''ΜΙΓΑΔΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ'' -ΣΕΜΦΕ -Ε.Μ.Π.
18/06/2018

Θέμα 1: (α)(1,5 μ.) Δίνεται η συνάρτηση $u(x,y) = -e^{-x}\sin y \ + \ \dfrac{y^2-x^2}{2}$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Να βρείτε ολόμορφη συνάρτηση $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ με $u = \text{Real}f$ και $f(0)=-i$.

(β)(0,5 μ.) Να βρείτε τα σημεία $z\in\mathbb{C}$ στα οποία η συνάρτηση $\text{Log}\left(\dfrac{z-i}{z+i}\right)$ είναι διαφορίσιμη.

Θέμα 2:(1,5 μ.) Αναπτύξτε σε σειρά Laurent τη συνάρτηση $f(z)=\dfrac{1}{z}+\dfrac{2}{3-z}$ γύρω από το 1, στο δακτύλιο $1<|z-1|<2$.

Θέμα 3:(1,5 μ.) Έστω $a\in\mathbb{C}$, με $|a|\le 1$. Θέτουμε

$$P(z)=\frac{a}{2}\ +\ (1\ -\ |a|^2)z\ -\ \frac{\overline{a}}{2}z^2,\quad z\in\mathbb{C}.$$

Να δείξετε ότι

$$\max_{|z|\le 1}|P(z)|=\max_{|z|=1}\left|\frac{P(z)}{z}\right|\ \le\ 1.$$

Θέμα 4:(1 μ.) Να δείξετε ότι

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x}{1+x^4}dx=\pi\text{Im}(ae^{ia}),\quad \text{όπου}\ \ a=\frac{1+i}{\sqrt{2}}.$$

Θέμα 5: (α)(0,5 μ.) Έστω g ολόμορφη πάνω σε μια περιοχή του 0 με $g(0)\neq 0$. Να δείξετε ότι

$$Res\left(\frac{1}{z^3g(z)},\,0\right)=\frac{2[g'(0)]^2\ -\ g''(0)g(0)}{2[g(0)]^3}\ .$$

(β)(1 μ.) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$\int_\gamma \frac{dz}{z(e^z-1)\sin z}\ ,\quad \text{όπου}\ \ \gamma(t)=e^{it},\quad t\in[0,2\pi].$$

Θέμα 6:(α) (1 μ.) Έστω $\varphi:[a,b]\to\mathbb{C}$ συνεχής ($a,b\in\mathbb{R},\ a<b$). Να δείξετε ότι

$$\left|\int_a^b\varphi(t)dt\right|\ \le\ \int_a^b|\varphi(t)|dt.$$

(β) (0,5 μ.) Να δείξετε ότι $\displaystyle\lim_{R\to+\infty}\int_{\sigma_R}e^{iz^2}dz=0$, όπου $\sigma_R(t)=R+it,\ \ t\in[0,R]$.

(γ) (1 μ.) Εφαρμόζοντας κατάλληλα το θεώρημα Cauchy, να δείξετε ότι

$$\int_0^{+\infty}\cos(x^2)dx=\int_0^{+\infty}\sin(x^2)dx=\int_0^{+\infty}e^{-2x^2}dx.$$

ΛΥΣΕΙΣ

Θέμα 1: (α) Έστω $f = u + iv$ η ζητούμενη συνάρτηση. Οι συνθήκες Cauchy-Riemann δίνουν

$$v_y = u_x = e^{-x}\sin y \; - \; x \tag{1}$$

και

$$v_x = -u_y = e^{-x}\cos y \; - \; y. \tag{2}$$

Ολοκληρώνοντας την (1) ως προς y παίρνουμε

$$v = -e^{-x}\cos y - xy \; + \; c(x). \tag{3}$$

Παραγωγίζοντας την (3) ως προς x παίρνουμε

$$v_x = e^{-x}\cos y \; - \; y \; + \; c'(x),$$

οπότε, λόγω της (2), $c'(x) = 0$, δηλ. $c(x) = c$.
Η (3) τώρα γράφεται

$$v = -e^{-x}\cos y \; - \; xy \; + \; c.$$

Έχουμε $-i = f(0) = u(0,0) + iv(0,0) = i(c-1) \;\; \Rightarrow \; c = 0$.
Άρα, η ζητούμενη ακέραια συνάρτηση είναι η

$$f(x+iy) = -e^{-x}\sin y \; + \; \frac{y^2 - x^2}{2} \; + \; i(\, -e^{-x}\cos y \; - \; xy \,).$$

(β) Η συνάρτηση **δεν** είναι διαφορίσιμη στα σημεία $z \in \mathbb{C}$ με

$$Re\left(\frac{z-i}{z+i}\right) \leq 0, \quad Im\left(\frac{z-i}{z+i}\right) = 0.$$

Έχουμε

$$\frac{z-i}{z+i} = \frac{(z-i)(\overline{z}-i)}{|z+i|^2} = \frac{(|z|^2 - 1) - 2iRe(z)}{|z+i|^2}\;.$$

Άρα, η συνάρτηση είναι διαφορίσιμη στο

$$\mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1, \;\; Re(z) = 0\} = \mathbb{C} \setminus \{iy : y \in [-1,1]\}.$$

Θέμα 2: Για $|z-1|<2$, θέτουμε

$$w=\frac{z-1}{2} \;\Rightarrow\; z=1+2w, \quad |w|\;<\;1,$$

οπότε

$$\frac{1}{3-z}=\frac{1}{2}\frac{1}{1-w}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}w^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-1)^n}{2^{n+1}}\;.$$

Για $|z-1|>1$, θέτουμε

$$w=\frac{1}{z-1} \;\Rightarrow\; z=1+\frac{1}{w}, \quad |w|\;<\;1,$$

οπότε

$$\frac{1}{z}=\frac{w}{1+w}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n w^{n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(z-1)^{n+1}}\;.$$

Άρα, για $1<|z-1|<2$,

$$f(z)=\frac{1}{z}\;+\;\frac{2}{3-z}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(z-1)^{n+1}}\;+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-1)^n}{2^n}\;.$$

Θέμα 3: Για $|z|=1$ έχουμε $1/z=\overline{z}$ και

$$\begin{aligned}\frac{P(z)}{z} &= \frac{a}{2z}\;+\;1\;-\;|a|^2\;-\;\frac{\overline{a}}{2}z=(1-|a|^2)\;+\;\frac{1}{2}(a\overline{z}\;-\;\overline{a}z)\\ &= (1-|a|^2)\;+\;\frac{1}{2}(a\overline{z}\;-\;\overline{a\overline{z}}\;)=(1-|a|^2)\;+\;iIm(a\overline{z})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow\;\left|\frac{P(z)}{z}\right|^2 &= (1-|a|^2)^2\;+\;|Im(a\overline{z})|^2\;\leq\;(1-|a|^2)^2\;+\;|a\overline{z}|^2\\ &= 1\;+\;|a|^4\;-\;2|a|^2\;+\;|a|^2=1\;+\;|a|^2(|a|^2\;-\;1)\;\leq\;1.\end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$\max_{|z|=1}\left|\frac{P(z)}{z}\right|\;\leq\;1.$$

Από την Αρχή του Μεγίστου τώρα παίρνουμε

$$\max_{|z|\le 1}|P(z)| \;=\; \max_{|z|=1}|P(z)| = \max_{|z|=1}\left|\frac{P(z)}{z}\right| \;\le\; 1.$$

Θέμα 4: Οι αριθμοί

$$a, \quad -a, \quad \overline{a}, \quad -\overline{a},$$

είναι οι ρίζες της εξίσωσης $z^4+1=0$. Από αυτές, μόνο οι

$$a=\frac{1+i}{\sqrt{2}}, \quad b=-\overline{a}=\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$$

έχουν θετικό φανταστικό μέρος. Επομένως,

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ix}}{1+x^4}dx = 2\pi i[\,Res(f,a)\;+\;Res(f,b)\,], \quad \text{όπου} \quad f(z)=\frac{e^{iz}}{z^4+1}\;.$$

Για κάθε $\rho\in\{a,\,b\}$, έχουμε

$$Res(f,\rho)=\frac{e^{i\rho}}{4\rho^3}=\frac{\rho e^{i\rho}}{4\rho^4}=-\frac{\rho e^{i\rho}}{4}\;,$$

οπότε

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ix}}{1+x^4}dx=-\frac{2\pi i}{4}(ae^{ia}+be^{ib})=-\frac{\pi i}{2}(ae^{ia}\;-\overline{ae^{ia}})=\pi Im(ae^{ia}).$$

Εξισώνοντας στην παραπάνω τα πραγματικά μέρη κι επειδή $e^{ix}=\cos x+i\sin x$, παίρνουμε την αποδεικτέα.

Θέμα 5: (α) Επειδή $g(0)\neq 0$, υπάρχει περιοχή U του 0 ώστε $1/g\in\mathcal{H}(U)$.
Θέτουμε

$$f(z)=\frac{1}{z^3g(z)}, \quad z\in U.$$

Έχουμε

$$\lim_{z\to 0}[\,z^3\cdot f(z)\,]=\lim_{z\to 0}\frac{1}{g(z)}=\frac{1}{g(0)}\;\neq 0 \quad\Rightarrow\quad 0=\text{πόλος τάξης}\;\;3\;\;\text{της}\;\;f.$$

Άρα

$$Res(f,0)=\frac{1}{2!}\lim_{z\to 0}\left[\frac{1}{g(z)}\right]''=\ldots=\frac{2[g'(0)]^2\;-\;g''(0)g(0)}{2[g(0)]^3}\;.$$

(β) $\forall z \in \mathbb{C}$,

$$z(e^z - 1)\sin z = z\left(z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots\right)\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots\right) = z^3 g(z),$$

όπου

$$\begin{aligned} g(z) &= \left(1 + \frac{z}{2!} + \frac{z^2}{3!} + \dots\right)\cdot\left(1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \dots\right) \\ &= 1 + \frac{1}{2!}z + 0z^2 + \dots, \quad z \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Η g είναι ολόμορφη στο $\mathbb{C}$ και

$$g(0) = 1, \quad \frac{g'(0)}{1!} = \frac{1}{2!} \Rightarrow g'(0) = \frac{1}{2}, \quad \frac{g''(0)}{2!} = 0 \Rightarrow g''(0) = 0.$$

Τα ανώμαλα σημεία της

$$\frac{1}{z(e^z-1)\sin z} = \frac{1}{z^3 g(z)} = f(z)$$

είναι: $0,\ 2k\pi i,\ k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. Από αυτά, μόνο το 0 περιέχεται στο εσωτερικό της γ^*. Άρα,

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i Res(f, 0).$$

Από το ερώτημα (α) προκύπτει ότι

$$Res(f, 0) = \frac{2[g'(0)]^2 - g''(0)g(0)}{2[g(0)]^3} = 1/4\ ,$$

οπότε

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i/4 = \pi i/2\ .$$

Θέμα 6: (α) Θέτουμε $z = \int_a^b \varphi(t)dt$.

–Εάν $z = 0$, η αποδεικτέα προφανώς ισχύει.

–Έστω ότι $z \neq 0$. Εάν $\theta = Arg(z)$, τότε

$$\begin{aligned} |z| &= ze^{-i\theta} = \int_a^b e^{-i\theta}\varphi(t)dt = Re\left(\int_a^b e^{-i\theta}\varphi(t)dt\right) \\ &= \int_a^b Re\left(e^{-i\theta}\varphi(t)\right)dt \ \leq \ \int_a^b |e^{-i\theta}\varphi(t)|dt = \int_a^b |e^{-i\theta}|\cdot|\varphi(t)|dt = \int_a^b |\varphi(t)|dt, \end{aligned}$$

που είναι και η αποδεικτέα.

(β) Για $z = \sigma_R(t) = R + it$ έχουμε

$$z^2 = R^2 - t^2 + 2iRt, \quad e^{iz^2} = e^{-2Rt} \cdot e^{i(R^2-t^2)},$$

οπότε

$$\begin{aligned}\left|\int_{\sigma_R} e^{iz^2}dz\right| &= \left|i\int_0^R e^{-2Rt} \cdot e^{i(R^2-t^2)}dt\right| \leq \int_0^R |e^{-2Rt} \cdot e^{i(R^2-t^2)}|dt \\ &= \int_0^R e^{-2Rt}dt = \frac{1}{2R}\left(1 \, - \, e^{-2R^2}\right) \overset{R\to+\infty}{\longrightarrow} 0.\end{aligned}$$

(γ) Για $R > 0$, θεωρούμε την κλειστή τμ. λεία καμπύλη

$$\Gamma_R = [0, R] \, + \, \sigma_R \, - \, \gamma_R, \quad \gamma_R(t) = t + it, \;\; t \in [0, R]$$

(δηλ. το θετικά προσανατολισμένο σύνορο του τριγώνου με κορυφές τα σημεία $(0,0)$, $(R,0)$, (R,R).) Από το θεώρημα Cauchy έχουμε

$$0 = \int_{\Gamma_R} e^{iz^2}dz = \int_0^R e^{it^2}dt \, + \int_{\sigma_R} e^{iz^2}dz \, - \int_{\gamma_R} e^{iz^2}dz$$

ή

$$\int_0^R e^{it^2}dt \, + \int_{\sigma_R} e^{iz^2}dz \, = \int_{\gamma_R} e^{iz^2}dz.$$

Για $z = \gamma_R(t) = t + it$, $t \in [0, R]$, ισχύει

$$iz^2 = it^2(1+i)^2 = -2t^2,$$

οπότε

$$\int_0^R e^{it^2}dt \, + \int_{\sigma_R} e^{iz^2}dz = (1+i)\int_0^R e^{-2t^2}dt.$$

Για $R \to +\infty$ και λόγω του ερωτ. (β) προκύπτει ότι

$$\int_0^{+\infty} e^{it^2}dt = (1+i)\int_0^{+\infty} e^{-2t^2}dt.$$

Εξισώνοντας πραγματικά και φανταστικά μέρη κι επειδή $e^{it^2} = \cos(t^2) + i\sin(t^2)$, $\forall t \in \mathbb{R}$, προκύπτει η αποδεικτέα.