



Γραμμική Άλγεβρα

7. Επίλυση Ομογενούς Γραμμικού Συστήματος $A \cdot \vec{x} = \vec{0}$, $A \in M_{\mu \times \nu}$

Παραδείγματα

Κάλλια Παυλοπούλου

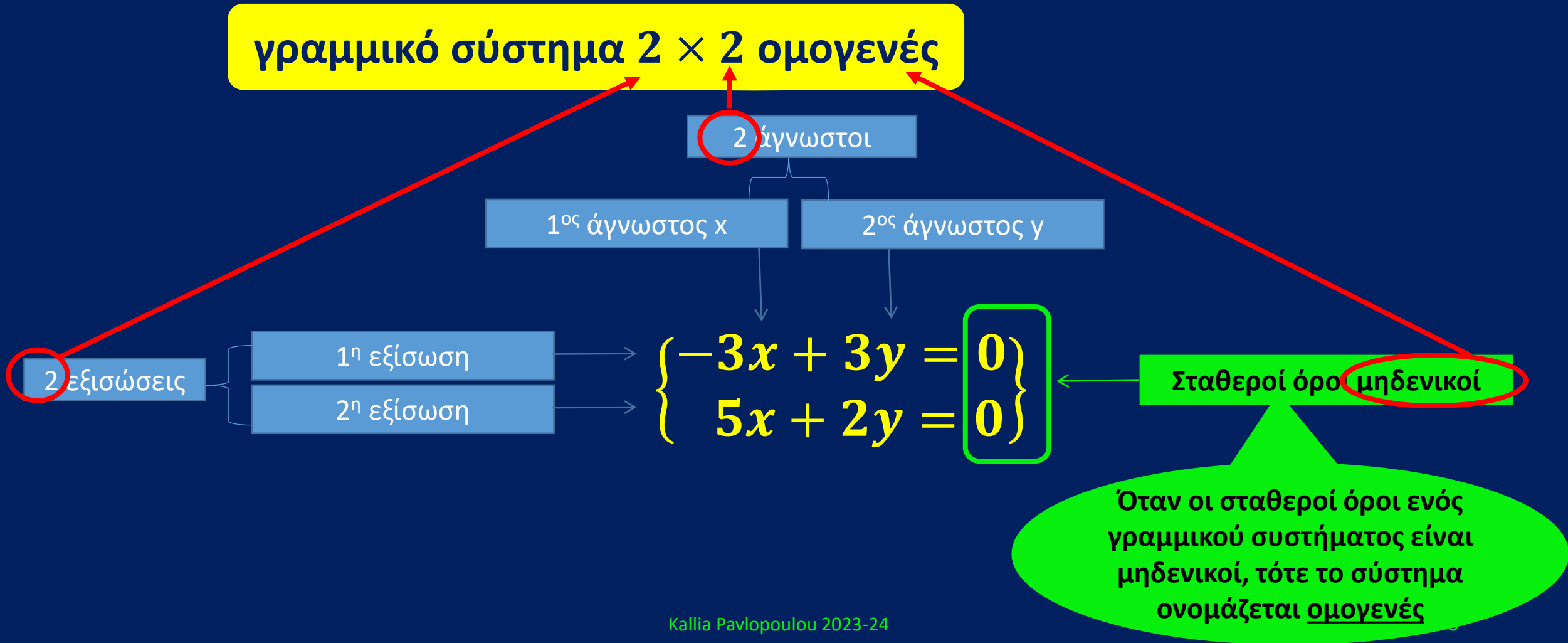
2023-2024

Στη συνέχεια,

θα χρησιμοποιήσουμε τη **θεωρία των πινάκων** για να αναπτύξουμε συστηματικές μεθόδους για την επίλυση συστημάτων γραμμικών εξισώσεων (οι άγνωστοι υψωμένοι στην 1^η δύναμη).

Πιο συγκεκριμένα, θα αρχίσουμε περιγράφοντας μία μέθοδο η οποία βασίζεται στη **θεωρία των γραμμοπράξεων**.

Παράδειγμα 1 : Θα ξεκινήσουμε μελετώντας ένα παράδειγμα ενός γραμμικού συστήματος με 2 εξισώσεις και 2 αγνώστους όπου οι σταθεροί όροι είναι μηδενικοί.



Παράδειγμα 1: ομογενές σύστημα 2×2

$$\begin{cases} -3x + 3y = 0 \\ 5x + 2y = 0 \end{cases}$$

Ας το γράψουμε σε μορφή πινάκων

$$\begin{bmatrix} -3x + 3y \\ 5x + 2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

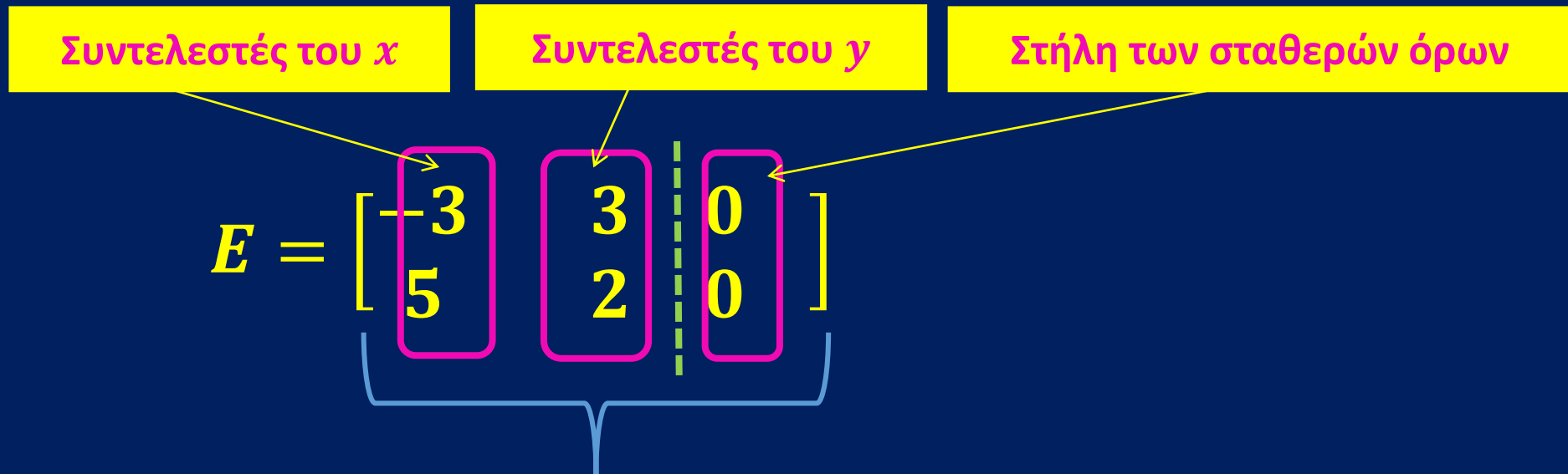
$\vec{0}$: Πίνακας-στήλη (2×1)
σταθερών όρων του συστήματος

A : Πίνακας (2×2)
συντελεστών του συστήματος

\vec{x} : Πίνακας-στήλη (2×1)
οι άγνωστοι του συστήματος

Άρα το σύστημα παίρνει τη μορφή $A \cdot \vec{x} = \vec{0}$, $A \in M_{2 \times 2}$

Το γραμμικό μας σύστημα «αντιπροσωπεύεται», καθορίζεται πλήρως, από τον επόμενο πίνακα (επαυξημένος) διότι διαθέτει όλες τις πληροφορίες : τους συντελεστές των αγνώστων και τους σταθερούς όρους!



E : Επαυξημένος πίνακας του συστήματος, παραθέτοντας δίπλα στον πίνακα των συντελεστών τη στήλη των σταθερών όρων

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$E = \left[\begin{array}{cc|c} -3 & 3 & 0 \\ 5 & 2 & 0 \end{array} \right]$$

Κάθε γραμμικό σύστημα εξισώσεων ανάγεται σε ένα ισοδύναμο γραμμικό σύστημα του οποίου ο επαυξημένος πίνακας είναι γραμμοϊσοδύναμος με τον αρχικό αλλά σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή.

Πολύ σημαντική πρακτική αξία!

Αναγωγή του επαυξημένου σε ανηγμένο κλιμακωτό

$$E = \left[\begin{array}{cc|c} -3 & 3 & 0 \\ 5 & 2 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\gamma_1 \rightarrow \frac{1}{-3} \gamma_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 5 & 2 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\gamma_2 \rightarrow \gamma_2 - 5\gamma_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\gamma_2 \rightarrow \frac{1}{7} \gamma_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\gamma_1 \rightarrow \gamma_1 + \gamma_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right] = E_R$$

The diagram illustrates the row reduction process of the augmented matrix E . The initial matrix E is shown with a blue box around the coefficient matrix A and a pink box around the zero vector $\vec{0}$. The first row is multiplied by $\frac{1}{-3}$ to create a leading 1. Then, 5 times the first row is subtracted from the second row. Next, the second row is multiplied by $\frac{1}{7}$ to create a second leading 1. Finally, the second row is added to the first row to reach the reduced row echelon form E_R , which is also circled in red. Brackets below the matrices identify the coefficient matrix A and the zero vector $\vec{0}$ at each stage.

Ο πίνακας E είναι γραμμοϊσοδύναμος με τον E_R και ο A με τον A_R

Ας δούμε το σύστημα που αντιστοιχεί στον γραμμοϊσοδύναμο $E_R = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$

Λύνω ως προς x, y (pivots).

$$A_R \cdot \vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathbf{1}x + \mathbf{0}y = \mathbf{0} \\ \mathbf{0}x + \mathbf{1}y = \mathbf{0} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \mathbf{0} \\ y = \mathbf{0} \end{cases}$$

Το οποίο είναι ισοδύναμο με
το αρχικό $A \cdot \vec{x} = \vec{0}$

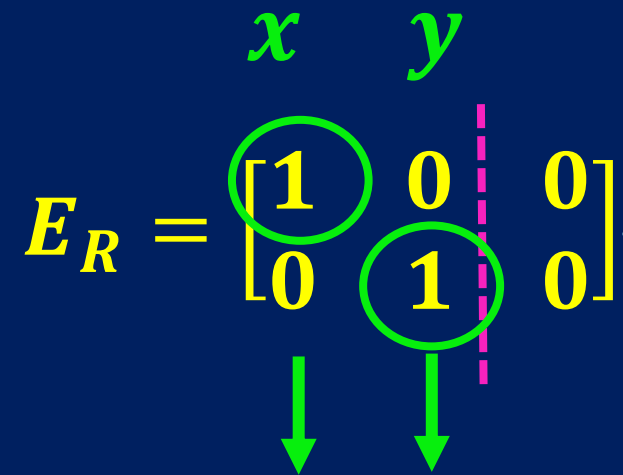
$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Λύση του συστήματος

Σε μορφή
πίνακα

Το σύστημα $A \cdot \vec{x} = \vec{0}$ έχει μία και μοναδική λύση την $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Ας παρατηρήσουμε τον πίνακα E_R :

$$E_R = \begin{array}{cc|c} x & y & \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}$$


2 βασικοί άγνωστοι:

αντιστοιχούν στα pivots (x, y) .

Παρατηρούμε πως ο βαθμός του πίνακα A είναι ίδιος με τον βαθμό του επαυξημένου E του συστήματος.

$$\begin{aligned} \text{rank}(A) &= \text{rank}(E) \\ &= \text{αριθμός των pivots} = \\ &= \text{πλήθος των μη μηδενικών} \\ &= \text{γραμμών (σε κλιμακωτή} \\ &= \text{μορφή)} = 2 \end{aligned}$$

Παράδειγμα 2: ομογενές σύστημα 3×4

$$\begin{cases} 1x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 8x_4 = 0 \\ 3x_1 + 6x_2 + 8x_3 + 10x_4 = 0 \end{cases}$$

Σε μορφή
πινάκων

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 8 & 10 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

A : Πίνακας (3×4)
συντελεστών του συστήματος

\vec{x} : Πίνακας-στήλη (4×1)
οι άγνωστοι του
συστήματος

$\vec{0}$: Πίνακας-
στήλη (3×1)
σταθερών
όρων του
συστήματος

Το γραμμικό μας σύστημα «αντιπροσωπεύεται» από τον επόμενο πίνακα (επαυξημένος) διότι διαθέτει όλες τις πληροφορίες : τους συντελεστές και τους σταθερούς όρους!

Συντελεστές του x_1

Συντελεστές του x_2

Συντελεστές του x_3

Συντελεστές του x_4

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 0 \\ 3 & 6 & 8 & 10 & 0 \end{bmatrix}$$

Στήλη των σταθερών όρων

A $\vec{0}$

Αναγωγή του επαυξημένου σε ανηγμένο κλιμακωτό

$$E = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 0 \\ 3 & 6 & 8 & 10 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\gamma_2 \rightarrow \gamma_2 - 2\gamma_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 0 \\ 3 & 6 & 8 & 10 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\gamma_3 \rightarrow \gamma_3 - 3\gamma_1}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\gamma_2 \rightarrow \frac{1}{2}\gamma_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\gamma_3 \rightarrow \gamma_3 - 2\gamma_2}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\gamma_1 \rightarrow \gamma_1 - 2\gamma_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] = E_R$$

$\underbrace{\left[\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]}_{A_R} \quad \underbrace{\left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right]}_{\vec{0}}$

Ας δούμε το σύστημα που αντιστοιχεί στον γραμμοϊσοδύναμο $E_R = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$

Λύνω ως προς x_1, x_3 .

$$A_R \cdot \vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 1x_1 + 2x_2 + 0x_3 - 2x_4 = 0 \\ 0x_1 + 0x_2 + 1x_3 + 2x_4 = 0 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 + 2x_4 \\ x_3 = -2x_4 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Το οποίο είναι
ισοδύναμο με το
αρχικό $A \cdot \vec{x} = \vec{0}$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x_2 + 2x_4 \\ x_2 \\ -2x_4 \\ x_4 \end{bmatrix}, x_2, x_4, \in R$$

Λύση του συστήματος

Σε μορφή πίνακα

Το σύστημα $A \cdot \vec{x} = \vec{0}$ έχει άπειρες λύσεις της μορφής $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x_2 + 2x_4 \\ x_2 \\ -2x_4 \\ x_4 \end{bmatrix}, x_2, x_4, \in R$

Τις λύσεις θα μπορούσαμε να τις γράψουμε στην εξής μορφή (πίνακα-διανυσμάτων):

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x_2 + 2x_4 \\ x_2 \\ -2x_4 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x_2 \\ x_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2x_4 \\ 0 \\ -2x_4 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_2 \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \kappa \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \kappa, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Άρα το σύνολο λύσεων του συστήματος αποτελείται από τα διανύσματα της μορφής :

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \kappa \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \kappa, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Δηλαδή είναι οι γραμμικοί συνδυασμοί των διανυσμάτων $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ και $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

Δηλαδή το σύνολο λύσεων του συστήματος παράγεται από τα δύο αυτά διανύσματα.

Ας παρατηρήσουμε τον πίνακα E_R :

$$E_R = \begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \\ \hline 1 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

2 βασικοί άγνωστοι:

αντιστοιχούν στα pivots (x_1, x_3)

2 ελεύθεροι άγνωστοι:

αντιστοιχούν σε εκείνους όπου δεν υπάρχουν pivots στις αντίστοιχες στήλες (x_2, x_4).

Παρατηρούμε πως ο βαθμός του πίνακα A είναι ίδιος με τον βαθμό του επαυξημένου E του συστήματος.

$rank(A) = rank(E)$
= αριθμός των pivots =
πλήθος των μη μηδενικών
γραμμών (σε κλιμακωτή
μορφή)=2