''ΜΙΓΑΔΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ'' - ''ΜΙΓΑΔΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ''
ΣΕΜΦΕ, ΣΗΜΜΥ & ΠΟΛΙΤ. ΜΗΧΑΝ. - Ε.Μ.Π.
19/06/2019

Θέμα 1: (α)(1,5 μ.) Εάν $u(x,y) = x^2 - y^2 + e^{-y}\sin x - e^{y}\cos x,\ x,y \in \mathbb{R}$, να βρείτε ολόμορφη συνάρτηση $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ώστε $u = \mathrm{Re}(f)$ και $f(0) = -1$.

(β) Έστω $A \subseteq \mathbb{C}$ πεδίο και $f : A \to \mathbb{C}$ ολόμορφη συνάρτηση.

(**(i) (0,5 μ.)** Εάν $\overline{f}$ ολόμορφη, να δείξετε ότι η f είναι σταθερή.

(ii)(0,5 μ.) Εάν η $|f|$ είναι σταθερή, να δείξετε ότι η f είναι σταθερή.

(iii)(0,5 μ.) Εάν $f(z)f'(z) = 0,\ \forall z \in A$, να δείξετε ότι η f είναι σταθερή.

Θέμα 2:(1 μ.) Αναπτύξτε σε σειρά Laurent τη συνάρτηση $f(z) = \dfrac{1}{z-2} + \dfrac{1}{z-3}$ γύρω από το 0, στο δακτύλιο $2 < |z| < 3$.

Θέμα 3:(1 μ.) Θέτουμε $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, $\partial D = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ και θεωρούμε *μη σταθερή συνεχή* συνάρτηση $f : \overline{D} = D \cup \partial D \to \mathbb{C}$ που είναι *ολόμορφη* στο D. Εάν $|f(z)| = 1,\ \forall z \in \partial D$, να δείξετε ότι η f έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο D.
(*Υπόδειξη:* Αρχή Ελαχίστου.)

Θέμα 4:(1,5 μ.) Να δείξετε ότι

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin x}{1+x^6}dx = \frac{\pi}{3}[\ e^{-1} - 2\mathrm{Re}(a^2 e^{ia})\ ], \quad \text{όπου } a = e^{i\pi/6} = \frac{\sqrt{3}+i}{2}\ .$$

Θέμα 5: Εάν $\gamma_R(t) = Re^{it},\ t \in [0, 2\pi],\ \pi < R < 2\pi$, να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα

$$\int_{\gamma_R} \frac{e^{\pi z}}{z^2 - z}dz\ (\mathbf{0,5}\text{μ.}) \qquad \int_{\gamma_R} \frac{1-\cos z}{z^3 \sin z}dz\ (\mathbf{1,5}\text{μ.})$$

Θέμα 6: Έστω f ολόμορφη στον ανοικτό δίσκο $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ που ικανοποιεί

$$|f(z)| \leq e^{-1/|z|}, \quad \forall z \in D \setminus \{0\}.$$

Να δείξετε ότι:

(α)(1 μ.) $|f^{(n)}(0)| \leq n!\dfrac{e^{-1/r}}{r^n}, \quad \forall r \in (0,1),\ \forall\ n \in \mathbb{N}$. (*Υπόδειξη:* Ολοκλ. Τύποι Cauchy για παραγώγους.)

(β)(0,5 μ.) $f(z) = 0, \quad \forall z \in D$.

ΛΥΣΕΙΣ

Θέμα 1: (α) Έστω $f = u + iv$ η ζητούμενη συνάρτηση. Οι συνθήκες Cauchy-Riemann δίνουν

$$v_y = u_x = 2x \ + \ e^{-y}\cos x \ + \ e^{y}\sin x \tag{1}$$

και

$$v_x = -u_y = 2y \ + \ e^{-y}\sin x \ + \ e^{y}\cos x. \tag{2}$$

Ολοκληρώνοντας την (1) ως προς y παίρνουμε

$$v = 2xy \ - \ e^{-y}\cos x \ + \ e^{y}\sin x \ + \ c(x). \tag{3}$$

Παραγωγίζοντας την (3) ως προς x παίρνουμε

$$v_x = 2y \ + \ e^{-y}\sin x \ + \ e^{y}\cos x \ + \ c'(x),$$

οπότε, λόγω της (2), $c'(x) = 0$, δηλ. $c(x) = c$.
Η (3) τώρα γράφεται

$$v = 2xy \ - \ e^{-y}\cos x \ + \ e^{y}\sin x \ + \ c.$$

Έχουμε $-1 = f(0) = u(0,0) + iv(0,0) = -1 + i(c-1) \ \Rightarrow \ c = 1$.
Άρα, η ζητούμενη συνάρτηση είναι η

$$f(x+iy) = x^2 - y^2 \ + \ e^{-y}\sin x \ - \ e^{y}\cos x \ + \ i(\ 2xy \ - \ e^{-y}\cos x \ + \ e^{y}\sin x \ + \ 1\ ).$$

(β) (i) Έστω $f = u + iv$. Τότε, $\overline{f} = u \ - \ iv$. Οι συνθήκες Cauchy-Riemann για τις f, $\overline{f}$ δίνουν αντίστοιχα

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x, \quad (x,y) \in A,$$

$$u_x = -v_y, \quad u_y = v_x, \quad (x,y) \in A.$$

Έπεται ότι $u_x = v_x = 0$ και άρα $f' = u_x + iv_x = 0$, στο A. Συνεπώς, f σταθερή στο A.

(β) (ii) Έστω $|f| = c$.
–Εάν $c = 0$, τότε $f(z) = 0$, $\forall z \in A$ και άρα f σταθερή.

–Έστω $c \neq 0$. Τότε $\forall z \in A$,

$$f(z)\overline{f(z)} = |f(z)|^2 = c^2 \;\Rightarrow\; \overline{f(z)} = \frac{c^2}{f(z)},$$

οπότε $\overline{f}$ ολόμορφη στο A. Από το ερώτ.(i) έπεται ότι f σταθερή.

(β) (iii) Θέτουμε $g = f^2$. Προφανώς, η g είναι ολόμορφη στο A κι επιπλέον

$$g'(z) = 2f(z)f'(z) = 0, \quad \forall z \in A.$$

Έπεται ότι $g = c \in \mathbb{C}$. Τότε όμως,

$$|f|^2 = |g| = |c| \;\Rightarrow\; |f| = \sqrt{|c|} = \text{σταθερή στο } A.$$

Από το ερώτ. (ii) έπεται ότι f σταθερή στο A.

Θέμα 2: Για $|z| < 3$, θέτουμε

$$w = \frac{z}{3} \;\Rightarrow\; z = 3w, \quad |w| < 1,$$

οπότε

$$\frac{1}{z-3} = -\frac{1}{3}\frac{1}{1-w} = -\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty} w^n = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^{n+1}}\,.$$

Για $|z| > 2$, θέτουμε

$$w = \frac{2}{z} \;\Rightarrow\; z = \frac{2}{w}, \quad |w| < 1,$$

οπότε

$$\frac{1}{z-2} = \frac{w}{2}\cdot\frac{1}{1-w} = \frac{w}{2}\sum_{n=0}^{\infty} w^n = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} w^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^{n+1}}.$$

Άρα, για $2 < |z| < 3$,

$$f(z) = \frac{1}{z-2} + \frac{1}{z-3} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^{n+1}}\,.$$

Θέμα 3: Υποθέτουμε αντιθέτως ότι $f(z) \neq 0,\ \forall z \in D$. Από την Αρχή του Ελαχίστου παίρνουμε ότι
$$\min_{|z|\leq 1} |f(z)| = \min_{|z|=1} |f(z)| = 1.$$
Επιπλέον, από την Αρχή του Μεγίστου παίρνουμε ότι
$$\max_{|z|\leq 1} |f(z)| = \max_{|z|=1} |f(z)| = 1.$$
Έπεται ότι
$$\min_{|z|\leq 1} |f(z)| = \max_{|z|\leq 1} |f(z)| = 1,$$
οπότε $|f| = 1$ στο D και συνεπώς f σταθερή στο D. Επειδή η f είναι συνεχής στο $\overline{D}$, προκύπτει ότι f σταθερή στο $\overline{D}$ (ΑΤΟΠΟ!).

Άρα, η f έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο D.

Θέμα 4: Επειδή $a^6 = e^{i\pi} = -1,\ \ i^6 = -1,$ οι ρίζες της εξίσωσης $z^6 + 1 = 0$ είναι οι
$$\pm a, \quad \pm\overline{a}, \quad \pm i.$$
[Σημ. ότι το πολυώνυμο $P(z) = z^6 + 1$ έχει πραγματικούς συντελεστές και είναι άρτια συνάρτηση του z. Συνεπώς, αν z_0 ρίζα του $P(z)$ τότε και οι $\pm z_0,\ \pm\overline{z_0}$ είναι ρίζες του $P(z)$.]

Από τις παραπάνω ρίζες, μόνο οι
$$a, \quad b = -\overline{a}, \quad i$$
έχουν θετικό φανταστικό μέρος. Επομένως,
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xe^{ix}}{1+x^6}dx = 2\pi i[\ Res(f,a)\ +\ Res(f,b)\ +\ Res(f,i)\ ], \quad \text{όπου} \quad f(z) = \frac{ze^{iz}}{z^6+1}\ .$$
Για κάθε $\rho \in \{a,\ b,\ i\}$, έχουμε
$$Res(f,\rho) = \frac{\rho e^{i\rho}}{6\rho^5} = \frac{e^{i\rho}}{6\rho^4} = \frac{\rho^2 e^{i\rho}}{6\rho^6} = -\frac{\rho^2 e^{i\rho}}{6}\ ,$$
οπότε
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xe^{ix}}{1+x^6}dx = -\frac{2\pi i}{6}(a^2e^{ia}+b^2e^{ib}+i^2e^{i^2}) = -\frac{\pi i}{3}(a^2e^{ia}+\overline{a^2e^{ia}} - e^{-1}) = \frac{\pi i}{3}[\ e^{-1} - 2\mathrm{Re}(a^2e^{ia})\ ].$$
Εξισώνοντας στην παραπάνω τα φανταστικά μέρη κι επειδή $e^{ix} = \cos x + i\sin x,\ x \in \mathbb{R}$, παίρνουμε την αποδεικτέα.

Θέμα 5:

- Τα ανώμαλα σημεία της συνάρτησης $f(z) = \dfrac{e^{\pi z}}{z^2 - z}$ είναι $0,\ 1\ \in\ \text{int}\gamma_R^*$ οπότε

$$\int_{\gamma_R} f(z)dz = 2\pi i[\ Res(f,0) + Res(f,1)\ ] = 2\pi i \left[\frac{e^{\pi z}}{2z-1}\,|_{z=0} + \frac{e^{\pi z}}{2z-1}\,|_{z=1} \right] = 2\pi i(\ -1 + e^{\pi}\ ).$$

- Τα ανώμαλα σημεία της συνάρτησης $g(z) = \dfrac{1-\cos z}{z^3 \sin z}$ είναι

$$0,\ \ \pm\pi,\ \ \pm 2\pi,\ \ \pm 3\pi, \ldots .$$

Επειδή $\pi < R < 2\pi$, μόνο τα 0, $\pm\pi$ περιέχονται στο εσωτερικό του κύκλου γ_R, οπότε

$$\int_{\gamma_R} g(z)dz = 2\pi i[\ Res(g,0)\ +\ Res(g,\pi)\ +\ Res(g,-\pi)\ ].$$

Επειδή τα $\pm\pi$ είναι απλές ρίζες του $\sin z$ και δεν είναι ρίζες της $\dfrac{1-\cos z}{z^3}$, παίρνουμε ότι

$$Res(g,\pm\pi) = \frac{\dfrac{1-\cos z}{z^3}}{(\sin z)'}\,|_{z=\pm\pi} = \frac{\dfrac{1-\cos z}{z^3}}{\cos z}\,|_{z=\pm\pi} = \mp\frac{2}{\pi^3}\ .$$

Επομένως, $Res(g,\pi)\ +\ Res(g,-\pi) = 0.$

Απομένει να υπολογίσουμε το $Res(g,0)$.

$\forall z \in \mathbb{C}$ έχουμε

$$1\ -\ \cos z = z^2\varphi(z), \quad z^3 \sin z = z^4\psi(z),$$

όπου

$$\varphi(z) = \frac{1}{2!}\ -\ \frac{z^2}{4!}\ +\ \frac{z^4}{6!}\ -\ \frac{z^6}{8!} + \ldots$$

και

$$\psi(z) = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \frac{z^6}{7!} + \dots .$$

Από τα παραπάνω αναπτύγματα προκύπτει άμεσα ότι

$$\varphi(0) = \frac{1}{2!}, \quad \psi(0) = 1, \quad \varphi'(0) = \psi'(0) = 0.$$

Επειδή $\psi(0) = 1 \neq 0$, η συνάρτηση $h = \varphi/\psi$ είναι ολόμορφη σε κάποια περιοχή U του 0 και ισχύει

$$h(0) = \frac{1}{2!} \neq 0, \qquad g(z) = \frac{z^2\varphi(z)}{z^4\psi(z)} = \frac{h(z)}{z^2}\ , \quad \forall z \in U.$$

Επομένως, το 0 είναι πόλος της g τάξης 2 και άρα

$$Res(g,0) = \lim_{z\to 0}[\ z^2 g(z)\ ]' = h'(0) = \frac{\varphi'(0)\psi(0)\ -\ \varphi(0)\psi'(0)}{[\ \psi(0)\ ]^2} = 0.$$

Τελικά, $\displaystyle\int_{\gamma_R} g(z)dz = 2\pi i \cdot 0 = 0.$

Θέμα 6: (α) Σταθεροποιούμε ένα $r \in (0,1)$ και θεωρούμε τον κύκλο $\gamma_r(t) = re^{it},\ \ t \in [0,2\pi]$. Προφανώς ο κύκλος αυτός περιέχεται μέσα στον ανοικτό δίσκο D. Από Ολοκλ. τύπους Cauchy για παραγώγους παίρνουμε

$$f^{(n)}(0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{z^{n+1}}dz, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Για όλα τα $z\ \in \gamma_r^*$, $n \in \mathbb{N}$ έχουμε (λόγω της υπόθεσης)

$$\left|\frac{f(z)}{z^{n+1}}\right| \ \leq\ \frac{e^{-1/|z|}}{|z|^{n+1}} = \frac{e^{-1/r}}{r^{n+1}}\ ,$$

οπότε η $ML-$ ανισότητα δίνει

$$|f^{(n)}(0)|\ \leq\ \frac{n!}{2\pi}\cdot 2\pi r \cdot \frac{e^{-1/r}}{r^{n+1}} = n!\frac{e^{-1/r}}{r^n}\ .$$

(β) Σταθεροποιούμε ένα $n \in \mathbb{N}$. Με την αντικατάσταση $t = 1/r$ παίρνουμε ότι

$$\lim_{r \to 0^+} \frac{e^{-1/r}}{r^n} = \lim_{t \to +\infty} \frac{t^n}{e^t} = 0.$$

[Πράγματι, $\forall t > 0,\ \ e^t = 1 \ + \ t/1! \ + \ t^2/2! \ + \ \ldots \ + \ t^{n+1}/(n+1)! + \ldots \Rightarrow$

$\Rightarrow e^t \ > \ t^{n+1}/(n+1)! \ \Rightarrow \ t^n/e^t \ < \ (n+1)!/t \to 0$ καθώς $t \to +\infty$.]

Παίρνοντας το όριο καθώς $r \to 0^+$ και στα δύο μέλη της ανισότητας του ερωτ.(α), προκύπτει ότι $f^{(n)}(0) = 0$, για τυχαίο $n \in \mathbb{N}$. Τώρα όμως το Θεώρημα Taylor δίνει

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n = 0, \quad \forall z \in D.$$