ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY OF ATHENS
SCHOOL OF APPLIED MATHEMATICAL AND PHYSICAL SCIENCES

Γραμμική Άλγεβρα
Ασκήσεις
11α. Διαγωνοποίηση Πίνακα

Κάλλια Παυλοπούλου

2023-2024

Άσκηση 1

Δίνεται τετραγωνικός πίνακας A τέτοιος ώστε: $A = \begin{bmatrix} 3 & -12 & 4 \\ -1 & 0 & -2 \\ -1 & 5 & -1 \end{bmatrix}$.

I. **Να βρείτε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A και τις ιδιοτιμές του.**

II. **Με τη βοήθεια των αποτελεσμάτων που βρήκατε στο (i), μπορείτε να αποφασίσετε αν ο A διαγωνοποιείται και αν αντιστρέφεται; (να δικαιολογήσετε την απάντησή σας)**

III. **Αν ο A διαγωνοποιείται, να βρείτε μια διαγωνοποίησή του, δηλαδή, να βρείτε έναν αντιστρέψιμο πίνακα P που διαγωνοποιεί τον A και έναν διαγώνιο πίνακα D όμοιο με τον A.**

IV. **Αν αντιστρέφεται, να υπολογίσετε τις ιδιοτιμές του A^{-1}, χωρίς να βρείτε τον αντίστροφο πίνακα του A.**

Άσκηση 1-λύση

$A = \begin{bmatrix} 3 & -12 & 4 \\ -1 & 0 & -2 \\ -1 & 5 & -1 \end{bmatrix}$ χαρακτηριστικό πολυώνυμο και ιδιοτιμές

(i) Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A είναι:

- $x_A(\lambda) = det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -12 & 4 \\ -1 & -\lambda & -2 \\ -1 & 5 & -1-\lambda \end{vmatrix} =$
- $= (3-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & -2 \\ 5 & -1-\lambda \end{vmatrix} - (-12)\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -1-\lambda \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} -1 & -\lambda \\ -1 & 5 \end{vmatrix} =$
- $= (3-\lambda)\left(\lambda^2 + \lambda + 10\right) + 12(\lambda - 1) + 4(-5-\lambda) = -\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda - 2.$

Άρα το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι το $x_A(\lambda) = -\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda - 2.$

Οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου $x_A(\lambda)$ είναι όλες οι ιδιοτιμές του A, δηλαδή

$$x_A(\lambda) = -(\lambda - 2)(\lambda - 1)(\lambda + 1) = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -1.$$

ιδιοτιμές

Άσκηση 1-λύση (συνέχεια)

$A = \begin{bmatrix} 3 & -12 & 4 \\ -1 & 0 & -2 \\ -1 & 5 & -1 \end{bmatrix}$ **διαγωνοποιείται; αντιστρέφεται;**

(ii) Ο πίνακας A <u>διαγωνοποιείται</u> διότι έχει τρεις διαφορετικές ιδιοτιμές, άρα έχει τρία γραμμικώς ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα.

- **Ο πίνακας A <u>αντιστρέφεται</u> διότι έχει μη μηδενική ορίζουσα, αφού:**
- $\boldsymbol{det(A) = x_A(0) = -2 \neq 0}$ **ή αλλιώς** $\boldsymbol{det(A) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 = 2 \cdot 1 \cdot (-1) = -2}$.

Άσκηση 1-λύση (συνέχεια)

$A = \begin{bmatrix} 3 & -12 & 4 \\ -1 & 0 & -2 \\ -1 & 5 & -1 \end{bmatrix}$ ιδιοδιανύσματα

(iii) Για να βρούμε τον πίνακα P ο οποίος διαγωνοποιεί τον πίνακα A , αρκεί να βρούμε τα ιδιοδιανύσματά του.

- **Α) Για $\lambda_1 = 2$**

$$(A - 2 \cdot I_3) \cdot \vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -12 & 4 \\ -1 & -2 & -2 \\ -1 & 5 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- $\begin{bmatrix} 1 & -12 & 4 \\ -1 & -2 & -2 \\ -1 & 5 & -3 \end{bmatrix} \to \dots \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{16}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Άρα, $\overrightarrow{u_{\lambda_1}} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = z \begin{bmatrix} -16/7 \\ 1/7 \\ 1 \end{bmatrix}, z \in R$

Άσκηση 1-λύση (συνέχεια)

$A = \begin{bmatrix} 3 & -12 & 4 \\ -1 & 0 & -2 \\ -1 & 5 & -1 \end{bmatrix}$ ιδιοδιανύσματα

Β) $\lambda_2 = 1$

$$(A - 1 \cdot I_3) \cdot \vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & -12 & 4 \\ -1 & -1 & -2 \\ -1 & 5 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -12 & 4 \\ -1 & -1 & -2 \\ -1 & 5 & -2 \end{bmatrix} \to \ldots \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

- Άρα, $\overrightarrow{u_{\lambda_2}} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2z \\ 0 \\ z \end{bmatrix} = z \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, z \in R$

Γ) Για $\lambda_3 = -1$

$$(A - (-1) \cdot I_3) \cdot \vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 4 & -12 & 4 \\ -1 & 1 & -2 \\ -1 & 5 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & -12 & 4 \\ -1 & 1 & -2 \\ -1 & 5 & 0 \end{bmatrix} \to \ldots \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

- Άρα, $\overrightarrow{u_{\lambda_3}} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = z \begin{bmatrix} -5/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{bmatrix}, z \in R.$

- Επομένως:

$$P = \begin{bmatrix} -16 & -2 & -5 \\ 1 & 0 & -1 \\ 7 & 1 & 2 \end{bmatrix} \; \kappa\alpha\iota \; D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Άσκηση 1-λύση (συνέχεια)

Στη συνέχεια υπολογίζουμε τον αντίστροφο του P.

- $\left[\begin{array}{ccc|ccc} -16 & -2 & -5 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -16 & -2 & -5 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -21 & 1 & 16 & 0 \\ 0 & 1 & 9 & 0 & -7 & 1 \end{array}\right] \rightarrow$
-
- $\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 9 & 0 & -7 & 1 \\ 0 & -2 & -21 & 1 & 16 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 9 & 0 & -7 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 & -2/3 & -2/3 \end{array}\right].$

Άρα $P^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 5 & -1 & 7 \\ -1/3 & -2/3 & -2/3 \end{bmatrix}$ και μία διαγωνοποίηση του A είναι η εξής: $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$.

(iv) Αφού ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος, αν λ μια ιδιοτιμή του A, τότε $\frac{1}{\lambda}$ ιδιοτιμή του A^{-1}.

Άρα, οι τρεις ιδιοτιμές του A^{-1} είναι οι εξής: $\lambda_1 = \frac{1}{2}, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -1.$

Άσκηση 2

Δίνεται ο πίνακας $A \in M_{3\times 3}$, τέτοιος ώστε: $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

α) Να βρείτε έναν αντιστρέψιμο πίνακα P τέτοιον ώστε $P^{-1} \cdot A \cdot P = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

β) Να βρείτε τον πίνακα $P^{-1} \cdot A^{-1} \cdot P$ για τον πίνακα P που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα (α).

γ) Να βρείτε έναν αντιστρέψιμο πίνακα Q τέτοιον ώστε $Q^{-1} \cdot A^{3} \cdot Q = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 27 \end{bmatrix}$.

Άσκηση 2α-λύση

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

α) Ιδιοτιμές : 2, -1, 3 (στοιχεία της κυρίας διαγωνίου ενός άνω τριγωνικού πίνακα)

$$D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

- Άρα: $P^{-1} \cdot A \cdot P = D \Leftrightarrow P \cdot P^{-1} \cdot A \cdot P \cdot P^{-1} = P \cdot D \cdot P^{-1} \Leftrightarrow \boxed{A = P \cdot D \cdot P^{-1}}$

- Υπολογίζουμε τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στις 3 διαφορετικές ιδιοτιμές και δημιουργούμε τον πίνακα P :

$$\mathrm{P} = \begin{bmatrix} -1/3 & 3/2 & 1 \\ 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Άσκηση 2β-λύση

Να βρείτε τον πίνακα $P^{-1} \cdot A^{-1} \cdot P$ για τον πίνακα P του ερωτήματος (α).

β) $$P^{-1} \cdot A \cdot P = D \Leftrightarrow \left(P^{-1} \cdot A \cdot P\right)^{-1} = D^{-1} \Leftrightarrow P^{-1} \cdot A^{-1} \cdot P = D^{-1}$$

Άρα,

$$P^{-1} \cdot A^{-1} \cdot P = D^{-1} = \left(\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}\right)^{-1} = \begin{bmatrix} (-1)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 3^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 2^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Άσκηση 2γ-λύση

Να βρείτε έναν αντιστρέψιμο πίνακα Q τέτοιον ώστε $Q^{-1} \cdot A^3 \cdot Q = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 27 \end{bmatrix}$

γ) Ο πίνακας $Q^{-1} \cdot A^3 \cdot Q$ μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$Q^{-1} \cdot A^3 \cdot Q = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 27 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2)^3 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^3 & 0 \\ 0 & 0 & 3^3 \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \right)^3 = (D_1)^3$$

- **Επομένως ο πίνακας Q αποτελείται από τα ιδιοδιανύσματα του A τοποθετημένα σε άλλη σειρά. Η σειρά αυτή υποδεικνύεται από τον πίνακα D_1.**

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & -1/3 & 3/2 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$