



Γραμμική Άλγεβρα

Ασκήσεις

2α. Ορίζουσες

Κάλλια Παυλοπούλου

2023-2024

Άσκηση 1

α) Αν a, b, c, x πραγματικοί αριθμοί, να υπολογιστεί η ορίζουσα του πίνακα:

$$A = \begin{bmatrix} a + x & x & x \\ x & b + x & x \\ x & x & c + x \end{bmatrix}$$

β) Στη συνέχεια, για $a, b, c \geq 0$, να λυθεί ως προς x η εξίσωση: $|A| = 0$.

Σημείωση: Για να υπολογίσουμε μία ορίζουσα που έχει παραμέτρους, βοηθάει να εμφανίσουμε μηδενικά σε μία γραμμή ή στήλη:

- είτε για να την υπολογίσουμε ως προς τα στοιχεία εκείνης της γραμμής ή στήλης
- είτε για να την γράψουμε πιο άμεσα σε παραγοντοποιημένη μορφή

Άσκηση 1 α -Λύση:

$$|A| = \begin{vmatrix} a+x & x & x \\ x & b+x & x \\ x & x & c+x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 & x \\ -b & b & x \\ 0 & -c & c+x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 & x+0 \\ -b & b & x+0 \\ 0 & -c & x+c \end{vmatrix} \quad \text{Ιδιότητα 6}$$

$C1 \rightarrow C1 - C2$
 $C2 \rightarrow C2 - C3$
 Ιδιότητα 7

$$= \begin{vmatrix} a & 0 & x \\ -b & b & x \\ 0 & -c & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ -b & b & 0 \\ 0 & -c & c \end{vmatrix} =$$

Ιδιότητα 4

Ιδιότητα 7
 $L2 \rightarrow L2 - L1$
 $L3 \rightarrow L3 - L1$

Η ορίζουσα ενός τριγωνικού πίνακα είναι ίση με το γινόμενο των στοιχείων της κύριας διαγωνίου

Ιδιότητα 8

$$= x \cdot \begin{vmatrix} a & 0 & 1 \\ -b & b & 1 \\ 0 & -c & 1 \end{vmatrix} + abc = x \cdot \begin{vmatrix} a & 0 \\ -b-a & b \\ -a & -c \end{vmatrix} + abc = x \cdot \begin{vmatrix} -b-a & b \\ -a & -c \end{vmatrix} + abc =$$

Ανάπτυγμα ως προς τα στοιχεία της 3^{ης} στήλης

Άσκηση 1 α – Λύση (συνέχεια):

Τύπος υπολογισμού ορίζουσας 2×2

$$= x \cdot [(-b - a) \cdot (-c) - (-a) \cdot b] + abc = x \cdot (bc + ac + ba) + abc$$

Επομένως:

$$|A| = abc + x \cdot (ab + ac + bc)$$

Άσκηση 1 β – Λύση (συνέχεια)

β) Αν $a, b, c \geq 0$, για ποιες τιμές του x έχουμε $\det A = 0$;
Δηλαδή, τότε $|A| = abc + x \cdot (ab + ac + bc)$;

i) Αν υποθέσουμε πως όλοι οι αριθμοί a, b, c είναι μη μηδενικοί τότε προφανώς $ab + ac + bc > 0$, και

$$|A| = 0 \Leftrightarrow abc + x \cdot (ab + ac + bc) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-abc}{ab+ac+bc}, \text{ μοναδική λύση.}$$

ii) Αν ακριβώς μόνο ένα από τα a, b, c είναι ίσο με μηδέν, τότε

$$|A| = 0 \Leftrightarrow abc + x \cdot (ab + ac + bc) = 0 \xrightarrow{\text{αν } a=0 \text{ και } b,c>0} x = 0, \text{ μοναδική λύση.}$$

iii) Αν δύο από τους αριθμούς a, b, c είναι ίσοι με μηδέν, τότε η εξίσωση δέχεται κάθε πραγματικό αριθμό x ως λύση.

$$|A| = 0 \Leftrightarrow abc + x \cdot (ab + ac + bc) = 0 \xrightarrow{\text{αν } a=0 \text{ και } b=0} 0 + x \cdot 0 = 0 \quad \text{Άπειρες λύσεις}$$

Άσκηση 2

Να λυθεί η εξίσωση:

$$\begin{vmatrix} -1 & x & x & x \\ x & -1 & x & x \\ x & x & -1 & x \\ x & x & x & -1 \end{vmatrix} = 0$$

Λύση:

Ιδιότητα 7

$$L1 \rightarrow L1 + L2 + L3 + L4$$

$$\begin{vmatrix} -1 & x & x & x \\ x & -1 & x & x \\ x & x & -1 & x \\ x & x & x & -1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 3x-1 & 3x-1 & 3x-1 & 3x-1 \\ x & -1 & x & x \\ x & x & -1 & x \\ x & x & x & -1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (3x-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & -1 & x & x \\ x & x & -1 & x \\ x & x & x & -1 \end{vmatrix} = 0$$

Ιδιότητα 4

Ιδιότητα 8

$$\Leftrightarrow (3x-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ x & -1-x & 0 & 0 \\ x & 0 & -1-x & 0 \\ x & 0 & 0 & -1-x \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (3x-1) \cdot (-1-x)^3 = 0 \Leftrightarrow -(3x-1) \cdot (1+x)^3 = 0$$

Ιδιότητα 7

$$C2 \rightarrow C2 - C1$$

$$C3 \rightarrow C3 - C1$$

$$C4 \rightarrow C4 - C1$$

$$\Leftrightarrow x = 1/3 \text{ ή } x = -1$$

Άσκηση 3

Αν a τυχαίος πραγματικός αριθμός, να υπολογίσετε την ορίζουσα

$$\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1+a \end{vmatrix}$$

Λύση:

Ιδιότητα 7

$$C1 \rightarrow C1 + C2 + C3$$

$$\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1+a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3+a & 1 & 1 \\ 3+a & 1+a & 1 \\ 3+a & 1 & 1+a \end{vmatrix} =$$

Ιδιότητα 4

$$= (3+a) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1+a \end{vmatrix} = (3+a) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix} = (3+a) \cdot a^2$$

Ιδιότητα 7

$$\begin{aligned} L2 &\rightarrow L2 - L1 \\ L3 &\rightarrow L3 - L1 \end{aligned}$$

Ιδιότητα 8

Άσκηση 4 (εφαρμογή ιδιοτήτων)

Οι ορίζουσες των πινάκων $A, B, C \in M_8$ είναι $\det A = -5, \det B = -2, \det C = 0$.

Να υπολογίσετε τις ορίζουσες των πινάκων $-2A, B^5, AB^2C, -2(A^{-1})^T B^{-3}$.

Λύση:

Ιδιότητα 4

$$\alpha) \det(-2A) = (-2)^8 \cdot \det A = 2^8 \cdot \det A = 256 \cdot (-5) = -1280$$

Ιδιότητα 9

$$\begin{aligned} \beta) \det(B^5) &= \det(B \cdot B \cdot B \cdot B \cdot B) = \det B \cdot \det B \cdot \det B \cdot \det B \cdot \det B = \\ &= (\det B)^5 = (-2)^5 = -32 \end{aligned}$$

Ιδιότητα 9

$$\gamma) \det(AB^2C) = \det A \cdot \det(B^2) \cdot \det C = \det A \cdot (\det B)^2 \cdot \det C = (-5) \cdot (-2)^2 \cdot 0 = 0$$

Άσκηση 4 (συνέχεια)

δ) Αν $\det A = -5$, $\det B = -2$, τότε $\det [-2(A^{-1})^T B^{-3}] = ?$

$$\delta) \det[-2(A^{-1})^T B^{-3}] = (-2)^8 \cdot \det[(A^{-1})^T (B^{-1})^3] = (-2)^8 \cdot \det[(A^{-1})^T] \cdot \det[(B^{-1})^3] =$$

Ιδιότητα 9

$$= (-2)^8 \cdot \det(A^{-1}) \cdot [\det(B^{-1})]^3$$

Ιδιότητα 9

$$= (-2)^8 \cdot \frac{1}{\det A} \cdot \left(\frac{1}{\det B}\right)^3 =$$

Ιδιότητα 1

$$= 2^8 \cdot \frac{1}{-5} \cdot \left(\frac{1}{-2}\right)^3 = \frac{32}{5}$$

Ιδιότητες οριζουσών (Υπενθύμιση, για την χρήση αρίθμησης στις ασκήσεις)

- 1) Ανάστροφοι πίνακες έχουν την ίδια ορίζουσα $\det(A^T) = \det A$.
- 2) Η εναλλαγή δύο γραμμών (ή στηλών) επιφέρει αλλαγή στο πρόσημο της ορίζουσας $\det B = -\det A$.
- 3) Αν ο πίνακας A έχει δύο γραμμές ή στήλες ίσες ή ανάλογες (δηλ. η μία είναι το πολλαπλάσιο της άλλης), τότε $\det A = 0$.
- 4) Αν πολλαπλασιαστεί μία γραμμή με έναν αριθμό $\lambda \neq 0$ τότε όλη ορίζουσα πολλαπλασιάζεται επί λ , $\det B = \lambda \cdot \det A$. Κατά συνέπεια: $\det(\lambda \cdot A) = \lambda^n \cdot \det A$.
- 5) Αν ο πίνακας A έχει μία μηδενική γραμμή ή στήλη, τότε $\det A = 0$.
- 6) Μία ορίζουσα ανάγεται σε άθροισμα δυο οριζουσών αν κάθε στοιχείο μιας στήλης ή γραμμής είναι άθροισμα δύο προσθετέων.

Ιδιότητες οριζουσών (Υπενθύμιση-συνέχεια)

- 7) Η ορίζουσα του πίνακα δεν μεταβάλλεται αν σε μια γραμμή (ή στήλη) προσθέσω ένα πολλαπλάσιο μιας άλλης $\det B = \det A$.
- 8) Αν ο πίνακας A είναι άνω τριγωνικός ή κάτω τριγωνικός, τότε η ορίζουσά του είναι ίση με το γινόμενο των διαγώνιων στοιχείων του. (Ειδικότερα η ορίζουσα του μοναδιαίου πίνακα είναι ίση με 1, δηλαδή $\det I_n = 1$.)
- 9) Το γινόμενο δύο οριζουσών είναι ίσο με την ορίζουσα του γινομένου τους, δηλαδή $\det(AB) = \det A \cdot \det B$, όπου $A, B \in M_n$. Κατά συνέπεια: $\det(A^{-1}) = 1/\det A$.
- 10) Συνήθως $\det(A + B) \neq \det A + \det B$, όπου $A, B \in M_n$.