}}ie^{it}dt} \\
&= -\overline{\int_\gamma\frac{f(z)}{z^3}dz} = -\overline{2\pi i\frac{f''(0)}{2!}} = \pi i\overline{f''(0)} .
\end{aligned}$$

ΘΕΜΑ 4:

- $\forall\, z\in\gamma^*,\ |z|=1/2 \ \Rightarrow\ \overline{z}=1/4z$ οπότε

$$\int_\gamma\frac{\overline{z}}{z\ \sin z}dz=\frac{1}{4}\int_\gamma\frac{dz}{z^2\ \sin z}=\frac{1}{4}\int_\gamma f(z)dz,$$

όπου $f(z)=\dfrac{1}{z^2\ \sin z}$. Ανώμαλα σημεία της $f:k\pi,\ \ k\in\mathbb{Z}$. Από αυτά, μόνο το 0 περιέχεται στο εσωτερικό της γ κι επομένως $\displaystyle\int_\gamma f(z)dz=2\pi i Res(f,0)$.

Έχουμε

$$z^2\ \sin z=z^3A(z), \quad \text{όπου} \quad A(z)=1\ -\ \frac{z^2}{3!}\ +\ \frac{z^4}{5!}\ -\ \frac{z^6}{7!}+\ \ldots, \quad z\in\mathbb{C}.$$

Προφανώς A ολόμορφη στο $\mathbb{C}$ (ως δυναμοσειρά που συγκλίνει για $z\in\mathbb{C}$) και

$$A(0)=1, \quad A'(0)=0, \quad \frac{A''(0)}{2!}=-\frac{1}{3!}\ \Rightarrow\ A''(0)=-\frac{1}{3}.$$

Επειδή $A(0) \neq 0$, υπάρχει ανοικτός δίσκος D κέντρου 0 ώστε η $1/A$ να είναι ολόμορφη στον D και

$$f(z) = \frac{1}{z^3 A(z)}, \quad \forall\, z \in D \setminus \{0\}.$$

Έπεται ότι το 0 είναι πόλος της f τάξης 3 και

$$Res(f,0) = \frac{1}{2!} \lim_{z \to 0} [\ z^3 f(z)\ ]'' = \frac{1}{2} \lim_{z \to 0} \left[\frac{1}{A(z)} \right]''.$$

Αλλά, $\forall\, z \in D$,

$$\left[\frac{1}{A(z)} \right]'' = -\left[\frac{A'(z)}{A(z)^2} \right]' = -\frac{A''(z)A(z)^2 - A'(z)2A(z)A'(z)}{A(z)^4} = \frac{2A'(z)^2 - A''(z)A(z)}{A(z)^3},$$

οπότε

$$Res(f,0) = \frac{1}{2} \lim_{z \to 0} \frac{2A'(z)^2 - A''(z)A(z)}{A(z)^3} = \frac{1}{2} \frac{2A'(0)^2 - A''(0)A(0)}{A(0)^3} = -\frac{1}{2} \frac{A''(0)}{A(0)^2} = \frac{1}{6}.$$

Άρα, το αρχικό ολοκλήρωμα γράφεται

$$\frac{1}{4} 2\pi i \frac{1}{6} = \frac{\pi i}{12}.$$

- Θέτουμε $g(z) = \dfrac{e^{1/z}}{1-z}$. Ανώμαλα σημεία της g : 0, 1. Από αυτά, μόνο το 0 περιέχεται στο εσωτερικό της γ κι επομένως $\displaystyle\int_\gamma g(z)dz = 2\pi i Res(g,0)$.

  Για $0 < |z| < 1$, έχουμε

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \cdot \frac{1}{z^k} = \sum_{n,\,k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^{n-k}.$$

  Για $n - k = -1$, $n \geq 0$ παίρνουμε $n = k - 1$ και $k \geq 1$, οπότε ο συντελεστής του $1/z$ στο παραπάνω ανάπτυγμα ισούται με

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} = e - 1.$$

  Συνεπώς, $Res(g,0) = e - 1 \ \Rightarrow \ \displaystyle\int_\gamma g(z)dz = 2\pi i(e-1)$.

- Θέτουμε

$$h(z) = \frac{z^4 e^{iz}}{z^6 + 1}.$$

  Είναι $a^6 = \left(e^{i\pi/6}\right)^6 = e^{i\pi} = -1 = i^6$, οπότε οι ρίζες του πολυωνύμου $z^6 + 1$ είναι $\pm a$, $\pm \overline{a}$, $\pm i$. Από αυτές, μόνο οι a, $-\overline{a}$, i έχουν θετικό φανταστικό μέρος. Επομένως,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(x)dx = 2\pi i \left[Res(h,a) + Res(h,-\overline{a}) + Res(h,i) \right].$$

$\forall\ \rho \in \{a,\ -\overline{a},\ i\}$, έχουμε

$$Res(h,\rho) = \frac{z^4 e^{iz}}{6z^5}\ |_{z=\rho} = \ \frac{\rho^4 e^{i\rho}}{6\rho^5} = \frac{e^{i\rho}}{6\rho}\ = \frac{\overline{\rho} e^{i\rho}}{6}\ .$$

Άρα,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(x)dx \ \ = \ \ \frac{2\pi i}{6}\left(-\frac{i}{e}\ +\ \overline{a}e^{ia}\ -\ ae^{-i\overline{a}}\right) = \frac{\pi i}{3}\left[-\frac{i}{e}\ +\ 2i\mathrm{Im}(\ \overline{a}e^{ia}\ )\right] = \frac{\pi}{3}\left[\ \frac{1}{e}\ -\ 2\mathrm{Im}(\ \overline{a}e^{ia}\ )\right]$$

$$\Rightarrow \quad \int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^4\cos x}{x^6+1}dx \ = \mathrm{Re}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} h(x)dx\right]\ = \frac{\pi}{3}\left[\frac{1}{e}\ -\ 2\mathrm{Im}(\overline{a}e^{ia})\right]\ .$$

.

ΘΕΜΑ 5: Θέτουμε $g(z) = e^{f(z)},\ z \in U$, όπου U το ανοικτό σύνολο που αναφέρεται στην εκφώνηση. Προφανώς, η g είναι ολόμορφη στο U.

Λόγω της υπόθεσης έχουμε

$$|g(z)| = e^{\mathrm{Re}f(z)} \le e^0 = 1,\ \text{ για }\ |z| = r \quad \text{και} \quad |g(z)| = e^{\mathrm{Re}f(z)} \le e^1 = e,\ \text{ για }\ |z| = R.$$

Από την Αρχή του Μεγίστου τώρα έπεται ότι

$$\max\{\ |g(z)| : z \in \Delta\ \} = \max\{\ |g(z)| : z \in \partial\Delta\ \} = \max\left\{\ \max_{|z|=r}|g(z)|,\ \ \max_{|z|=R}|g(z)|\ \right\}\ \le\ e.$$

Επομένως, $\forall\ z \in \Delta$,

$$e^{\mathrm{Re}f(z)} = |g(z)|\ \le\ e \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Re}f(z)\ \le\ 1.$$