ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY OF ATHENS
SCHOOL OF APPLIED MATHEMATICAL AND PHYSICAL SCIENCES

Γραμμική Άλγεβρα
Ασκήσεις
8α. Επίλυση Γραμμικού Συστήματος

Κάλλια Παυλοπούλου

2023-2024

Άσκηση 1: μη ομογενές σύστημα 3×4

$$\begin{cases} 2x_2 + 12x_3 + 11x_4 = -20 \\ 2x_1 + 8x_2 + 26x_3 = 12 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 = -1 \end{cases} \longrightarrow [A|b] = \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 2 & 12 & 11 & -20 \\ 2 & 8 & 26 & 0 & 12 \\ 1 & 3 & 2 & 3 & -1 \end{array}\right]$$

Επαυξημένος Πίνακας

Γραμμοϊσοδύναμος ανηγμένος κλιμακωτός

$$[A_R|b_R] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -40,7 & 83,4 \\ 0 & 1 & 0 & 15,7 & -30,4 \\ 0 & 0 & 1 & -1,7 & 3,4 \end{array}\right]$$

$rank(A) = 3$

$rank[A|b] = 3$

$\xrightarrow{rank}$ Αφού $\boxed{rank(A) = rank[A|b]}$ το σύστημα είναι συμβιβαστό!

$\Downarrow$

Ας δούμε τώρα τη μορφή των λύσεων.

Άσκηση 1: (μη ομογενές σύστημα $\mathbf{3 \times 4}$) - Μορφή των λύσεων

Γραμμοϊσοδύναμος ανηγμένος κλιμακωτός

$$[A_R|b_R] = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -40,7 & 83,4 \\ 0 & 1 & 0 & 15,7 & -30,4 \\ 0 & 0 & 1 & -1,7 & 3,4 \end{array}\right] \end{array} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1 = 83,4 + 40,7 \cdot x_4 \\ x_2 = -30,4 - 15,7 \cdot x_4 \\ x_3 = 3,4 + 1,7 \cdot x_4 \end{array}\right\}$$

<u>3 pivots:</u>
βασικοί άγνωστοι
(x_1, x_2, x_3)

$\nu - rankA = 4 - 3 = 1$, μία ελεύθερη μεταβλητή, η οποία είναι η x_4.

Άσκηση 1: (μη ομογενές σύστημα $\mathbf{3 \times 4}$) - Σύνολο λύσεων

Λύσεις του συστήματος αποτελούν όλα τα διανύσματα που μπορούν να γραφτούν στη μορφή:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 83,4 + 40,7 \cdot x_4 \\ -30,4 - 15,7 \cdot x_4 \\ 3,4 + 1,7 \cdot x_4 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 83,4 \\ -30,4 \\ 3,4 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 40,7 \cdot x_4 \\ -15,7 \cdot x_4 \\ 1,7 \cdot x_4 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 83,4 \\ -30,4 \\ 3,4 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \cdot \begin{bmatrix} 40,7 \\ -15,7 \\ 1,7 \\ 1 \end{bmatrix}, x_4 \in \mathbb{R}$$

Σύνολο λύσεων του συστήματος:

$$\boxed{S = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \in R^4 : \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 83,4 \\ -30,4 \\ 3,4 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda \cdot \begin{bmatrix} 40,7 \\ -15,7 \\ 1,7 \\ 1 \end{bmatrix}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}}$$

Άσκηση 1: Μετατροπή σε ανηγμένο κλιμακωτό του επαυξημένου 3×5

$$[A|b] = \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 2 & 12 & 11 & -20 \\ 2 & 8 & 26 & 0 & 12 \\ 1 & 3 & 2 & 3 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3 \leftrightarrow L_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 8 & 26 & 0 & 12 \\ 0 & 2 & 12 & 11 & -20 \end{array}\right] \xrightarrow{L_2 \to L_2 - 2L_1}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 22 & -6 & 14 \\ 0 & 2 & 12 & 11 & -20 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3 \to L_3 - L_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 22 & -6 & 14 \\ 0 & 0 & -10 & 17 & -34 \end{array}\right] \xrightarrow{L_2 \to \left(\frac{1}{2}\right) L_2}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 11 & -3 & 7 \\ 0 & 0 & -10 & 17 & -34 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3 \to \left(\frac{-1}{10}\right) L_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 11 & -3 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -17/10 & 34/10 \end{array}\right] \xrightarrow{L_2 \to -11 \cdot L_2}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 157/10 & -304/10 \\ 0 & 0 & 1 & -17/10 & 34/10 \end{array}\right] \xrightarrow{L_1 \to -2 \cdot L_3}$$

Άσκηση 1: Μετατροπή σε ανηγμένο κλιμακωτό του επαυξημένου 3×5

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 157/10 & -304/10 \\ 0 & 0 & 1 & -17/10 & 34/10 \end{array}\right] \xrightarrow{L_1 \to -2 \cdot L_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 64/10 & -78/10 \\ 0 & 1 & 0 & 157/10 & -304/10 \\ 0 & 0 & 1 & -17/10 & 34/10 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L_1 \to -3 \cdot L_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -407/10 & 834/10 \\ 0 & 1 & 0 & 157/10 & -304/10 \\ 0 & 0 & 1 & -17/10 & 34/10 \end{array}\right] = [\mathrm{A}_R | b_R]$$

Άσκηση 2: μη ομογενές σύστημα 4×3

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 = -5 \\ 4x_1 + 9x_2 + x_3 = -2 \\ -6x_2 + 2x_3 = 24 \\ 5x_1 + 9x_2 = 5 \end{cases}$$

Επαυξημένος Πίνακας

$$[A|b] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & -5 \\ 4 & 9 & 1 & -2 \\ 0 & -6 & 2 & 24 \\ 5 & 9 & 0 & 5 \end{array}\right]$$

Γραμμοϊσοδύναμος ανηγμένος κλιμακωτός

$$[A_R|b_R] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 31/4 \\ 0 & 1 & 0 & -15/4 \\ 0 & 0 & 1 & 3/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$rank(A) = 3$

$rank[A|b] = 3$

$\xrightarrow{rank}$

Αφού $\boxed{rank(A) = rank[A|b]}$ το σύστημα είναι συμβιβαστό!

Ας δούμε τώρα τη μορφή των λύσεων.

Άσκηση 2: (μη ομογενές σύστημα 4×3) - Μορφή των λύσεων

Γραμμοϊσοδύναμος ανηγμένος κλιμακωτός

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \end{array} \\
[A_R|b_R] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 31/4 \\ 0 & 1 & 0 & -15/4 \\ 0 & 0 & 1 & 3/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]
\end{array}
\longrightarrow
\begin{array}{l}
x_1 = 31/4 \\
x_2 = -15/4 \\
x_3 = 3/4 \\
0 = 0
\end{array}
$$

<u>3 pivots:</u> 3 βασικοί άγνωστοι (οι x_1, x_2, x_3)

$$
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 31/4 \\ -15/4 \\ 3/4 \end{bmatrix}
$$

Άρα το σύστημα έχει <u>μία και μοναδική λύση στο $\mathbb{R}^3$</u>, την:

Σύνολο λύσεων του συστήματος: $\boxed{S = \left\{ \begin{bmatrix} 31/4 \\ -15/4 \\ 3/4 \end{bmatrix} \right\}}$

Άσκηση 3: μη ομογενές σύστημα 3×5

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 10 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 - x_5 = -1 \\ x_1 - 4x_2 + 4x_3 - x_4 + 4x_5 = 1 \end{cases}$$

Επαυξημένος Πίνακας

$$[\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b}] = \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 10 \\ 2 & 1 & -1 & -2 & -1 & -1 \\ 1 & -4 & 4 & -1 & 4 & 1 \end{array}\right]$$

Γραμμοϊσοδύναμος ανηγμένος κλιμακωτός

$$[\boldsymbol{A_R}|\boldsymbol{b_R}] = \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$rank(A) = 2$

$rank[\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b}] = 3$

$\xrightarrow{rank}$

Αφού $\boxed{rank(A) \neq rank[A|b]}$ το σύστημα είναι <u>ασυμβίβαστο</u>!

$\Downarrow$

Το σύνολο λύσεων του συστήματος είναι το $S = \emptyset$

Άσκηση 4: ομογενές σύστημα 4×5

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_5 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 - 5x_5 = 0 \\ -2x_1 + 4x_2 - 3x_3 + x_4 - 2x_5 = 0 \\ 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0 \end{cases}$$

Επαυξημένος Πίνακας

$$[A|b] = \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & -5 & 0 \\ -2 & 4 & -3 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & -6 & 4 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

Γραμμοϊσοδύναμος ανηγμένος κλιμακωτός

$$[A_R|b_R] = \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$rank(A) = 3$

$rank[A|b] = 3$

$\xrightarrow{rank}$

Αφού $\boxed{rank(A) = rank[A|b]}$ το σύστημα είναι <u>συμβιβαστό</u>!

Ας δούμε τώρα τη μορφή των λύσεων.

Άσκηση 4: (ομογενές σύστημα $\mathbf{4 \times 5}$) - Μορφή των λύσεων

Γραμμοϊσοδύναμος ανηγμένος κλιμακωτός

$$\begin{array}{c} \\ (A_R|b_R) = \end{array} \begin{array}{l} \quad\; x_1 \quad\; x_2 \quad\; x_3 \quad\; x_4 \quad\; x_5 \\ \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1 = 2x_2 - 4x_5 \\ x_3 = x_5 \\ x_4 = -3x_5 \\ 0 = 0 \end{array}\right\}$$

3 pivots: 3 βασικοί άγνωστοι (x_1, x_3, x_4)

$\nu - rankA = 5 - 3 = 2$, δύο ελεύθερες μεταβλητές, η οποία είναι οι x_2 και x_5 .

Άσκηση 4: (μη ομογενές σύστημα 4×5) - Σύνολο λύσεων

Λύσεις του συστήματος αποτελούν όλα τα διανύσματα που μπορούν να γραφτούν στη μορφή:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_2 - 4x_5 \\ x_2 \\ x_5 \\ -3x_5 \\ x_5 \end{bmatrix} = x_2 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_5 \cdot \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Σύνολο λύσεων του συστήματος:

$$\boldsymbol{S} = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^5 : \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \lambda \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \mu \cdot \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}, \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

Και λέμε πως λύση αποτελούν όλοι οι γραμμικοί συνδυασμοί των διανυσμάτων $[2 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T$ και $[-4 \quad 0 \quad 1 \quad -3 \quad 1]^T$.

Άσκηση 5: μη ομογενές σύστημα 3×3 με παράμετρο

$$\begin{cases} x + y - 6z = \lambda \\ 2x + y - 2z = 8 \\ 2x + 3y - 22z = 5 \end{cases}$$

Επαυξημένος Πίνακας

$$[A|b] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -6 & \lambda \\ 2 & 1 & -2 & 8 \\ 2 & 3 & -22 & 5 \end{array}\right]$$

Γραμμοϊσοδύναμος ανηγμένος κλιμακωτός

$$[A_R|b_R] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4 & 8-\lambda \\ 0 & 1 & -10 & -8+2\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 13-4\lambda \end{array}\right]$$

$rank(A) = 2$

$rank[A|b] = ?$

$\xrightarrow{rank}$

$rank(A) \neq rank[A|b]$?

$rank(A) = rank[A|b]$?

Διακρίνουμε περιπτώσεις

Άσκηση 5: μη ομογενές σύστημα 3×3 με παράμετρο

1) Αν $rank(A) \neq rank[A|b] \Leftrightarrow 13 - 4\lambda \neq 0 \Leftrightarrow \boxed{\lambda \neq \frac{13}{4}}$, τότε το σύστημα είναι ασυμβίβαστο, άρα $\boxed{S = \emptyset}$

2) Αν $rank(A) = rank[A|b] \Leftrightarrow 13 - 4\lambda = 0 \Leftrightarrow \boxed{\lambda = \frac{13}{4}}$, τότε το σύστημα είναι συμβιβαστό και οι λύσεις έχουν τη μορφή:

$$[A_R|b_R] = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4 & 8 - 13/4 \\ 0 & 1 & -10 & -8 + 2 \cdot 13/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = \dfrac{19}{4} - 4z \\ y = -\dfrac{3}{2} + 10z \end{array}\right\}$$

2 pivots: 2 βασικοί άγνωστοι (x, y)

$\nu - rankA = 3 - 2 = 1$, μία ελεύθερη μεταβλητή, η οποία είναι η z .

Άσκηση 5: (μη ομογενές σύστημα 3×3 με παράμετρο) - Σύνολο λύσεων

Λύσεις του συστήματος αποτελούν όλα τα διανύσματα που μπορούν να γραφτούν στη μορφή:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{19}{4} - 4z \\ -\frac{3}{2} + 10z \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{19}{4} \\ -\frac{3}{2} \\ 0 \end{bmatrix} + z \cdot \begin{bmatrix} -4 \\ 10 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Σύνολο λύσεων του συστήματος:

$$\boxed{S = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{19}{4} \\ -\frac{3}{2} \\ 0 \end{bmatrix} + \mu \cdot \begin{bmatrix} -4 \\ 10 \\ 1 \end{bmatrix}, \mu \in \mathbb{R} \right\}}$$

Άλυτες Ασκήσεις για εξάσκηση

1) Να λυθεί το σύστημα $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$, με $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ και $\vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Υπόδειξη: Δημιουργούμε τον επαυξημένο $[\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b}]$ διάστασης 2×5 . Εφαρμόζοντας στοιχειώδεις γραμμοπράξεις φέρνουμε τον πίνακα$[\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b}]$σε μορφή ανηγμένου κλιμακωτού και καταλήγουμε ότι το σύστημα έχει άπειρες λύσεις με 2 ελεύθερες μεταβλητές τις x_1 και x_4. Το σύνολο λύσεων είναι $S = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 : \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ 3 - x_4 \\ -1 - x_4 \\ x_4 \end{bmatrix}, x_1, x_4 \in \mathbb{R} \right\}$.

2) Δίνεται το σύστημα $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$. Αν η ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του επαυξημένου πίνακα του συστήματος είναι η ακόλουθη, ποιες είναι οι λύσεις του συστήματος;

$$[A_R|b_R] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Υπόδειξη: Επισημαίνουμε τα 2 ηγετικά στοιχεία, ορίζουμε βασικούς αγνώστους και ελεύθερους αγνώστους.

Άλυτες Ασκήσεις για εξάσκηση

3) Να λυθεί το σύστημα $\begin{cases} \boldsymbol{x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 1} \\ \boldsymbol{x_2 + 3x_3 + 5x_4} = -3 \\ \boldsymbol{2x_1 + x_2 + 8x_3 - 4x_4} = 4 \end{cases}$.

Υπόδειξη: Εφαρμόζοντας στοιχειώδεις γραμμοπράξεις στον επαυξημένο καταλήγουμε στον γραμμοϊσοδύναμό του

$[A_R|b_R] = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{-87} & \mathbf{46} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{-94} & \mathbf{48} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{33} & \mathbf{-17} \end{bmatrix}$ από όπου συμπεραίνουμε ότι το σύστημα έχει άπειρες λύσεις (ελ.μετ. $\boldsymbol{x_4}$).

4) Να λυθεί το σύστημα $\begin{cases} \boldsymbol{2x_2 + 12x_3 + 11x_4} = -20 \\ \boldsymbol{2x_1 + 8x_2 + 16x_3} = 12 \\ \boldsymbol{x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4} = -1 \end{cases}$.

Υπόδειξη: Εφαρμόζοντας στοιχειώδεις γραμμοπράξεις στον επαυξημένο καταλήγουμε στον γραμμοϊσοδύναμό του

$[A_R|b_R] = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{-16} & \mathbf{0} & \mathbf{2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{6} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{-2} \end{bmatrix}$ από όπου συμπεραίνουμε ότι το σύστημα έχει άπειρες λύσεις (ελ.μετ. $\boldsymbol{x_3}$).