''ΜΙΓΑΔΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ'' -ΣΕΜΦΕ & ΣΗΜΜΥ -Ε.Μ.Π.
04/09/2018

Θέμα 1: (α)(1,5 μ.) Δίνεται η συνάρτηση $u(x,y) = e^x \cos y + e^y \cos x + xy$, $x, y \in \mathbb{R}^2$. Να βρείτε ολόμορφη συνάρτηση $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ώστε $u = \text{Re}(f)$ και $f(0) = 2$.

(β)(1 μ.) Έστω $A \subseteq \mathbb{C}$ πεδίο και $f = u + iv : A \to \mathbb{C}$ ολόμορφη. Αν η $u^3 - 3uv^2$ είναι σταθερή, να δείξετε ότι η f είναι σταθερή.

Θέμα 2:(1,5 μ.)Αναπτύξτε σε σειρά Laurent τη συνάρτηση $f(z) = \dfrac{1}{z^3 - z^4}$ γύρω από το 0, στους δακτυλίους $0 < |z| < 1$, $|z| > 1$.

Θέμα 3:(1,5 μ.) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$\int_{\gamma_R} \frac{dz}{z^2 - 1},$$

όπου $\gamma_R(t) = Re^{it}$, $t \in [-\pi/2, \pi/2]$, $R > 1$.
[*Υπόδειξη*: Ολοκληρωτικός τύπος του Cauchy πάνω στην κλειστή καμπύλη $\gamma_R + [Ri, -Ri]$.]

Θέμα 4:(1 μ.) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^4 + 5x^2 + 4} dx$$

με χρήση μιγαδικής ανάλυσης.

Θέμα 5: (α)(0,5 μ.) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$\int_\gamma \frac{e^{z^2}}{z^6} dz, \quad \text{όπου } \gamma(t) = e^{it}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

(β)(0,5 μ.) Να προσδιορίσετε ολόμορφη συνάρτηση $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ τέτοια ώστε

$$\sin z = (\pi - z)\varphi(z), \quad \forall z \in \mathbb{C}, \quad \varphi(\pi) = 1, \quad \varphi'(\pi) = 0.$$

(γ)(1 μ.) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$\int_\gamma \frac{e^z - 1}{\sin^2 z} dz \ , \quad \text{όπου } \gamma(t) = 4e^{it}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Θέμα 6: Έστω $P(z)$ πολυώνυμο βαθμού $n \geq 1$.
(α)(0,5 μ.) Να δείξετε ότι υπάρχει πολυώνυμο $Q(z)$ βαθμού το πολύ n τέτοιο ώστε

$$P(z) = z^n Q(1/z), \quad \text{για κάθε } z \neq 0.$$

(β)(1 μ.) Εάν $|P(z)| \leq 1$, για κάθε $z \in \mathbb{C}$ με $|z| = 1$, να δείξετε ότι

$$|P(z)| \leq |z|^n, \quad \text{για κάθε } z \in \mathbb{C} \text{ με } |z| \geq 1.$$

[*Υπόδειξη*: Αρχή Μεγίστου.]

ΛΥΣΕΙΣ

Θέμα 1: (α) Έστω $f = u + iv$ ολόμορφη στο $\mathbb{C}$. Οι συνθήκες Cauchy-Riemann δίνουν

$$v_y = u_x = e^x \cos y \ - \ e^y \sin x \ + \ y \tag{1}$$

και

$$v_x = -u_y = e^x \sin y \ - \ e^y \cos x \ - \ x. \tag{2}$$

Ολοκληρώνοντας την (1) ως προς y παίρνουμε

$$v = e^x \sin y \ - \ e^y \sin x \ + \ y^2/2 \ + \ c(x). \tag{3}$$

Παραγωγίζοντας την (3) ως προς x παίρνουμε

$$v_x = e^x \sin y \ - \ e^y \cos x \ + \ c'(x),$$

οπότε, λόγω της (2), $c'(x) = -x$, δηλ. $c(x) = -x^2/2 + c$, όπου c πραγματική σταθερά. Η (3) τώρα γράφεται

$$v = e^x \sin y \ - \ e^y \sin x \ + \ \frac{y^2 \ - \ x^2}{2} \ + \ c.$$

Επειδή $f(0) = 2$, ϑα πρέπει $2 = 2 + ic \ \Rightarrow \ c = 0$.
Άρα, η ζητούμενη ακέραια συνάρτηση είναι η

$$f(x+iy) = e^x \cos y \ + \ e^y \cos x \ + \ xy \ + \ i\left(e^x \sin y \ - \ e^y \sin x \ + \ \frac{y^2 \ - \ x^2}{2}\right).$$

(β) Από γνωστή ταυτότητα έχουμε

$$f^3 = u^3 + 3u^2(iv) + 3u(iv)^2 + (iv)^3 = (u^3 - 3uv^2) \ + \ i(3u^2v \ - \ v^3),$$

οπότε

$$Re(f^3) = u^3 - 3uv^2 = \text{σταθερή}.$$

Επειδή f^3 ολόμορφη, παίρνουμε ότι $f^3 = \text{σταθερή} = c \in \mathbb{C}$. Τότε, $|f|^3 = |f^3| = |c| \ \Rightarrow \ |f| = |c|^{1/3} = \text{σταθερή}$ κι επειδή f ολόμορφη, παίρνουμε τελικά ότι $f = \text{σταθερή}$.

Θέμα 2: Για $0 < |z| < 1$, έχουμε

$$f(z) = \frac{1}{z^3} \cdot \frac{1}{1-z} = \frac{1}{z^3} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} z^n .$$

Για $|z| > 1$, έχουμε $|1/z| < 1$ και

$$f(z) = -\frac{1}{z^4} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{z}} = -\frac{1}{z^4} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+4}} .$$

Θέμα 3: Θεωρούμε την απλή κλειστή τμηματικά λεία και θετικά προσανατολισμένη καμπύλη

$$\Gamma_R = \gamma_R + [Ri, -Ri].$$

Ο ολοκληρωτικός τύπος του Cauchy δίνει

$$\int_{\Gamma_R} \frac{1}{z^2 - 1} dz = \int_{\Gamma_R} \frac{\frac{1}{z+1}}{z-1} dz = 2\pi i \frac{1}{z+1} \, |_{z=1} = i\pi.$$

Τώρα έχουμε

$$i\pi = \int_{\Gamma_R} \frac{1}{z^2-1} dz = \int_{\gamma_R} \frac{1}{z^2-1} dz + \int_{[Ri,-Ri]} \frac{1}{z^2-1} dz.$$

Αλλά

$$\int_{[Ri,-Ri]} \frac{1}{z^2-1} dz = -\int_{[-Ri,Ri]} \frac{1}{z^2-1} dz = -\int_{t=-R}^{t=R} \frac{d(it)}{(it)^2 - 1} = i \int_{t=-R}^{t=R} \frac{dt}{t^2+1} = 2i\text{ArctanR}.$$

Επομένως,

$$\int_{\gamma_R} \frac{1}{z^2-1} dz = i(\pi - 2\text{ArctanR}).$$

Θέμα 4: Είναι $x^4 + 5x^2 + 4 = (x^2+1)(x^2+4)$, οπότε οι ρίζες του παρανομαστή είναι $\pm i$, $\pm 2i$. Συνεπώς,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x^4 + 5x^2 + 4} dx = 2\pi i [\, Res(f,i) + Res(f,2i) \,], \quad \text{όπου} \quad f(z) = \frac{e^{iz}}{z^4 + 5z^2 + 4} .$$

Έχουμε

$$Res(f,i) = \frac{e^{iz}}{4z^3 + 10z} \, |_{z=i} = -\frac{i}{6e} ,$$

$$Res(f, 2i) = \frac{e^{iz}}{4z^3 + 10z}\, |_{z=2i} = \frac{i}{12e^2}$$

και συνεπώς,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x^4 + 5x^2 + 4} dx = \ldots = \frac{\pi(2e-1)}{12e^2} \ .$$

Εξισώνοντας στην παραπάνω τα πραγματικά μέρη κι επειδή $e^{ix} = \cos x + i \sin x$, παίρνουμε ότι

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^4 + 5x^2 + 4} dx = \frac{\pi(2e-1)}{12e^2} \ .$$

Θέμα 5: (α) Για $|z| > 0$ έχουμε

$$\frac{e^{z^2}}{z^6} = \frac{1}{z^6} \cdot \left(1 + \frac{z^2}{1!} + \frac{z^4}{2!} + \frac{z^6}{3!} + \ldots\right) = \frac{1}{z^6} + \frac{1}{z^4} + \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{3!} + \ldots .$$

Επειδή ο συντελεστής του $1/z$ στο παραπάνω ανάπτυγμα Laurent ισούται με 0, παίρνουμε

$$Res\left(\frac{e^{z^2}}{z^6},\ 0\right) = 0.$$

Όμως, το 0 είναι το μοναδικό ανώμαλο σημείο της $\frac{e^{z^2}}{z^6}$ που βρίσκεται στο εσωτερικό της γ, οπότε το ζητούμενο ολοκλήρωμα ισούται με

$$2\pi i Res\left(\frac{e^{z^2}}{z^6},\ 0\right) = 0.$$

(β) $\forall z \in \mathbb{C}$,

$$\sin z = \sin(\pi - z) = (\pi - z) - \frac{(\pi - z)^3}{3!} + \frac{(\pi - z)^5}{5!} - \frac{(\pi - z)^7}{7!} + \ldots = (\pi - z) \cdot \varphi(z),$$

όπου

$$\varphi(z) = 1 - \frac{(\pi - z)^2}{3!} + \frac{(\pi - z)^4}{5!} - \frac{(\pi - z)^6}{7!} + \ldots, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Προφανώς, η φ είναι ολόμορφη στο $\mathbb{C}$ και $\varphi(\pi) = 1,\ \varphi'(\pi) = 0.$

(γ) Τα ανώμαλα σημεία της συνάρτησης

$$f(z) = \frac{e^z - 1}{\sin^2 z}$$

που περιέχονται στο εσωτερικό της γ είναι $0, \pm\pi$.

Είναι

$$\lim_{z\to 0}[\, zf(z)\,] = \lim_{z\to 0}\frac{e^z - 1}{z}\cdot\lim_{z\to 0}\left(\frac{z}{\sin z}\right)^2 = 1\cdot 1^2 = 1 \neq 0,$$

οπότε το σημείο 0 είναι απλός πόλος της f και άρα $Res(f,0)=1$.

Επίσης, λόγω του ερωτ. (β),

$$\lim_{z\to\pi}[\,(z-\pi)^2 f(z)\,] = \lim_{z\to\pi}\frac{e^z - 1}{[\,\varphi(z)\,]^2} = e^\pi - 1 \neq 0,$$

οπότε το σημείο π είναι διπλός πόλος της f. Άρα,

$$Res(f,\pi) = \lim_{z\to\pi}[\,(z-\pi)^2 f(z)\,]' = \lim_{z\to\pi}\frac{e^z\varphi^2(z) - 2(e^z-1)\varphi(z)\cdot\varphi'(z)}{[\,\varphi(z)\,]^4} = e^\pi.$$

Στη συνέχεια, από το ερωτ. (β), θέτοντας όπου z το $-z$, παίρνουμε

$$\sin z = (\pi + z)g(z), \quad z\in\mathbb{C},$$

όπου $g(z) = -\varphi(-z), \quad z\in\mathbb{C}$. Προφανώς, $g(-\pi)=-1,\ g'(-\pi)=0$.

Εργαζόμενοι όπως παραπάνω, παίρνουμε

$$Res(f,-\pi) = e^{-\pi}.$$

Τελικά, το ζητούμενο ολοκλήρωμα είναι

$$2\pi i(\,1 + e^\pi + e^{-\pi}\,).$$

Θέμα 6: (α) Έστω

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + a_{n-2}z^{n-2} + \ldots + a_1 z + a_0\,,$$

με $a_k\in\mathbb{C},\ 0\le k\le n,\ a_n\neq 0$.

Για $z\neq 0$, έχουμε

$$P(z) = z^n\left(\frac{a_0}{z^n} + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \frac{a_2}{z^{n-2}} + \ldots + a_n\right) = z^n Q(1/z),$$

όπου

$$Q(z) = a_0 z^n \ + \ a_1 z^{n-1} \ + \ a_2 z^{n-2} \ + \ \ldots \ + \ a_{n-1} z \ + \ a_n \ , \quad z \in \mathbb{C}.$$

(β) Για $|z| = 1$, έχουμε

$$|Q(1/z)| = |\ z^n Q(1/z)\ | = |P(z)| \leq 1.$$

Για $|w| = 1$, εφαρμόζοντας την παραπάνω για $z = 1/w$ παίρνουμε $|Q(w)| \leq 1$. Από την Αρχή του Μεγίστου τώρα προκύπτει

$$\max_{|w| \leq 1} |Q(w)| \ = \ \max_{|w|=1} |Q(w)| \ \leq \ 1.$$

Έστω $z \in \mathbb{C}$ με $|z| \geq 1$. Θέτουμε $z = 1/w$. Τότε, $|w| \leq 1$ οπότε

$$|Q(1/z)| = |Q(w)| \leq 1$$

και άρα

$$|P(z)| = |z|^n |Q(1/z)| \leq |z|^n.$$