

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ
ΜΙΓΑΔΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ -ΜΙΓΑΔΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ
07/09/2022
ΔΙΑΡΚΕΙΑ: 2 Ω

ΘΕΜΑ 1: (1,5 μ.) Δίνεται η συνάρτηση $u(x, y) = e^{-y} \cos x + 3x^2y - y^3$, $x, y \in \mathbb{R}$. Να βρείτε ολόμορφη συνάρτηση $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ώστε $\operatorname{Re} f = u$, $f(0) = 1 - i$.

ΘΕΜΑ 2: (1,5 μ.) Να αναπτύξετε σε σειρά Laurent γύρω από το σημείο $z_0 = 1$ τη συνάρτηση

$$f(z) = \frac{1}{z^2} - \frac{1}{3-z},$$

στο δακτύλιο $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z-1| < 2\}$.

ΘΕΜΑ 3: (i) (1 μ.) Έστω $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ολόμορφη και $z_0 \in \mathbb{C}$ με $f(z_0) = 0$. Να δείξετε ότι υπάρχει ολόμορφη συνάρτηση $\varphi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ τέτοια ώστε

$$f(z) = (z - z_0)\varphi(z), \quad \forall z \in \mathbb{C}, \quad \varphi(z_0) = f'(z_0), \quad \varphi'(z_0) = f''(z_0)/2.$$

(ii) (2 μ.) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_{\gamma} \frac{z}{(e^z - e^{-z})^2} dz$, όπου $\gamma(t) = 4e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

ΘΕΜΑ 4: (1,5 μ.) Με αποκλειστική χρήση Μιγαδικής Ανάλυσης να δείξετε ότι

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(2 + \cos t)^2} = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}.$$

ΘΕΜΑ 5: (i) (1,5 μ.) Έστω f ολόμορφη και φραγμένη στον τρυπημένο ανοικτό δίσκο $D(z_0, r) \setminus \{z_0\}$, $z_0 \in \mathbb{C}$, $0 < r \leq \infty$. Να δείξετε ότι το z_0 είναι αιρόμενο ανώμαλο σημείο της f . [Υπόδειξη: Να χρησιμοποιήσετε τους ολοκληρωτικούς τύπους για τους συντελεστές του αναπτύγματος Laurent.]

(ii) (1 μ.) Έστω $f: \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ ολόμορφη τέτοια ώστε

$$|f(z)| \geq \frac{1}{|z|}, \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \quad f(1) = 1.$$

Να δείξετε ότι $f(z) = \frac{1}{z}$, $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Q.1 Έστω $f = u + iv$ η J η τωκέτη συνάρτηση.

Τότε, $[C-R]$

$$v_y = u_x = -e^{-y} \sin x + 6xy$$

$$\Rightarrow v = \underline{e^{-y} \sin x + 3xy^2 + c(x)} \quad (1)$$

Επιπλέον,

$$[C-R] \quad v_x = -u_y$$

(1)

$$\Rightarrow e^{-y} \cos x + 3y^2 + c'(x) = -(-e^{-y} \cos x + 3x^2 - 3y^2)$$

$$\Rightarrow e^{-y} \cos x + 3y^2 + c'(x) = e^{-y} \cos x - 3x^2 + 3y^2$$

$$\Rightarrow c'(x) = -3x^2 \Rightarrow \underline{c(x) = -x^3 + C}$$

(2)

$$\Rightarrow \underline{v = e^{-y} \sin x + 3xy^2 - x^3 + C} \quad (2)$$

$$1 - i = f(0) = u(0,0) + iv(0,0) = 1 + iC$$

$$\Rightarrow C = -1$$

$$\Rightarrow \underline{v = e^{-y} \sin x + 3xy^2 - x^3 - 1}$$

(2)

Θ. 2: Έστω $z \in \Delta$.

• Θεωρούμε $w = \frac{z-1}{2} \Rightarrow [z = 1+2w \text{ ή } |w| < 1]$

$$\Rightarrow \frac{1}{3-z} = \frac{1}{3-1-2w} = \frac{1}{2(1-w)} \quad (|w| < 1)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} w^n = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{2^{n+1}}$$

• Θεωρούμε $w = \frac{1}{z-1} \Rightarrow \begin{cases} z = 1 + \frac{1}{w} = \frac{1+w}{w} \\ |w| < 1 \end{cases}$

$$\Rightarrow \frac{1}{z^2} = w^2 \frac{1}{(1+w)^2} = -w^2 \left(\frac{1}{1+w} \right)'$$

$$= -w^2 \left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n w^n \right]' = \sum_{n=1}^{\infty} n (-1)^{n+1} w^{n+1}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) (-1)^{n+1} \frac{1}{(z-1)^{n+1}}$$

Αν $\alpha \in \mathbb{N}$, $\forall z \in \Delta$,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1) (-1)^{n+1}}{(z-1)^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{2^{n+1}}$$

0.3: (i) Από Θ. Taylor,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z-z_0)^n, \quad \forall z \in \mathbb{D}$$

$$\left[\begin{array}{l} f(z_0) = 0 \\ \underline{\quad} \end{array} \right] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z-z_0)^n$$

$$= \underbrace{f(z-z_0)}_{\varphi(z)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z-z_0)^{n-1}$$

Η φ είναι ολόμορφη στο \mathbb{D} γιατί αναπτύσσεται σε δυναμώσεις στο \mathbb{D} . Επιπλέον,

$$\varphi(z) = f'(z_0) + \frac{f''(z_0)}{2} (z-z_0) + \dots$$

$$\Rightarrow \varphi(z_0) = f'(z_0), \quad \varphi'(z_0) = \frac{f''(z_0)}{2}.$$

(ii) Τα αντίστοιχα σημεία της συνάρτησης

$$g(z) = \frac{z}{f(z)^2}, \quad f(z) = e^z - \bar{e}^z$$

είναι οι ρίζες της εξίσωσης $e^z = \bar{e}^z$.

$$e^{2z} = 1 \Leftrightarrow 2z = 2k\pi i, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow z = k\pi i, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow z = 0, \pm \pi i, \pm 2\pi i, \dots$$

Móno $z_0 = 0, \pm \pi i \in \text{int} f^*$

Example $f(z) = f(\pm \pi i) = 0,$

$$f'(0) = 2, f'(\pm \pi i) = -2,$$

$$f''(\pm \pi i) = 0$$

(i)
 $\Rightarrow \forall z_0 \in \{ \pm \pi i \},$

$$f(z) = (z - z_0) \varphi(z), \varphi(z_0) = f'(z_0) = -2,$$
$$\varphi'(z_0) = f''(z_0)/2 = 0$$

$$\Rightarrow g(z) = \frac{z}{(z - z_0)^2 \varphi(z)^2}$$

$$\Rightarrow \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^2 g(z) = \frac{z_0}{\varphi(z_0)^2} \neq 0$$

$\Rightarrow z_0$ είναι απλός πόλος της g

$$\Rightarrow \text{Res}(g, z_0) = \left[\frac{z}{\varphi(z)^2} \right]' \Big|_{z=z_0} = \frac{\varphi(z_0)^2 - 2z_0 \varphi'(z_0) \varphi(z_0)}{\varphi(z_0)^4}$$

$$= \frac{1}{f'(z_0)^2} = 1/4.$$

Επιπλέον, $\lim_{z \rightarrow z_0} [z g(z)] =$

$$= \lim_{z \rightarrow z_0} \left[\frac{z}{f(z)} \right]^2 = \lim_{z \rightarrow z_0} \left[\frac{z - z_0}{f(z) - f(z_0)} \right]^2$$

$$= \frac{1}{f'(z_0)^2} = 1/4.$$

Άρα, $\int_{\gamma} g(z) dz = 2\pi i (1/4 + 1/4 + 1/4) = \boxed{\frac{3\pi}{2} i}$

Θ-4: Το ολοκλήρωμα γράφεται

$$\int \frac{\frac{dz}{iz}}{\left(2 + \frac{z^2+1}{2z}\right)^2} = \frac{1}{i} \int \frac{\frac{dz}{z}}{\left(\frac{z^2+4z+1}{2z}\right)^2}$$

$$= \frac{4}{i} \int \frac{z}{(z^2+4z+1)^2} dz,$$

$$f(t) = e^{it}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Diğer zov $z^2 + 4z + 1$:

6

$$a = -2 + \sqrt{3}, \quad \beta = -2 - \sqrt{3}$$

$$|a| < 1 < |\beta|$$

$$\Rightarrow \int \frac{z}{(z^2 + 4z + 1)^2} dz = 2\pi i \operatorname{Res} \left[\frac{z}{(z^2 + 4z + 1)^2}, a \right]$$

$$= 2\pi i \left[\frac{(z-a)^2 z}{(z-a)^2 (z-\beta)^2} \right] \Big|_{z=a}$$

$$= 2\pi i \frac{(z-\beta)^2 - 2z(z-\beta)}{(z-\beta)^4} \Big|_{z=a}$$

$$= -2\pi i \frac{a+\beta}{(a-\beta)^3} = -2\pi i \frac{(-4)}{(2\sqrt{3})^3} = \frac{8\pi i}{8 \cdot 3\sqrt{3}}$$

$$= \frac{\pi i}{3\sqrt{3}}$$

$$\text{To apxiko' o2oua.} = \frac{4}{i} \frac{\pi i}{3\sqrt{3}} = \boxed{\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}}$$

(7)

0.5 (i) Από 0-Laurent,

$\exists! (a_k)_{k \in \mathbb{Z}} \subset \mathbb{C}$ ώστε

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k (z-z_0)^k, \quad 0 < |z-z_0| < r. \quad (3)$$

Επιπλέον, λόγω της υπόθεσης, $\exists M > 0$

$$\left(|f(z)| \leq M, \quad 0 < |z-z_0| < r \right). \quad (4)$$

Έστω $0 < \delta < r$'s'

$$f_\delta(t) = z_0 + \delta e^{it}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Τότε, $\forall k \in \mathbb{Z}$,

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{f_\delta} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}} dz.$$

Αλλά, $\forall z \in \gamma_\delta^*$, $\forall k \in \mathbb{Z}$,

$$\left| \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}} \right| \stackrel{(4)}{\leq} \frac{M}{\delta^{k+1}}$$

$$\Rightarrow |a_k| \stackrel{[ML-ανώρ.]}{\leq} \frac{1}{2\pi} 2\pi\delta \frac{M}{\delta^{k+1}}$$

$$\Rightarrow |a_k| \leq \frac{M}{f^k}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}. \quad (8)$$

Η τελευταία σχέση ισχύει $\forall \delta > 0$,
 από το γεγονός ότι $k < 0$, έχουμε

$$|a_k| \leq M \delta^{-k} \xrightarrow{\delta \downarrow 0} 0$$

$$\Rightarrow a_k = 0, \quad \forall k < 0$$

\Rightarrow απόδειξη.

(ii) Θεωρούμε $g = 1/f$. Η g είναι

ολοκλήρωτη στο $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ αφού $f(z) \neq 0, \forall z \neq 0$

$$\text{ή } g(1) = 1.$$

Επιπλέον, $|g(z)| \leq |z|, \forall z \neq 0$

$$\Rightarrow \left| \frac{g(z)}{z} \right| \leq 1, \quad \forall z \neq 0.$$

Επομένως, η $h(z) = g(z)/z$ είναι

ολοκλήρωτη ή εφαρμόσιμη στο $\mathbb{C} \setminus \{0\}$

(i) $\Rightarrow z_0 \neq 0$ είναι απόκλιση ανώτατο σημείο

\Rightarrow η h επιτυγχάνεται σε μια απόκλιση συνάρτηση $\tilde{h}: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$.

Πρόταση $|\tilde{h}(z)| \leq 1, \forall z \in \mathbb{C}$
[O-Liouville] $\tilde{h} = c = \text{σταθερή}$

$\Rightarrow g(z) = cz, \forall z \neq 0$

$\Rightarrow f(z) = c/z, \forall z \neq 0$

[$f(1)=1$] $\Rightarrow f(z) = 1/z, \forall z \neq 0$.