ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΗ ΜΙΓΑΔΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ –ΣΕΜΦΕ–ΕΜΠ
30/09/2020
ΔΙΑΡΚΕΙΑ: 90′

ΘΕΜΑ 1: (2 μ.) Έστω $U \subseteq \mathbb{C}$ πεδίο και $f = u + iv : U \to \mathbb{C}$ ολόμορφη, με $u_x + v_y = 0$ στο U. Να δείξετε ότι υπάρχουν $c \in \mathbb{R},\ d \in \mathbb{C}$ τέτοια ώστε $f(z) = icz + d, \quad z \in U$.

ΘΕΜΑ 2 : (i) (0,5 μ.) Έστω $U \subset \mathbb{C}$ ανοικτό, $F : U \to \mathbb{C}$ ολόμορφη και $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ απλή, λεία καμπύλη με $\gamma^* \subset U$. Να δείξετε ότι

$$\int_\gamma F'(z)dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) .$$

(ii) (1,5 μ.) Εάν $z_1,\ z_2 \in \mathbb{C}$ με $\mathrm{Re}(z_1) \leq 0,\ \mathrm{Re}(z_2) \leq 0$, να δείξετε ότι $|e^{z_1} - e^{z_2}| \leq |z_1 - z_2|$.

ΘΕΜΑ 3: (1,5 μ.) Να βρείτε το $\max\limits_{z \in D} \dfrac{1}{|z+1|}$, όπου $D = \{ x + iy : x^2 + y^2 \leq 2x \}$, καθώς

και τα σημεία του D στα οποία το παραπάνω max πραγματοποιείται.

ΘΕΜΑ 4:(2,5 μ.) Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα

$$\int_\gamma \frac{dz}{z^2 \sin z} , \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + x + 1)^2} ,$$

όπου $\gamma(t) = 8e^{it}, \quad t \in [0, 2\pi]$. [Για τον υπολογισμό του δεύτερου ολοκληρώματος να χρησιμοποιήσετε αποκλειστικά μεθόδους Μιγαδικής Ανάλυσης.]

ΘΕΜΑ 5: (i) (0,5 μ.) Εάν $\varphi : [a, b] \to \mathbb{C}\ (a < b)$ συνεχής, να δείξετε ότι

$$\int_a^b \overline{\varphi(t)}dt = \overline{\int_a^b \varphi(t)dt}.$$

(ii) (1,5 μ.) Έστω $U \subseteq \mathbb{C}$ πεδίο που περιέχει τον κλειστό δίσκο $D[0, 1] = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$, $f : U \to \mathbb{C}$ ολόμορφη και $\gamma(t) = e^{it},\ t \in [0, 2\pi]$. Εάν $a \in \mathbb{C},\ |a| > 1$, να δείξετε ότι

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\overline{f(z)}}{z - a}\, dz = \overline{f(0)} - \overline{f\left(\frac{1}{\overline{a}}\right)}.$$