

Συναρτήσεις - Σύντομη Εισαγωγή

Βασίλειος Γρηγοριάδης

Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Συναρτήσεις

Ορισμός:

Συνάρτηση από ένα μη-κενό σύνολο A σε ένα μη-κενό σύνολο B είναι μια αντιστοίχιση f μεταξύ των στοιχείων του A και κάποιων στοιχείων του B .

Το A καλείται **πεδίο ορισμού** της f και το B **πεδίο τιμών** ή **σύνολο τιμών**.

Βασικός κανόνας: Σε **κάθε** $x \in A$ αντιστοιχεί **ακριβώς ένα** $y \in B$ μέσω της f .

Συμβολισμοί: Με $f: A \rightarrow B$ εννοούμε ότι η f είναι συνάρτηση από το A στο B . Αν $x \in A$ συμβολίζουμε με $f(x)$ το μοναδικό y που αντιστοιχεί στο x μέσω της f .

Παραδείγματα:

- 1 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f(x) = x^4 - x + 5$
- 2 $h: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} : h(x) = x^4 - x + 5$
- 3 $g: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} : g(x) = x^{-1}$

Ακόμα ένας συμβολισμός: Κάποιες φορές χρησιμοποιούμε και το σύμβολο \mapsto για να ορίσουμε την τιμή $f(x)$:

$$f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \frac{x^2 - 1}{(x - 4)(x + 3)}.$$

Αυτό σημαίνει ότι $f(x) = \frac{x^2 - 1}{(x - 4)(x + 3)}$ για κάθε $x \in [0, 1]$.

Παρατηρήσεις:

- 1 Οι συναρτήσεις που μελετάμε συνήθως ορίζονται σε υποσύνολα του \mathbb{R} και παίρνουν πραγματικές τιμές. **Τίποτα δεν εμποδίζει όμως** τα πεδία ορισμού και τιμών να είναι τυχαία σύνολα, π.χ. σύνολα από πίνακες.
- 2 Οι συναρτήσεις που μελετάμε συνήθως ορίζονται μέσα από κάποιο τύπο, π.χ. $f(x) = x^2$. **Ούτε αυτό όμως είναι υποχρεωτικό.** Μια συνάρτηση δεν είναι απαραίτητο να ορίζεται μέσω κάποιου τύπου.

Αν έχουμε μια συνάρτηση $f: A \rightarrow B$ η **εικόνα** της f είναι το σύνολο

$$f(A) = \{ y \in B \mid y = f(x) \text{ για κάποιο } x \in A \}.$$

Πιο γενικά αν $I \subseteq A$ τότε η **εικόνα του συνόλου I** μέσω της f είναι το σύνολο

$$f(I) = \{ y \in B \mid y = f(x) \text{ για κάποιο } x \in I \}.$$

Η $f: A \rightarrow B$ είναι **επί** συνάρτηση αν $f(A) = B$ και **1-1** συνάρτηση αν:

για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 \neq x_2$ ισχύει $f(x_1) \neq f(x_2)$,

ισοδύναμα

για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $f(x_1) = f(x_2)$ ισχύει $x_1 = x_2$.

Αν έχουμε μια συνάρτηση $f: A \rightarrow B$ 1-1 και επί τότε ορίζεται η **αντίστροφη συνάρτηση** $f^{-1}: B \rightarrow A$ ως εξής:

$$f^{-1}(y) = \text{το μοναδικό } x \in A \text{ με } f(x) = y.$$

Παράδειγμα: Η συνάρτηση $f: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty) : x \mapsto x^2$ είναι 1-1 και επί με αντίστροφη την $f^{-1}: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty) : f^{-1}(y) = \sqrt{y}$.

Περιορισμός συνάρτησης: Δίνεται μια συνάρτηση $f: A \rightarrow B$ και X ένα μη-κενό υποσύνολο του A . Τότε μπορούμε να θεωρήσουμε τη συνάρτηση $h: X \rightarrow B : h(x) = f(x)$. Η h ονομάζεται **περιορισμός της f** στο σύνολο X και συνήθως συμβολίζεται με $f|_X$ ή $f|X$. Η f ονομάζεται **επέκταση της h** .

Σύνθεση συναρτήσεων: Δίνονται δύο συναρτήσεις $f: X \rightarrow Y$ και $g: Y \rightarrow Z$. Τότε ορίζεται η σύνθετη συνάρτηση $h: X \rightarrow Z : x \mapsto g(f(x))$. Η h συμβολίζεται ως $g \circ f$ και διαβάζεται με διαφορετικούς τρόπους:

" g συντεθειμένη με την f ", " g της f ", " g κύκλος f " κ.λ.π.

Κάποιοι συγγραφείς ορίζουν τη σύνθεση περιορίζοντας κατάλληλα τα πεδία ορισμού: αν $f: A \rightarrow B$ και $g: C \rightarrow Z$ και το σύνολο $X = \{ x \in A \mid f(x) \in C \}$ είναι μη-κενό, τότε ορίζεται η $g \circ f: X \rightarrow Z : x \mapsto g(f(x))$.

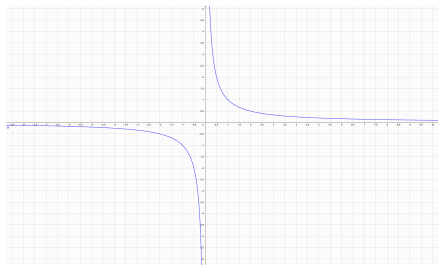
Στην ουσία όμως είναι **σύνθεση των περιορισμών** $g|f(X)$ και $f|X$.

Η **γραφική παράσταση** μιας συνάρτησης $f: A \rightarrow B$ είναι το εξής υποσύνολο του $A \times B$,

$$C_f = \{ (x, y) \in A \times B \mid y = f(x) \}.$$

Στην περίπτωση όπου τα A, B είναι υποσύνολα του \mathbb{R} έχουμε $C_f \subseteq \mathbb{R}^2$ και μπορούμε να σχεδιάσουμε τη γραφική παράσταση με βάση ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων:

Π.χ. $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} : f(x) = 1/x$.



Μερικές Θεμελιώδεις Συναρτήσεις

- 1 Όλα τα πολυώνυμα $p(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ με πραγματικούς συντελεστές.
- 2 Όλες οι συναρτήσεις r της μορφής $r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, όπου τα p, q είναι πολυώνυμα. Αυτές οι συναρτήσεις ονομάζονται **ρητές**.
- 3 Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις

cos = συνημίτονο (cosine) **sin** = ημίτονο (sine)

tan = εφαπτομένη (tangent).

- 4 Η εκθετική συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R} : f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5 Ο φυσικός (ή αλλιώς νεπέριος) λογάριθμος $\ln: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$. Αυτή είναι η αντίστροφη της εκθετικής συνάρτησης.
- 6 Για κάθε $a > 0$ έχουμε τη συνάρτηση $f_a: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R} : f_a(x) = e^{x \cdot \ln a}$. Η τιμή $f_a(x)$ συμβολίζεται και με a^x .

Συνέχεια συνάρτησης - Διαισθητική Προσέγγιση

- 1 Η έννοια της συνέχειας ορίζεται (μεταξύ άλλων) για συναρτήσεις $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ όπου το A είναι **τυχαίο** υποσύνολο του \mathbb{R} .
- 2 Διαισθητικά μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο σημείο $x_0 \in A$ αν για κάθε $x \in A$ που είναι "κοντά" στο x_0 η τιμή $f(x)$ είναι "κοντά" στο $f(x_0)$.
- 3 Μελετάμε συνήθως τη συνέχεια όταν το **πεδίο ορισμού** είναι:
α) ένα **διάστημα**, π.χ. $A = [0, 1)$, $A = (-\infty, 8]$,
 $A = (-\infty, \infty) = \mathbb{R}$,
β) **ένωση διαστημάτων** π.χ. $A = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.
- 4 Για τις συναρτήσεις που ορίζονται σε διάστημα ή σε ένωση (μη-τετριμμένων) **διαστημάτων**, συνέχεια σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού σημαίνει ότι η γραφική παράσταση της f δεν "διακόπτεται" γύρω από το x_0 .
- 5 Μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι **συνεχής** αν είναι συνεχής σε κάθε $x \in A$.

Βασικές Ιδιότητες συνεχών συναρτήσεων

A) Άλγεβρα συνεχών συναρτήσεων.

Υποθέτουμε ότι έχουμε δύο συναρτήσεις $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, $g: A' \rightarrow \mathbb{R}$ και $x_0 \in A \cap A'$. Αν οι f, g είναι συνεχείς στο x_0 τότε:

- 1 οι συναρτήσεις $f \pm g: A \cap A' \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto f(x) \pm g(x)$ είναι συνεχείς στο x_0 ,
- 2 οι $f \cdot g, f/g: A \cap A' \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto f(x) \cdot g(x), f(x)/g(x)$ είναι συνεχείς στο x_0 ,
(στο πηλίκο θεωρούμε ότι $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in A \cap A'$),
- 3 για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ η συνάρτηση $\lambda f: A \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \lambda \cdot f(x)$ είναι συνεχής στο x_0 .

B) Σύθεση συνεχών συναρτήσεων.

Υποθέτουμε ότι έχουμε δύο συναρτήσεις $f: A \rightarrow B$, $g: B \rightarrow \mathbb{R}$ και $x_0 \in A$. Αν η f είναι συνεχής στο x_0 και αν η g είναι συνεχής στο $f(x_0)$ τότε η σύθεση $g \circ f: A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο x_0 .

Γ) *Θεμελιώδεις συνεχείς συναρτήσεις.*

- 1 οι σταθερές συναρτήσεις, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f(x) = c$, όπου $c \in \mathbb{R}$,
- 2 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f(x) = x^n$, όπου $n \geq 1$,
- 3 όλα τα πολυώνυμα,
- 4 όλες οι ρητές συναρτήσεις στα σημεία που ορίζονται
- 5 η συνάρτηση της n -οστής ρίζας, $f(x) = \sqrt[n]{x}$, $x \geq 0$, όπου $n \geq 1$,
- 6 η συνάρτηση της απόλυτου τιμής, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto |x|$,
- 7 όλες οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις \sin (ημίτονο), \cos (συνημίτονο) και \tan (εφαπτομένη) στα σημεία που ορίζονται.

Χρησιμοποιώντας τα προηγούμενα μπορούμε να κατασκευάσουμε καινούργιες συνεχείς συναρτήσεις από παλιές, π.χ. αν η f είναι συνεχής τότε και οι ακόλουθες συναρτήσεις είναι επίσης συνεχείς,

$$g_1(x) = f(x)^2 + (f(x) - 1) \cdot x^2, \quad g_2(x) = \cos(f(x) + 8),$$
$$g_3(x) = \sqrt{f(x)}, \quad \text{όπου } f(x) \geq 0 \text{ για κάθε } x$$

Άλλα παραδείγματα:

$$x^2$$

Χρησιμοποιώντας τα προηγούμενα μπορούμε να κατασκευάσουμε καινούργιες συνεχείς συναρτήσεις από παλιές, π.χ. αν η f είναι συνεχής τότε και οι ακόλουθες συναρτήσεις είναι επίσης συνεχείς,

$$g_1(x) = f(x)^2 + (f(x) - 1) \cdot x^2, \quad g_2(x) = \cos(f(x) + 8),$$
$$g_3(x) = \sqrt{f(x)}, \quad \text{όπου } f(x) \geq 0 \text{ για κάθε } x$$

Άλλα παραδείγματα:

$$3x^2$$

Χρησιμοποιώντας τα προηγούμενα μπορούμε να κατασκευάσουμε καινούργιες συνεχείς συναρτήσεις από παλιές, π.χ. αν η f είναι συνεχής τότε και οι ακόλουθες συναρτήσεις είναι επίσης συνεχείς,

$$g_1(x) = f(x)^2 + (f(x) - 1) \cdot x^2, \quad g_2(x) = \cos(f(x) + 8),$$
$$g_3(x) = \sqrt{f(x)}, \quad \text{όπου } f(x) \geq 0 \text{ για κάθε } x$$

Άλλα παραδείγματα:

$$3x^2 + 1$$

Χρησιμοποιώντας τα προηγούμενα μπορούμε να κατασκευάσουμε καινούργιες συνεχείς συναρτήσεις από παλιές, π.χ. αν η f είναι συνεχής τότε και οι ακόλουθες συναρτήσεις είναι επίσης συνεχείς,

$$g_1(x) = f(x)^2 + (f(x) - 1) \cdot x^2, \quad g_2(x) = \cos(f(x) + 8),$$
$$g_3(x) = \sqrt{f(x)}, \quad \text{όπου } f(x) \geq 0 \text{ για κάθε } x$$

Άλλα παραδείγματα:

$$\sqrt{3x^2 + 1}$$

Χρησιμοποιώντας τα προηγούμενα μπορούμε να κατασκευάσουμε καινούργιες συνεχείς συναρτήσεις από παλιές, π.χ. αν η f είναι συνεχής τότε και οι ακόλουθες συναρτήσεις είναι επίσης συνεχείς,

$$g_1(x) = f(x)^2 + (f(x) - 1) \cdot x^2, \quad g_2(x) = \cos(f(x) + 8),$$
$$g_3(x) = \sqrt{f(x)}, \quad \text{όπου } f(x) \geq 0 \text{ για κάθε } x$$

Άλλα παραδείγματα:

$$\cos\left(\sqrt{3x^2 + 1}\right)$$

Χρησιμοποιώντας τα προηγούμενα μπορούμε να κατασκευάσουμε καινούργιες συνεχείς συναρτήσεις από παλιές, π.χ. αν η f είναι συνεχής τότε και οι ακόλουθες συναρτήσεις είναι επίσης συνεχείς,

$$g_1(x) = f(x)^2 + (f(x) - 1) \cdot x^2, \quad g_2(x) = \cos(f(x) + 8),$$
$$g_3(x) = \sqrt{f(x)}, \quad \text{όπου } f(x) \geq 0 \text{ για κάθε } x$$

Άλλα παραδείγματα:

$$\cos\left(\sqrt{3x^2 + 1}\right) / \left(\sqrt{(x-2)(x+3)}\right), \quad \text{για } x > 2.$$

Παραγωγή

Παίρνουμε δεδομένη την έννοια της παραγωγού - θα αναφερθούμε σε αυτήν την έννοια εκτενέστερα σε επόμενες διαλέξεις.

Οι παράγωγοι μερικών γνωστών συναρτήσεων

Συνάρτηση f	Παράγωγος f'
1 Σταθερή	0
2 x^n ($n \in \mathbb{N}^*$)	nx^{n-1}
3 x^q ($q \in \mathbb{Q}$, $x > 0$)	qx^{q-1} ($q \in \mathbb{Q}$, $x > 0$)
4 $a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$	$na_n x^{n-1} + \dots + a_1$
5 $\sin x$	$\cos x$
6 $\cos x$	$-\sin x$
7 $\tan x$	$1/\cos^2(x)$
8 e^x	e^x
9 a^x ($a > 0$)	$a^x \cdot \ln(a)$ ($a > 0$)
10 $\ln x$ ($x > 0$)	$1/x$ ($x > 0$)