ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ
ΜΙΓΑΔΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ -ΜΙΓΑΔΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ
23/06/2022
ΔΙΑΡΚΕΙΑ: 2 Ω

ΘΕΜΑ 1: (i)(1,5 μ.) Δίνεται η συνάρτηση $u(x,y) = x^3 + 6x^2y - 3xy^2 - 2y^3$, $x, y \in \mathbb{R}$. Να βρείτε ολόμορφη συνάρτηση $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ώστε $\mathrm{Re}f = u$, $f(0) = 0$.

(ii)(1 μ.) Έστω $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ολόμορφη τέτοια ώστε $\mathrm{Im}f \geq 0$ στο $\mathbb{R}^2$. Να δείξετε ότι η f είναι σταθερή. [*Υπόδειξη:* Θ. Liouville.]

ΘΕΜΑ 2: (1 μ.) Να αναπτύξετε σε σειρά Laurent γύρω από το σημείο $z_0 = -1$ τη συνάρτηση

$$f(z) = \frac{1}{z+1} - \frac{1}{(z-1)^2},$$

στο "δακτύλιο" $|z+1| > 2$.

ΘΕΜΑ 3: (i)(1 μ.) Να δείξετε ότι υπάρχουν ολόμορφες συναρτήσεις $\varphi, \psi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ τέτοιες ώστε

$$e^z - 1 = (z - 2\pi i)\varphi(z) = (z + 2\pi i)\psi(z), \quad \forall z \in \mathbb{C}, \quad \varphi(2\pi i) = \psi(-2\pi i) = 1, \quad \varphi'(2\pi i) = \psi'(-2\pi i) = 1/2.$$

(ii)(2 μ.) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_\gamma \frac{z}{(e^z - 1)^2} dz$, όπου $\gamma(t) = 8e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

ΘΕΜΑ 4: (2 μ.) Με αποκλειστική χρήση Μιγαδικής Ανάλυσης, να δείξετε ότι

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^4 \cos x}{1+x^6} dx = \frac{\pi}{3}\left[\frac{1}{e} - 2\mathrm{Im}(\overline{a}e^{ia})\right],$$

όπου $a = \dfrac{\sqrt{3}+i}{2}$. [Δίνεται ότι $a^6 = i^6 = -1$.]

ΘΕΜΑ 5: (1,5 μ.) Έστω $f : D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 2\} \to \mathbb{C}$ *μη σταθερή* ολόμορφη συνάρτηση τέτοια ώστε

$$\forall\ r \in (1,2), \qquad \max\{|f(z)| : |z| = r\} \leq \frac{1}{r-1}.$$

Να δείξετε ότι

$$\sup\{|f(z)| : |z| < 2\} \leq 1, \quad |f(0)| < 1.$$

[*Υπόδειξη:* Εφαρμόστε κατάλληλα την Αρχή Μεγίστου.]

Θ.1: (i) $u = x^3 + 6x^2y - 3xy^2 - 2y^3$.

Έστω $f = u + iv$ η ζητούμενη. Τότε,

$$v_y \overset{[C-R]}{=} u_x = 3x^2 + 12xy - 3y^2$$

$$\Rightarrow \boxed{v = 3x^2y + 6xy^2 - y^3 + c(x).} \quad (1)$$

Επίσης,

$$u_y \overset{[C-R]}{=} -v_x = -6xy - 6y^2 - c'(x)$$

$$\Rightarrow 6x^2 - \cancel{6xy} - \cancel{6y^2} = -\cancel{6xy} - \cancel{6y^2} - c'(x)$$

$$\Rightarrow c'(x) = -6x^2 \Rightarrow c(x) = -2x^3 + c_1$$

$$\overset{(1)}{\Rightarrow} \boxed{v = 3x^2y + 6xy^2 - y^3 - 2x^3 + c_1.} \quad (2)$$

Αλλά $0 = f(0) = u(0,0) + iv(0,0) = i c_1 \Rightarrow c_1 = 0$

$$\Rightarrow v = 3x^2y + 6xy^2 - y^3 - 2x^3.$$

Άρα, $\forall\ z = x + iy \in \mathbb{C}$,

$$f(z) = (x^3 + 6x^2y - 3xy^2 - 2y^3) + i(3x^2y + 6xy^2 - y^3 - 2x^3).$$

(ii) Θέτουμε $g(z) = e^{if(z)}$, $z \in \mathbb{C}$. Τότε g ολόμορφη στο $\mathbb{C}$ κ' $\forall z \in \mathbb{C}$,

$$|g(z)| = e^{\mathrm{Re}(if(z))} = e^{-\mathrm{Im} f} \le e^0 = 1$$

[Θ. Liouville]

$\Rightarrow \quad g = $ σταθερή στο $\mathbb{C}$

$\Rightarrow \quad 0 = g'(z) = i f'(z) e^{i f(z)}, \quad \forall z \in \mathbb{C}$

$\Rightarrow \quad f'(z) = 0, \quad \forall z \in \mathbb{C}$

$\Rightarrow \quad f = $ σταθερή.

Θ.2: Για $|z+1| > 2$, θέτουμε $w = \dfrac{2}{z+1}$

$$\Rightarrow \begin{cases} |w| < 1 \\ z = \dfrac{2-w}{w} \Rightarrow z-1 = \dfrac{2(1-w)}{w} \end{cases}$$

οπότε

$$\frac{1}{(z-1)^2} = \frac{w^2}{4} \cdot \frac{1}{(1-w)^2} = \frac{w^2}{4} \left(\frac{1}{1-w} \right)'$$

$$= \frac{w^2}{4} \left(\sum_{n=0}^{\infty} w^n \right)' = \frac{w^2}{4} \sum_{n=1}^{\infty} n w^{n-1}$$

$$= \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} n w^{n+1} = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n 2^{n+1}}{(z+1)^{n+1}}$$

$$\Rightarrow f(z) = \frac{1}{z+1} - \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n 2^{n+1}}{(z+1)^{n+1}}.$$

$\underline{\Theta.3:(i)}$ $\forall w\in\mathbb{C},\quad e^{w}-1=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{w^{n}}{n!}=w\sum_{n=1}^{\infty}\frac{w^{n-1}}{n!}$

$$\Rightarrow \forall z\in\mathbb{C},\quad e^{z}-1=e^{z-2\pi i}-1$$

$$=(z-2\pi i)\,\varphi(z), \qquad (3)$$

όπου $\varphi(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z-2\pi i)^{n-1}}{n!}$

$$=1+\frac{z-2\pi i}{2!}+\frac{(z-2\pi i)^{2}}{3!}+\cdots$$

Η φ είναι ολόμορφη στο $\mathbb{C}$ γιατί αναπτύσσεται σε δυναμοσειρά στο $\mathbb{C}$ και

$$\varphi(2\pi i)=1,\quad \varphi'(2\pi i)=\frac{1}{2!}=\frac{1}{2}.$$

Επιπλέον, $\forall z\in\mathbb{C}$,

$$e^{z}-1=e^{z+4\pi i}-1\overset{(3)}{=}(z+2\pi i)\,\underbrace{\varphi(z+4\pi i)}_{\psi(z)},$$

η ψ είναι ολόμορφη στο $\mathbb{C}$ κ'

$$\psi(-2\pi i)=\varphi(2\pi i)=1,$$

$$\psi'(-2\pi i)=\varphi'(2\pi i)=1/2.$$

$\underline{(ii)}$ Τα ανώμαλα σημεία της $f(z)=\frac{z}{(e^{z}-1)^{2}}$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης $e^{z}=1$, δηλ.

$$0,\ \pm 2\pi i,\ \pm 4\pi i,\ \pm 6\pi i,\ \ldots$$

Από αυτές, μόνο οι $0, \quad \pm 2\pi i \in \text{int}\gamma^*$.

Επομένως,

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \left[\text{Res}(f,0) + \text{Res}(f, 2\pi i) + \text{Res}(f, -2\pi i) \right].$$

• <u>$\text{Res}(f,0)$</u>. Παρατηρούμε ότι

$$\lim_{z\to 0} [z f(z)] = \lim_{z\to 0} \left(\frac{z}{e^z-1}\right)^2 = 1^2 = 1 \neq 0$$

$\Rightarrow$ το 0 είναι απλός πόλος της f κ'

$$\boxed{\text{Res}(f,0) = 1}$$

• <u>$\text{Res}(f, 2\pi i)$</u>. Λόγω του ερωτ. (i), έχουμε ότι

$$\lim_{z\to 2\pi i} \left[(z-2\pi i)^2 f(z) \right] = \lim_{z\to 2\pi i} \frac{z}{\varphi(z)^2} = 2\pi i \neq 0$$

$\Rightarrow$ το $2\pi i$ είναι διπλός πόλος της f κ'

$$\text{Res}(f, 2\pi i) = \lim_{z\to 2\pi i} \left[(z-2\pi i)^2 f(z) \right]' =$$

$$= \left[\frac{z}{\varphi(z)^2} \right]' \Bigg|_{z=2\pi i} = \frac{\varphi(z)^2 - 2z\varphi(z)\varphi'(z)}{\varphi(z)^4} \Bigg|_{z=2\pi i} =$$

$$= \frac{\varphi(2\pi i) - 2\cdot 2\pi i\, \varphi'(2\pi i)}{\varphi(2\pi i)^3}$$

$$= \frac{1 - 2\cdot 2\pi i\cdot 1/2}{1^3} = \boxed{1-2\pi i}.$$

- $\underline{Res(f, -2\pi i)}$. Όμοια κ' παίζει λόγω του ερωτ-(i), το $-2\pi i$ είναι διπλός πόλος της f κ'

$$Res(f, -2\pi i) = \frac{\psi(-2\pi i) - 2(-2\pi i)\,\psi'(-2\pi i)}{\psi(-2\pi i)^3}$$

$$= \boxed{1+2\pi i}.$$

Τελικά, $\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i(1 + 1 - 2\pi i + 1 + 2\pi i)$

$$= \boxed{6\pi i}.$$

Θ.4: Το ζητούμενο ολοκλήρωμα ισούται με

$$\mathrm{Re}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx\right],$$

όπου $f(z) = \dfrac{z^4}{1+z^6} e^{iz}$.

Επειδή $\deg(1+z^6) - \deg(z^4) = 2 > 1$

κ' $1+z^6 \neq 0, \ \forall z \in \mathbb{R}$, για τον υπολογισμό

του $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ θα χρειαστούμε τις ρίζες του

$1+z^6$ με θετικό φανταστικό μέρος.

Όλες οι ρίζες είναι $\pm i, \pm a, \pm \bar{a}$

κ' από αυτές, μόνο οι $i, a, -\bar{a}$ έχουν θετικό φανταστικό μέρος $\left(a = \dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)$.

Άρα,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi i\left[\mathrm{Res}(f,i) + \mathrm{Res}(f,a) + \mathrm{Res}(f,-\bar{a})\right].$$

$\forall \rho \in \{i, a, -\bar{a}\}$,

$$\mathrm{Res}(f,\rho) = \left.\frac{z^4 e^{iz}}{(1+z^6)'}\right|_{z=\rho} = \frac{e^{i\rho}}{6\rho} = \frac{\bar{\rho}e^{i\rho}}{6}$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \frac{2\pi i}{6}\left(\bar{i}\,e^{-1} + \bar{\alpha}e^{i\alpha} - \alpha e^{-i\bar{\alpha}}\right)$$

$$= \frac{\pi i}{3}\left(-\frac{i}{e} + \bar{a}e^{ia} - \overline{\bar{a}e^{ia}}\right)$$

$$= \frac{\pi i}{3}\left[-\frac{i}{e} + 2i\,\mathrm{Im}(\bar{a}e^{ia})\right]$$

$$= \frac{\pi i}{3}(-i)\left[\frac{1}{e} - 2\,\mathrm{Im}(\bar{a}e^{ia})\right]$$

$$= \frac{\pi}{3}\left[\frac{1}{e} - 2\,\mathrm{Im}(\bar{a}e^{ia})\right]$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^4\cos x}{1+x^6}\,dx = \mathrm{Re}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx\right]$$

$$= \frac{\pi}{3}\left[1/e - 2\,\mathrm{Im}(\bar{a}e^{ia})\right].$$

Θ.5: Έστω $z \in D$. Επιλέγουμε r ώστε

$$\max(1, |z|) < r < 2. \qquad (4)$$

επειδή f ολόμορφη στο D που "περιέχει" το κλειστό κ' φραγμένο πεδίο

$$D_r = \{ w \in \mathbb{C} : |w| \le r \},$$

από την Αρχή του Μεγίστου έχουμε

$$\max_{|w| \le r} |f(w)| = \max_{|w| = r} |f(w)| \overset{[\text{υπόθεση}]}{\le} \frac{1}{r-1}$$

$$\Rightarrow \quad |f(z)| \le \frac{1}{r-1}.$$

Η τελευταία ισχύει $\forall r$ που ικανοποιεί την (4), οπότε, παίρνοντας το όριο καθώς $r \to 2^-$, προκύπτει ότι

$$|f(z)| \le 1.$$

Η τελευταία όμως ισχύει $\forall z \in D$, άρα

$$\sup_{|z|<2} |f(z)| \le 1.$$

Ειδικότερα, $|f(0)| \le 1$.

Εάν $|f(0)| = 1$, τότε

$\forall z \in D$, $|f(z)| \leq 1 = |f(0)|$

δηλ. $\max_{z \in D} |f(z)| = |f(0)|$

$\Rightarrow$ η $|f|$ λαμβάνει μέγιστο στο $D =$

$=$ ανοικτό, συνεκτικό

[Αρχή Μεγίστου] $\Rightarrow$ $f =$ σταθερή (Άτοπο).

Άρα, $|f(0)| < 1$.

Σχόλιο στο α' σκέλος του Θ.5:

Πολλοί γράφουν ότι $\forall r \in (1,2)$,

$$\max_{|z|\le r} |f(z)| \overset{(A.M.)}{=} \max_{|z|=r} |f(z)| \le \frac{1}{r-1} \quad \text{(σωστό!)}$$

αλλά στη συνέχεια, παίρνοντας όριο καθώς $r \to 2$, γράφουν ότι το α' μέλος της παραπάνω γίνεται

$$\sup\{|f(z)| : |z| < 2\}.$$

Αυτό δεν προκύπτει άμεσα, χρειάζεται απόδειξη!

Ουσιαστικά, η παραπάνω διαδικασία δεν αποδεικνύει σχεδόν τίποτα.