Κεφάλαιο 5 - Δυναμοσειρές

Σειρές από n_0: $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$

Μερικά αθροίσματα:

$S_0 = a_{n_0}$

$S_1 = a_{n_0} + a_{n_0+1}$

$\vdots$

$S_n = a_{n_0} + a_{n_0+1} + \dots + a_{n_0+(n-n_0)}$

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n$$

Ισχύουν ακριβώς τα ίδια με τις σειρές από $n_0 = 1$.

Δυναμοσειρά = "άπειρο" πολυώνυμο.

<u>Ορισμός:</u> (Δυναμοσειρά)

Δίνεται $c \in \mathbb{R}$ και $a_n \in \mathbb{R}$, $n = 0, 1, 2, \dots$.

Δυναμοσειρά <u>κέντρου</u> <u>c</u> και <u>συντελεστές</u> <u>a_n, $n \in \mathbb{N}$</u> είναι η συνάρτηση

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x-c)^n .$$

Δηλαδή σε κάθε x έχουμε τη σειρά
$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$.

<u>Συμβολισμός:</u> με $a_0 \cdot (x-c)^0$ εννοούμε το a_0 ακόμα και αν $x = c$.

Γράφουμε επίσης:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n = a_0 + a_1 (x-c) + a_2 (x-c)^2 + \dots$$
$$\dots + a_n (x-c)^n + \dots .$$

<u>Σχόλιο:</u> Τις πιο πολλές φορές το κέντρο είναι ίσο με 0.

Οπότε έχουμε τη δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

$= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots$.

<u>Ερώτημα:</u> Για ποια $x \in \mathbb{R}$ συγκλίνει η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$;

Η σειρά συγκλίνει για $x = c$:

$a_0 + a_1 (c-c) + a_2 (c-c)^2 + \dots + a_n (c-c)^n + \dots$

$= a_0 + a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0^2 + \dots + a_n \cdot 0^n + \dots$

$= a_0 \in \mathbb{R}$

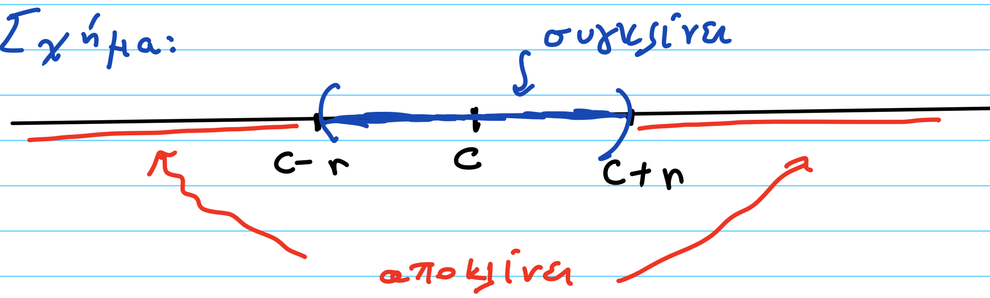
Θεώρημα:

Δίνεται μια δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$.

Τότε ισχύει ακριβώς ένα από τα εξής:

1) Υπάρχει $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$ έτσι ώστε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $|x-c| < r$ η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$ συγκλίνει απολύτως και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $|x-c| > r$ η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$ αποκλίνει.

Σχήμα:



(Για $|x-c| = r$, δηλαδή $x = c \pm r$ εξαρτάται από τα a_n, $n \in \mathbb{N}$).

Αυτό το r είναι μοναδικό και ονομάζεται <u>ακτίνα</u> <u>σύγκλισης της</u> <u>δυναμοσειράς</u>.

2) Η σειρά συγκλίνει μόνο για $x = c$.

Λέμε τότε ότι η δυναμοσειρά έχει <u>ακτίνα σύγκλισης το 0</u>.

3) Η σειρά συγκλίνει και μάλιστα απόλυτα για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Λέμε τότε ότι η δυναμοσειρά έχει <u>ακτίνα</u> <u>σύγκλισης το ∞</u>.

Η εύρεση της ακτίνας σύγκλισης γίνεται συνήθως με το Κριτήριο του Λόγου.

<u>Σχόλιο:</u> Οι δυναμοσειρές μπορούν να ξεκινούν από κάποιο $n_0 \in \mathbb{N}$, $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n (x-c)^n$.

Ισχύουν ακριβώς τα ίδια αποτελέσματα.

<u>Παραδείγματα</u>

1) $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$, κέντρο $= 0$

$a_n = 1$

Εύρεση ακτίνας σύγκλισης:

Θεωρούμε $x \neq 0$ (το κέντρο της δυναμοσειράς)

Εφαρμόζουμε το Κριτήριο του Λόγου.

$$\frac{|x^{n+1}|}{|x^n|} = |x| \longrightarrow |x|$$

Άρα για $|x| < 1$ η σειρά συγκλίνει

και για $|x| > 1$ η σειρά αποκλίνει.

Ακτίνα σύγκλισης $= 1$

Για ποια $x \in \mathbb{R}$ συγκλίνει;

$|x| < 1 \longrightarrow$ συγκλίνει

$|x| > 1 \longrightarrow$ αποκλίνει

$|x| = 1 \iff x = \pm 1$

Τότε $x^n = 1^n = 1 \longrightarrow 1$

ή $x^n = (-1)^n$: αποκλίνει

Άρα $x^n \not\to 0$ και άρα η $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$

αποκλίνει.

Άρα η $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ συγκλίνει μόνο για

$x \in (-1, 1)$.

2) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ κέντρο $= 0$

$a_n = \frac{1}{n!}$

Για $x \neq 0$ έχουμε $\left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{x^n} \right|$

$$= |x| \cdot \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \to +\infty} |x| \cdot 0 = 0 < 1$$

Από το κριτήριο του λόγου η σειρά συγκλίνει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(Για $x = 0$ = κέντρο η σειρά συγκλίνει)

Ακτίνα σύγκλισης $= +\infty$.

3) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x-1)^n}{4^n}$

$$\frac{(2x-1)^n}{4^n} = \frac{\left(2\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)^n}{4^n} = \frac{2^n}{4^n} \cdot \left(x-\frac{1}{2}\right)^n$$

$$= \frac{1}{2^n} \cdot \left(x-\frac{1}{2}\right)^n$$

Κέντρο $= \frac{1}{2}$ $\quad a_n = \frac{1}{2^n}$.

Για να βρούμε για ποια $x \in \mathbb{R}$ η σειρά συγκλίνει εφαρμόζουμε τα ίδια με πριν.

Θεωρούμε $x \neq \frac{1}{2}$ (κέντρο)

$$\left| \frac{(2x-1)^{n+1}}{4^{n+1}} \cdot \frac{4^n}{(2x-1)^n} \right|$$

$$= \frac{1}{4} \cdot |2x-1| \xrightarrow{n\to+\infty} \frac{|2x-1|}{4}$$

$$\frac{|2x-1|}{4} < 1 \iff |2x-1| < 4$$

$$\iff -4 < 2x-1 < 4$$

$$\iff -3 < 2x < 5$$

$$\iff -\frac{3}{2} < x < \frac{5}{2}$$

$$\iff -2 < x - \frac{1}{2} < 2$$

$$\iff \left|x - \frac{1}{2}\right| < 2$$

Από το Κριτήριο του λόγου η δυναμοσειρά συγκλίνει για $x \in \left(-\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$ και αποκλίνει για $x < -\frac{3}{2}$ ή $x > \frac{5}{2}$.

Ακτίνα σύγκλισης $= 2$

(αυτό το βρίσκουμε από το $|x - \frac{1}{2}| < 2$)

$x = \frac{5}{2}$ $\quad \frac{(2x-1)^n}{4^n} = \left(2 \cdot \frac{5}{2} - 1\right)^n \cdot \frac{1}{4^n}$

$$= 4^n \cdot \frac{1}{4^n} = 1$$

Η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} 1$ αποκλίνει

$x = -\frac{3}{2}$ $\quad \frac{(2x-1)^n}{4^n} = \left(2 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) - 1\right)^n \cdot \frac{1}{4^n}$

$$= (-4)^n \cdot \frac{1}{4^n} = (-1)^n \cdot 4^n \cdot \frac{1}{4^n} = (-1)^n$$

$(-1)^n \not\to 0$ άρα η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ αποκλίνει

Θεωρήματα Παραγώγισης και Ολοκλήρωσης Δυναμοσειρών

Θεωρούμε ένα ανοικτό διάστημα I και μια δυναμοσειρά

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x-c)^n \quad , \quad x \in I.$$

(Υποθέτουμε ότι η σειρά συγκλίνει για κάθε $x \in I$).

Τότε η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x \in I$ και ισχύει

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n (x-c)^{n-1}$$

$$= a_1 + 2a_2(x-c) + \dots + n a_n (x-c)^{n-1} + \dots$$

Επιπλέον η f είναι ολοκληρώσιμη και ισχύει

$\int$ αόριστο ολοκλήρωμα

$$\int f(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} \cdot (x-c)^{n+1} + k$$

όπου $k \in \mathbb{R}$.

Προκύπτει ότι κάθε δυναμοσειρά είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του διαστήματος I όπου έχουμε σύγκλιση.

Ισχύει ο εξής τύπος:

$$\boxed{a_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}}$$

όπου $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x-c)^n$.

Γνωστές δυναμοσειρές:

1) $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, $x \in \mathbb{R}$

2) $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $x \in \mathbb{R}$

3) $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad , \quad x \in \mathbb{R}$

4) $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n \quad , \quad |x| < 1$

5) $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad , \quad |x| < 1$