



Γραμμική Άλγεβρα

1β. Πίνακες και Βασικές Πράξεις (συνέχεια)

Κάλλια Παυλοπούλου

2023-2024

Πολλαπλασιασμός πινάκων-εσωτερικό γινόμενο

Σύνηθες εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων $\vec{x} = (x_1, x_2)$ και $\vec{y} = (y_1, y_2)$:

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2$$

Αν αντικαταστήσουμε το διάνυσμα \mathbf{x} με τον πίνακα γραμμή $X = [x_1 \quad x_2]$ και το διάνυσμα \mathbf{y} με το πίνακα στήλη $Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$, τότε η παραπάνω σχέση γράφεται ως εξής:

$$X \cdot Y = [x_1 \quad x_2] \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = [x_1 y_1 + x_2 y_2]$$

Πολλαπλασιασμός πινάκων-εσωτερικό γινόμενο

Γενικότερα:

Για έναν $1 \times n$ πίνακα γραμμή $X = [x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n]$ και έναν $n \times 1$ πίνακα στήλη $Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$, τότε μπορούμε να ορίσουμε το γινόμενο:

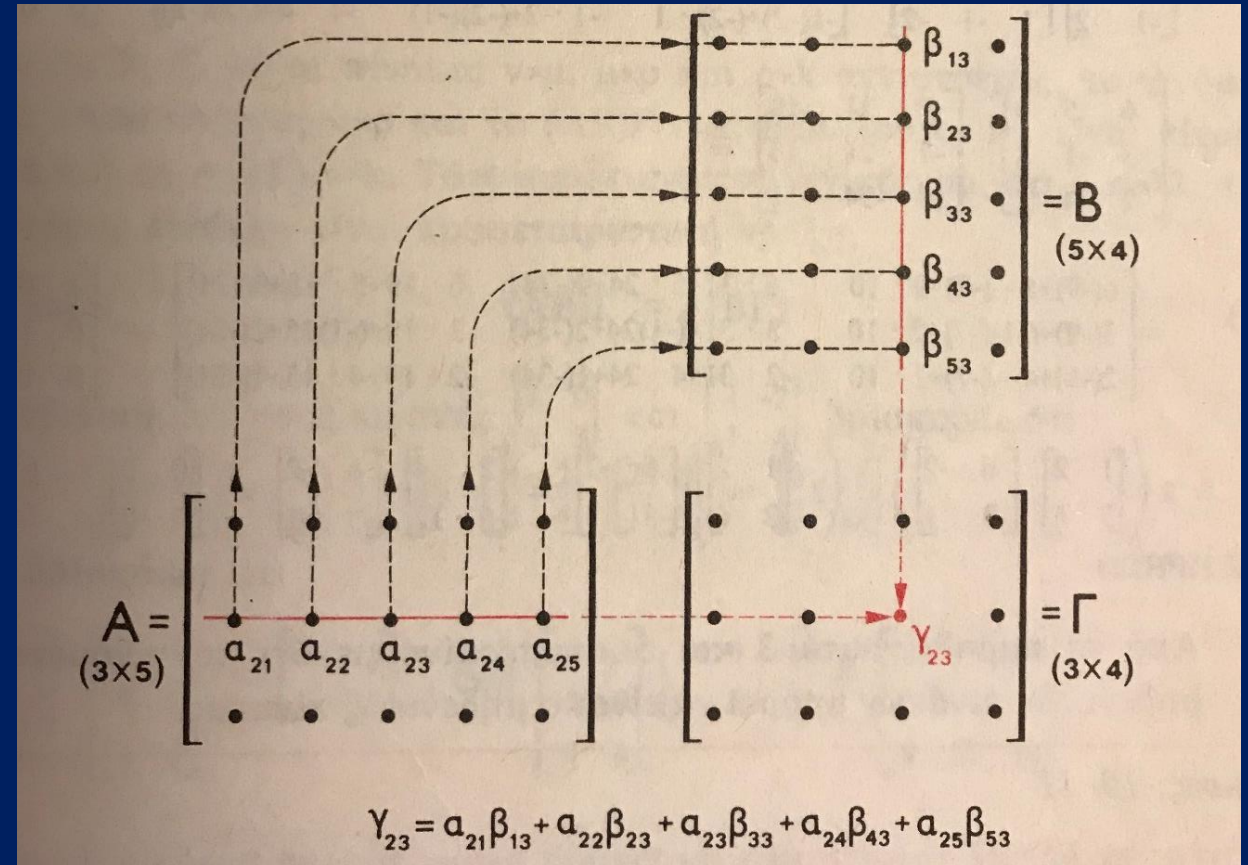
$$X \cdot Y = [x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n] \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = [x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n]$$

Το γινόμενο αυτό θα το καλούμε γινόμενο γραμμής επί στήλη.

Πολλαπλασιασμός πινάκων

Παράδειγμα πινάκων $[3 \times 5] \cdot [5 \times 4]$

Το γινόμενο
ενός πίνακα $A = [a_{ij}]$ τύπου 3×5
με τον πίνακα $B = [\beta_{jk}]$ τύπου 5×4
είναι ο πίνακας $\Gamma = [\gamma_{ik}]$ τύπου 3×4



Παράδειγμα πολλαπλασιασμού πινάκων $[2 \times 3] \cdot [3 \times 2]$

Προσοχή! Δεν μπορώ να πολλαπλασιάσω πίνακες οποιασδήποτε μορφής. Για να πολλαπλασιαστούν δύο πίνακες πρέπει να είναι της μορφής: $A_{\mu \times \rho} \cdot B_{\rho \times \nu}$

$$\begin{array}{ccc} \boxed{2 \times 3} & \boxed{3 \times 2} & \boxed{2 \times 2} \\ \cdot A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 0 & -3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_{11} = 1(-1) + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 2 & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} = 4(-1) + 5 \cdot 0 + 6 \cdot 2 & \gamma_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 8 & -5 \end{bmatrix} \end{array}$$

Για να υπολογίσω το στοιχείο γ_{21} πολλαπλασιάζω τα στοιχεία της 2^{ης} γραμμής του πίνακα A με τα αντίστοιχα στοιχεία της 1^{ης} στήλης του πίνακα B .

Πρακτική σημασία του πολλαπλασιασμού πινάκων

Παράδειγμα 1

Για την κατασκευή **δύο ειδών γλυκισμάτων** Γ_1 και Γ_2 χρειαζόμαστε τα **υλικά σε kg** που φαίνονται στον παρακάτω 2 x 3 πίνακα:

| | Αλεύρι | Ζάχαρη | Βούτυρο | | |
|-------|--------|--------|---------|------------|----------|
| $A =$ | 1,2 | 0,6 | 0,3 | Γ_1 | γλύκισμα |
| | 1,4 | 0,8 | 0,4 | Γ_2 | γλύκισμα |

Το **κόστος** σε δρχ. των υλικών αυτών ανά κιλό, για τα έτη 1992 και 1993, είναι όπως δείχνει ο παρακάτω 3 x 2 πίνακας:

| | 1992 | 1993 | |
|-------|------|------|---------|
| $B =$ | 160 | 180 | αλεύρι |
| | 170 | 200 | ζάχαρη |
| | 900 | 1200 | βούτυρο |

Για να βρούμε το **κόστος σε δραχμές των υλικών του γλυκίσματος Γ_1** , πολλαπλασιάζουμε τις ποσότητες των υλικών με τις αντίστοιχες τιμές και προσθέτουμε τα γινόμενα αυτά.

Δηλαδή, το κόστος του Γ_1 το 1992 ήταν

$$1,2 \cdot 160 + 0,6 \cdot 170 + 0,3 \cdot 900 = 564$$

Η παραπάνω διαδικασία περιγράφεται με τη **βοήθεια των πινάκων** ως εξής:

$$[1,2 \quad 0,6 \quad 0,3] \begin{bmatrix} 160 \\ 170 \\ 900 \end{bmatrix} = [1,2 \cdot 160 + 0,6 \cdot 170 + 0,3 \cdot 900] = [564]$$

Ο πίνακας 1x1 [564] λέγεται γινόμενο της πρώτης γραμμής του A επί την πρώτη στήλη του B.

Πρακτική σημασία του πολλαπλασιασμού πινάκων

Παράδειγμα 1 (συνέχεια)

Ανάλογα, **το κόστος του Γ_1 το 1993** ήταν $1,2 \cdot 180 + 0,6 \cdot 200 + 0,3 \cdot 1200 = 696$

Δηλαδή παριστάνεται με το γινόμενο της πρώτης γραμμής του A επί την δεύτερη στήλη του B

$$[1,2 \quad 0,6 \quad 0,3] \begin{bmatrix} 180 \\ 200 \\ 1200 \end{bmatrix} = [696].$$

Ομοίως, **το κόστος του Γ_2 το 1992** ήταν: $1,4 \cdot 160 + 0,8 \cdot 170 + 0,4 \cdot 900 = 720$
ή σε μορφή πινάκων

$$[1,4 \quad 0,8 \quad 0,4] \begin{bmatrix} 160 \\ 170 \\ 900 \end{bmatrix} = [720].$$

ενώ **το 1993** ήταν: $1,4 \cdot 180 + 0,8 \cdot 200 + 0,4 \cdot 1200 = 892$ ή

$$[1,4 \quad 0,8 \quad 0,4] \begin{bmatrix} 180 \\ 200 \\ 1200 \end{bmatrix} = [892].$$

Πρακτική σημασία του πολλαπλασιασμού πινάκων

Παράδειγμα 1 (συνέχεια)

Άρα, τελικά ο πίνακας Γ δείχνει **το κόστος των δύο γλυκισμάτων κατά τα έτη 1992 και 1993**

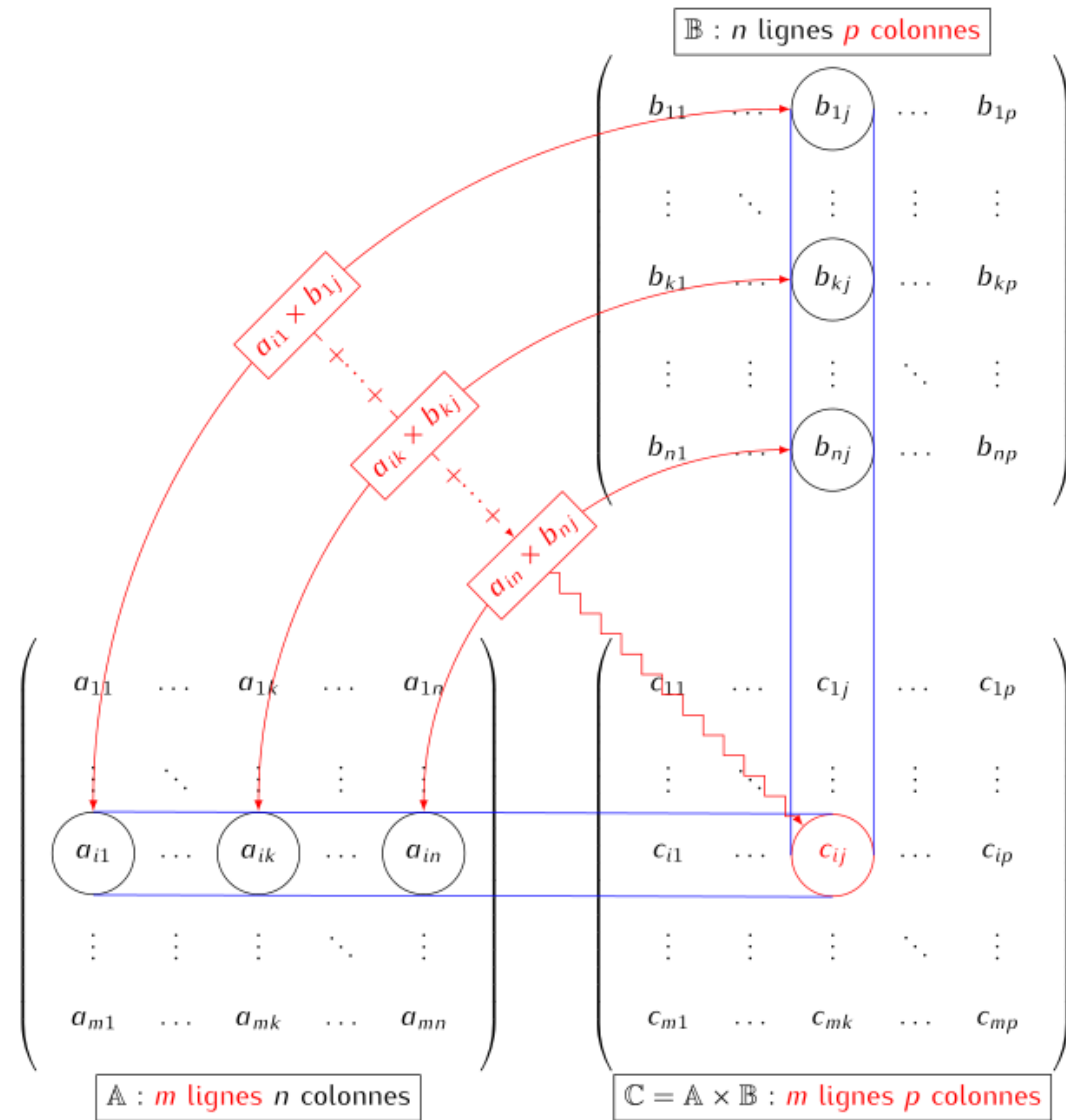
$$\Gamma = \begin{bmatrix} 564 & 696 \\ 720 & 892 \end{bmatrix}$$

Ο πίνακας Γ που προκύπτει με τον πιο πάνω τρόπο λέγεται **γινόμενο του πίνακα A με τον πίνακα B** και συμβολίζεται με $A \cdot B$ ή AB , δηλαδή

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 1,2 & 0,6 & 0,3 \\ 1,4 & 0,8 & 0,4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 160 & 180 \\ 170 & 200 \\ 900 & 1200 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 564 & 696 \\ 720 & 892 \end{bmatrix}.$$

Από τα Μαθηματικά (Γ' Λυκείου Θετικών Σπουδών / Οικονομίας & Πληροφορικής)- Βιβλίο Μαθητή, §1.3 ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΠΙΝΑΚΩΝ,
http://ebooks.edu.gr/ebooks/v/html/8547/2732/Mathimatika-G-Lykeiou-ThSp_html-apli/indexA1_3.html

Αναπαράσταση πολλαπλασιασμού πινάκων



[Gloria Faccanoni, Algèbre linéaire , Recueil d'exercices corrigés et aide-mémoire, Université du Sud Toulon-Var, France 2014.]

Πολλαπλασιασμός πινάκων

Γινόμενο του πίνακα $A = [a_{ik}]$ τύπου $\mu \times \rho$

με τον πίνακα $B = [\beta_{kj}]$ τύπου $\rho \times \nu$

λέγεται ο πίνακας $\Gamma = [\gamma_{ij}]$ ο οποίος είναι τύπου $\mu \times \nu$ και

κάθε στοιχείο του είναι το άθροισμα των γινομένων των ρ στοιχείων της i -γραμμής του A με τα αντίστοιχα ρ στοιχεία της j -στήλης του B .

Συγκεκριμένα έχουμε:

$$\gamma_{ij} = a_{i1}\beta_{1j} + a_{i2}\beta_{2j} + \dots + a_{i\rho}\beta_{\rho j} = \sum_{k=1}^{\rho} a_{ik}\beta_{kj}$$

Άθροισμα για k από 1 έως ρ

Παρατηρήσεις

1) Αν ορίζεται το γινόμενο $A \cdot B$ δεν ορίζεται αναγκαστικά το γινόμενο $B \cdot A$.

Π.χ. $A = [1 \quad 4]$ και $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$, το αποτέλεσμα $A \cdot B$ είναι διάστασης 1×2 ,
ενώ το γινόμενο $B \cdot A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \cdot [1 \quad 4]$ δεν πραγματοποιείται!

2) Ακόμη κι αν ορίζονται τα γινόμενα $A \cdot B$ και $B \cdot A$ τότε δεν ισχύει πάντα

$A \cdot B = B \cdot A$. Π.χ. $A = [1 \quad 4]$ και $B = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$,

τότε $A \cdot B = [1 \cdot 4 + 4 \cdot 1] = [8]$, διάστασης 1×1

ενώ $B \cdot A = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot [1 \quad 4] = \begin{bmatrix} 4 \cdot 1 = 4 & 4 \cdot 4 = 16 \\ 1 \cdot 1 = 1 & 1 \cdot 4 = 4 \end{bmatrix}$, διάστασης 2×2 !

Άρα **γενικά** (ακόμα κι αν οι πίνακες είναι τετραγωνικοί της ίδιας διάστασης) ισχύει $A \cdot B \neq B \cdot A$

Προσοχή!

- Στη θεωρία των πινάκων **δεν αληθεύει πάντα η συνεπαγωγή**

$$\text{Αν } A \cdot B = O, \text{ τότε } A = O \text{ ή } B = O$$

- Δηλαδή, μπορεί να ισχύει $A \cdot B = O$ με $A \neq O$ και $B \neq O$

Παραδείγμα: Για $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq O$ και $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq O$ ισχύει ότι

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = O. \text{ Άρα } A \cdot B = O.$$

Εξάσκηση : Να υπολογίσετε το γινόμενο των πινάκων $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ και $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$

- Κατά συνέπεια, ΔΕΝ ισχύει πάντα η συνεπαγωγή:

$$A \cdot B = A \cdot C \Rightarrow B = C$$

- Αν όμως ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος (θα το δούμε στη συνέχεια) τότε ισχύει

$$A \cdot B = \mathbf{0} \Rightarrow B = \mathbf{0}$$

Γενικά στην απαλοιφή πινάκων πρέπει να είμαστε πολύ προσεκτικοί

Ιδιότητες Πολλαπλασιασμού Πινάκων

- Προσεταιριστική ιδιότητα:

$$A \cdot (B \cdot \Gamma) = (A \cdot B) \cdot \Gamma, \text{ για πίνακες } A \in \Pi_{\mu \times \rho}, B \in \Pi_{\rho \times \nu}, \Gamma \in \Pi_{\nu \times \kappa}$$

- Επιμεριστική ιδιότητα:

- Για πίνακες κατάλληλου τύπου ισχύει

$$A \cdot (B + \Gamma) = A \cdot B + A \cdot \Gamma$$

$$\text{και } (A + B) \cdot \Gamma = A \cdot \Gamma + B \cdot \Gamma$$

- Αντιμεταθετική: Δεν ισχύει πάντα!

Ο μοναδιαίος ή ταυτοτικός πίνακας $I_n \in \Pi_n$

$I_n = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$ είναι διαγώνιος πίνακας και έχει τις ιδιότητες:

- $A \cdot I_n = I_n \cdot A = A, \forall A \in \Pi_n$
- $B \cdot I_n = B, \forall B \in \Pi_{\mu \times n}$
- $I_n \cdot C = C, \forall C \in \Pi_{n \times \rho}$
- $I_n = [\delta_{ij}]_{n \times n}$, όπου $\delta_{ij} = \delta(i, j) = \begin{cases} 1, & \text{αν } i = j \\ 0, & \text{αν } i \neq j \end{cases}$ είναι η συνάρτηση δέλτα του Kronecker.

Ο ανάστροφος πίνακας ενός πίνακα A τύπου $\mu \times \nu$

Αν A είναι ένας $\mu \times \nu$ πίνακας, $A = [\alpha_{ij}] \in \Pi_{\mu \times \nu}$, τότε ο **ανάστροφος** πίνακας (transpose matrix) του A συμβολίζεται με A^T ή A^t και είναι ο πίνακας που έχει για γραμμές τις στήλες και για στήλες τις γραμμές του A με την ίδια σειρά, δηλαδή

$$A^T = [\alpha_{ji}] \in \Pi_{\nu \times \mu}$$

- Ένας τετραγωνικός πίνακας $A = [\alpha_{ij}] \in \Pi_{\nu}$ λέγεται
- **Συμμετρικός** (symmetric matrix), αν ισχύει: $A^T = A$, δηλ.
- **Αντισυμμετρικός** (antisymmetric matrix), αν ισχύει: $A^T = -A$.

Παραδείγματα:

• $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$, ο ανάστροφός του είναι ο $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & -5 \end{bmatrix}$.

• $B = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$, ο ανάστροφός του είναι ο $B^T = [1 \quad -2 \quad 3]$.

Παραδείγματα:

- Ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & -3 & -1 \\ 4 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ είναι συμμετρικός ($A^T = A$).

- Ο πίνακας $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ είναι αντισυμμετρικός ($B^T = -B$).

Τα στοιχεία της κυρίας διαγωνίου είναι όλα μηδέν!

Δεν είναι τυχαίο:

Σε κάθε αντισυμμετρικό πίνακα, ισχύει: $\forall i, j = 1, 2, \dots, n, \alpha_{ji} = -\alpha_{ij}$

Για $i = j$, έχουμε $\alpha_{ii} = -\alpha_{ii} \Leftrightarrow \alpha_{ii} + \alpha_{ii} = 0 \Leftrightarrow 2\alpha_{ii} = 0 \Leftrightarrow \alpha_{ii} = 0$

Άρα, για $i = j$ προκύπτει ότι: $\alpha_{ii} = 0, \forall i = 1, 2, \dots, n.$

Ιδιότητες Ανάστροφου πίνακα:

$$1) (A + B)^T = A^T + B^T, \forall A, B \in \Pi_{\mu \times \nu}$$

$$2) (\lambda A)^T = \lambda A^T, \forall A \in \Pi_{\mu \times \nu}, \forall \lambda \in R$$

$$3) (A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T, \forall A \in \Pi_{\mu \times \rho}, \forall B \in \Pi_{\rho \times \nu}$$

$$4) I_{\nu}^T = I_{\nu}$$

$$5) (A^T)^T = A, \forall A \in \Pi_{\mu \times \nu}$$