ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ ΜΙΓΑΔΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ -ΣΕΜΦΕ/ΠΟΛΙΤΙΚΟΙ ΜΗΧΑΝ.
09/09/2021
ΔΙΑΡΚΕΙΑ: 90′

ΘΕΜΑ 1: (i) (1 μ.) Να λύσετε στο $\mathbb{C}$ την εξίσωση $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n!} = i.$

(ii) (1,5 μ.) Έστω $f = u + iv : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ολόμορφη τέτοια ώστε $u^3 - 3uv^2 \geq 0$ στο $\mathbb{R}^2$. Να δείξετε ότι η f είναι σταθερή. [*Υπόδειξη:* Θ. Liouville.]

ΘΕΜΑ 2: (i) (1 μ.) Έστω $\varphi : [a, b] \to \mathbb{C}$ συνεχής $(a < b)$. Να δείξετε ότι

$$\left|\int_a^b \varphi(t)dt\right| \leq \int_a^b |\varphi(t)|dt.$$

(ii)(1,5 μ.) Εάν $\gamma_R(t) = Re^{it},\ R > 0,\ t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, να δείξετε ότι $\displaystyle\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_R}\frac{e^{iz}}{z}dz = 0.$
Δίνεται ότι $\sin t \geq 2t/\pi,\ \forall\, t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

ΘΕΜΑ 3: (3,5 μ.) Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα

$$\int_\gamma \frac{e^z - 1 - z}{z^2(1-\cos z)}dz \text{ (2 μ.)}, \qquad \int_\gamma \frac{1}{1-z}\sin\left(\frac{1}{z}\right)dz \text{ (1,5 μ.)},$$

όπου $\gamma(t) = 2e^{it},\ t \in [0, 2\pi]$.

ΘΕΜΑ 4: (1,5 μ.) Θέτουμε $D[0,1] = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ και θεωρούμε $U \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό με $D[0,1] \subseteq U$. Έστω $f : U \to \mathbb{C}$ ολόμορφη τέτοια ώστε

$$|f(z)| \leq \frac{1}{|\mathrm{Im} z|}, \quad \text{για όλα τα } z \text{ με } |z| = 1.$$

Να δείξετε ότι $|1 - z^2||f(z)| \leq 2,\ \forall\, z \in D[0,1]$. [*Υπόδειξη:* Αρχή Μεγίστου.]

-1: (i) Η εξίσωση γράφεται

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n!}=1+i \Leftrightarrow e^{z}=1+i=e^{\mathrm{Log}(1+i)}$$

$$\Leftrightarrow \quad z=\mathrm{Log}(1+i)+2k\pi i,\ k\in\mathbb{Z}.$$

Αλλά, $1+i=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{i}{\sqrt{2}}\right)=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$$\Rightarrow |1+i|=\sqrt{2}, \quad \mathrm{Arg}(1+i)=\pi/4$$

$$\Rightarrow \mathrm{Log}(1+i)=\ln\sqrt{2}+i\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}\ln 2+i\frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \underline{z=\frac{1}{2}\ln 2+\pi i\left(2k+\frac{1}{4}\right), \quad k\in\mathbb{Z}.}$$

(ii) Θέτουμε $g=f^3=u^3+3u^2iv+3u(iv)^2+v^3i^3$

$$=(u^3-3uv^2)+i(3u^2v-v^3)$$

$$\Rightarrow \mathrm{Re}\,g=u^3-3uv^2\geq 0.$$

Θέτουμε $F=e^{-g} \Rightarrow F$ ολόμορφη στο $\mathbb{C}$,

$$|F|=e^{-\mathrm{Re}\,g}\leq 1 \xRightarrow{\text{Θ. Liouville}} F=\text{σταθερή}$$

$$\Rightarrow 0=F'=-g'e^{-g}\Rightarrow g'=0\Rightarrow g=\text{σταθερή}.$$

$$\Rightarrow |f|^3=|f^3|=|g|=\text{σταθερή}\Rightarrow |f|=\text{σταθερή}$$

$$\Rightarrow f=\text{σταθερή}.$$

-2. (i) Θέτουμε $z=\int_a^b \varphi(t)\,dt$.

- Εάν $z=0$, ισχύει.
- Έστω $z\neq 0 \Rightarrow \exists\, \theta \in [0,2\pi] \mid z=|z|e^{i\theta}$.

Τότε,

$$|z| = e^{-i\theta} z = \int_a^b e^{-i\theta}\varphi(t)\,dt =$$

$$= \operatorname{Re}\left[\int_a^b e^{-i\theta}\varphi(t)\,dt\right] = \int_a^b \operatorname{Re}\left[e^{-i\theta}\varphi(t)\right]dt$$

$$\leq \int_a^b \left|e^{-i\theta}\varphi(t)\right|dt = \int_a^b |\varphi(t)|\,dt.$$

(ii)

$$\int_{\gamma_R} \frac{e^{iz}}{z}\,dz = \int_0^{\pi/2} \frac{e^{i\gamma_R(t)}}{\gamma_R(t)}\gamma_R'(t)\,dt$$

κ' $\gamma_R'(t) = iRe^{it} = i\gamma_R(t) \Rightarrow \left|\frac{\gamma_R'(t)}{\gamma_R(t)}\right| = 1$

$$i\gamma_R(t) = iR(\cos t + i\sin t) = -R\sin t + iR\cos t$$

$$\Rightarrow \left|e^{i\gamma_R(t)}\right| = e^{-R\sin t} \leq e^{-\frac{2R}{\pi}t}, \quad \forall t\in[0,\pi/2].$$

Επομένως,

$$\left|\int_{\gamma_R} \frac{e^{iz}}{z}\,dz\right| \overset{(i)}{\leq} \int_0^{\pi/2} e^{-\frac{2R}{\pi}t}\,dt =$$

$$= \frac{\pi}{2R}\left(1-e^{-R}\right) \xrightarrow{R\to\infty} 0.$$

Θ-3.

$$\to \quad e^z - 1 - z = z^2 \underbrace{\left(\frac{1}{2!} + \frac{z}{3!} + \frac{z^2}{4!} + \cdots\right)}_{\varphi(z)},$$

$\varphi(0) = 1/2,\ \varphi'(0) = 1/3! = 1/6,$

$$z^2(1-\cos z) = z^4 \underbrace{\left(\frac{1}{2!} - \frac{z^2}{4!} + \frac{z^4}{6!} - \cdots\right)}_{\psi(z)}$$

$\psi(0) = 1/2,\ \psi'(0) = 0$

φ, ψ ολόμορφες στο $\mathbb{C}$ κ' αφού $\psi(0) \neq 1/2$,

η φ/ψ είναι ολόμορφη σε περιοχή U του 0

κ' $\forall z \in U$, $\quad f(z) = \dfrac{1}{z^2} \dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$

$\Rightarrow$ 0 = πόλος τάξης 2

$$\Rightarrow \operatorname{Res}(f, 0) = \left(\frac{\varphi}{\psi}\right)'\Big|_{z=0} = \frac{\varphi'(0)\psi(0) - \varphi(0)\psi'(0)}{\psi(0)^2}$$

$$= \frac{\varphi'(0)}{\psi(0)} = \frac{1/6}{1/2} = 1/3$$

④

$$\Rightarrow \int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i/3$$

$$\rightarrow \quad \sin(1/z) = \frac{1}{z} - \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{5!z^5} - \frac{1}{7!z^7} + \cdots$$

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6 \cdots$$

για $0<|z|<1$

ο συντελ. $(1/z)$ στο ανάπτυγμα της

$g(z) = \frac{1}{1-z}\sin(1/z)$ ισούται με

$$= 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!} + \cdots = \sin 1$$

$$\operatorname{Res}(g,1) = \frac{\sin(1/z)}{(1-z)'}\Big|_{z=1} = -\sin 1$$

$$\Longrightarrow \int_\gamma g = 0$$

Scanned with CamScanner

Θ.4:

Αρχή Μεγίστου

$$\Rightarrow \max_{|z|\le 1} |(1-z^2)f(z)| =$$

$$= \max_{|z|=1} |(1-z^2)f(z)|.$$

Για $|z|=1$, έχουμε $z\bar{z}=1$

$$\Rightarrow |1-z^2| = |z\bar{z}-z^2| = |z||\bar{z}-z|$$

$$= |-2i\,\mathrm{Im}z| = 2|\mathrm{Im}z|$$

$$\Rightarrow |1-z^2|\cdot|f(z)| = 2|\mathrm{Im}\,z|\cdot|f(z)| \underset{[\text{ΥΠΟΘΕΣΗ}]}{\le} 2\cdot 1 = 2.$$

Άρα,

$$\max_{|z|=1} |(1-z^2)f(z)| \le 2$$

$$\Rightarrow \max_{|z|\le 2} |(1-z^2)f(z)| \le 2.$$

Scanned with CamScanner