ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ ΜΙΓΑΔΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ -ΣΗΜΜΥ
29/6/2021
ΔΙΑΡΚΕΙΑ: 90′

ΘΕΜΑ 1: (i)(1,5 μ.) Δίνεται η συνάρτηση $u(x,y) = x^3 - 3x^2y - 3xy^2 + y^3, \quad x, y \in \mathbb{R}$. Να βρείτε ολόμορφη συνάρτηση $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ώστε $\mathrm{Re} f = u, \quad f(0) = i$.

(ii)(1 μ.) Να προσδιορίσετε τα σημεία $z \in \mathbb{C}$ στα οποία η συνάρτηση $f(z) = \mathrm{Log}\left(\mathrm{Log} z - i\dfrac{\pi}{2}\right)$ είναι διαφορίσιμη.

ΘΕΜΑ 2:(1,5 μ.) Να βρείτε το $\max\limits_{|z|\leq 1} |z^2 + 3z - 1|$, καθώς και τα σημεία για τα οποία το μέγιστο αυτό λαμβάνεται.

ΘΕΜΑ 3: (4 μ.) Με αποκλειστική χρήση Μιγαδικής Ανάλυσης, να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3 \sin x}{x^4 + 16} dx \ (2 \text{ μ.}), \qquad \int_{\gamma} \frac{(e^z - 1)^2}{z^3 \sin z} dz \ (2 \text{ μ.}),$$

όπου $\gamma(t) = 2e^{it}, \ t \in [0, 2\pi]$. [Για το πρώτο ολοκλήρωμα παρατηρήστε ότι $(e^{i\pi/4})^4 = -1$.]

ΘΕΜΑ 4: (2 μ.) Έστω $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ολόμορφη τέτοια ώστε

$$|f(nz)| \ \leq \ n|f(z)|, \quad \forall\, z \in \mathbb{C}, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Να δείξετε ότι η f είναι πολυώνυμο βαθμού το πολύ 1.
[*Υπόδειξη*: Να δείξετε ότι $f''(z) = 0, \ \forall\, z \in \mathbb{C}$.]

Π.1 (i) Έστω $f=u+iv$ η ζητούμενη. ①

Τότε, $v_y \overset{[C-R]}{=} u_x = 3x^2-6xy-3y^2$

$\Rightarrow$ $v = 3x^2y-3xy^2-y^3+c(x)$ (1)

$\Rightarrow$ $v_x = 6xy-3y^2+c'(x)$. (2)

Αλλά $v_x \overset{[C-R]}{=} -u_y = 3x^2+6xy-3y^2$

$\overset{(2)}{\Rightarrow}$ $\cancel{6xy}\cancel{-3y^2}+c'(x) = 3x^2\cancel{+6xy}\cancel{-3y^2}$

$\Rightarrow$ $c'(x) = 3x^2 \Rightarrow c(x)=x^3+c_1$

$\overset{(1)}{\Rightarrow}$ $v(x,y) = 3x^2y-3xy^2-y^3+x^3+c_1$.

Είναι $i=f(0)=u(0,0)+iv(0,0)=ic_1$

$\Rightarrow$ $c_1=1$. Άρα,

$f(x+iy)=(x^3-3x^2y-3xy^2+y^3)+$
$+i(3x^2y-3xy^2-y^3+x^3+1)$,
$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$.

(ii') Η $z \mapsto \operatorname{Log} z$ είναι διαφορίσιμη για $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$.

Επιπλέον, $\forall z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$,

$$\operatorname{Log} z - i\frac{\pi}{2} = \ln|z| + i \operatorname{Arg} z - i\frac{\pi}{2}$$

$$= \ln|z| + i\left(\operatorname{Arg} z - \frac{\pi}{2}\right) = g(z)$$

Η $z \mapsto f(z) = \operatorname{Log}[g(z)]$ δεν είναι διαφορίσιμη για $g(z) \in (-\infty, 0]$ δηλ. όταν

$$\left.\begin{array}{l} \ln|z| \le 0 \\ \operatorname{Arg} z = \frac{\pi}{2} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \ln|z| \le 0 \\ z = iy,\ y \in [0, \infty) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} z = iy, \\ y \in [0, 1] \end{array}\right. \Leftrightarrow z \in [0, i].$$

Άρα, f διαφορίσιμη για σημεία

$$z \in \mathbb{C} \setminus \left((-\infty, 0] \cup [0, i]\right).$$

Scanned with CamScanner

③

.2: $\max\limits_{|z|\le 1} |z^2+3z-1|$ [Αρχή Μεγίστου] $\max\limits_{|z|=1} |z^2+3z-1|$.

Για $|z|=1$, έχουμε $z=e^{i\varphi}$, για κάποιο $\varphi\in(-\pi,\pi]$

και $\bar{z}=1/z$

$\Rightarrow$

$$|z^2+3z-1| = \left|z\left(z+3-\frac{1}{z}\right)\right| =$$

$$= |z+3-\bar{z}| = |3+2i\,\mathrm{Im}\,z| = |3+2i\sin\varphi|$$

$$= \sqrt{9+4\sin^2\varphi} \le \sqrt{13}$$ και το "=" ισχύει

για $\sin^2\varphi=1 \Leftrightarrow \varphi=\pm\pi/2 \Leftrightarrow z=\pm i$.

Άρα, $\max\limits_{|z|\le 1} |z^2+3z-1| = \sqrt{13}$ και

λαμβάνεται για $z=\pm i$.

Θ.3. Θέτουμε $f(z)=\frac{z^3 e^{iz}}{z^4+16}$, $\rho=2e^{i\pi/4} \Rightarrow \rho^4=-16$ (4)

Οι ρίζες του z^4+16 είναι $\pm\rho$, $\pm\bar{\rho}$

ό' $\rho=2\frac{1+i}{\sqrt{2}}=(1+i)\sqrt{2}$. Μόνο οι $\rho, -\bar{\rho}$ έχουν ~~θετικό~~ φανταστικό μέρος

$$\Rightarrow J=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^3}{x^4+16}e^{ix}dx=2\pi i\left[Res(f,\rho)+Res(f,-\bar{\rho})\right].$$

$\forall a\in\{\rho,-\bar{\rho}\}$, $Res(f,a)=\frac{a^3e^{ia}}{4a^3}=\frac{1}{4}e^{ia}$

$$\Rightarrow J=\frac{\pi i}{2}\left(e^{i\rho}+e^{-i\bar{\rho}}\right)=\frac{\pi i}{2}\left(e^{i\rho}+\overline{e^{i\rho}}\right).$$

$$=\pi i\, Re(e^{i\rho})$$

$i\rho=\sqrt{2}(-1+i)$

$$\Rightarrow e^{i\rho}=e^{-\sqrt{2}}\left[\cos(\sqrt{2})+i\sin(\sqrt{2})\right]$$

$$\Rightarrow J=\pi i e^{-\sqrt{2}}\cos(\sqrt{2})$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^3}{x^4+16}\sin x\,dx=Im(J)=\underline{\pi e^{-\sqrt{2}}\cos(\sqrt{2})}.$$

Τα ανώμαλα σημεία της $g(z)=\frac{(e^z-1)^2}{z^3\sin z}$

είναι $k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$ αλλά μόνο $0\in int\gamma^* \Rightarrow$

$$\Rightarrow \int_\gamma g(z)dz=2\pi i\, Res(g,0)$$

Έχουμε

$$g(z) = \frac{(z + z^2/2! + z^3/3! + \cdots)^2}{z^3 (z - z^3/3! + z^5/5! - \cdots)}$$

$$= \frac{1}{z^2} \cdot \frac{A(z)^2}{B(z)}, \quad \text{όπου}$$

$A(z) = 1 + z/2! + z^2/3! + \cdots$, $A(0) = 1$, $A'(0) = 1/2$,

$B(z) = 1 - z^2/3! + z^4/5! - \cdots$; $B(0) = 1$, $B'(0) = 0$.

Επειδή $B(0) \neq 0$, η A^2/B είναι ολόμορφη σε περιοχή του 0 $\Rightarrow$ 0 = διπλός πόλος της g

$$\Rightarrow \operatorname{Res}(g, 0) = \lim_{z \to 0} [z^2 g(z)]' = \frac{d}{dz} \left[\frac{A(z)^2}{B(z)}\right]\Big|_{z=0} =$$

$$= \frac{2A(0)A'(0)B(0) - A(0)^2 B'(0)}{B(0)^3} = \frac{2 \cdot 1 \cdot 1/2 \cdot 1}{1^3} = 1$$

$$\Rightarrow \int_\gamma g(z)\,dz = 2\pi i.$$

$\vdash\!\!\dashv$

Θ.4: Έστω $z_0 \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, $\gamma_n(t) = z_0 + ne^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

$$\text{O.T.C.} \Rightarrow f''(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_n} \frac{f(z)}{(z-z_0)^3}\,dz.$$

Εάν $M = \max\limits_{|w|=1} |f(w)|$, τότε $\forall z \in \gamma_n^*$,

$$|f(z)| = \left|f\left(n\frac{z}{n}\right)\right| \leq n\left|f\left(\frac{z}{n}\right)\right| \leq nM$$

κ' $|z-z_0|^3 \geq (|z|-|z_0|)^3 \geq (n-|z_0|)^3$.

Άρα, $\forall n > |z_0|$,

$$|f''(z_0)| \overset{ML-\text{ανισ.}}{\leq} \frac{1}{\cancel{2\pi}} \cdot \cancel{2\pi}\, n \,\frac{nM}{(n-|z_0|)^3} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Επομένως, $f''(z_0) = 0$

Άρα, $f''(z)=0, \quad \forall z\in\mathbb{C}$

$\Rightarrow f'(z)= a\in \mathbb{C}$

$\Rightarrow [f(z)-az]'=0, \quad \forall z\in\mathbb{C}$

$\Rightarrow f(z)-az=b\in\mathbb{C}$

$\Rightarrow \underline{f(z)=az+b}$