Μαθηματική Ανάλυση και Γραμμική Άλγεβρα

Ασκήσεις στην Ανάλυση

**Χειμερινό Εξάμηνο 2023-2024**

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Σχολή Πολιτικών Μηχανικών

# 8ο Φυλλάδιο

Διδάσκοντες:
Β. Γρηγοριάδης
Κ. Παυλοπούλου
Γ. Μανουσάκης

**Άσκηση 1** (Άλγεβρα Σειρών).

(i) Δώστε το παράδειγμα δύο ακολουθιών $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ και $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ για τις οποίες η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ συγκλίνει αλλά οι σειρές $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ και $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ αποκλίνουν.

(ii) Δείξτε ότι αν οι σειρές $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ και $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνουν τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνει επίσης.

(iii) Δείξτε ότι αν $c \neq 0$ και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} c\cdot a_n$ συγκλίνει τότε και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει.

**Λύση.**

(i) Θέτουμε $a_n = 1$ και $b_n = -1$ για κάθε $n \geq 1$. Τότε $a_n + b_n = 0$ για κάθε $n \geq 1$. Αν θέσουμε $s_n = \sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)$ τότε $s_n = 0+\cdots+0$ ($n$ φορές) και συνεπώς $s_n = 0$. Άρα $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n) = \lim_{n\to\infty} s_n = 0$. Από την άλλη είναι σαφές ότι $a_n \not\to 0$ και $b_n \not\to 0$, συνεπώς οι σειρές $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ και $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ αποκλίνουν.

**Προσοχή**: Μη θεωρήσετε ότι η παραπάνω σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} 0$ μας οδηγεί σε "απροσδιοριστία του τύπου $0\cdot\infty$". Εδώ δεν υπάρχει καμία απροσδιοριστία: το άπειρο άθροισμα είναι σαφώς ορισμένο ως το όριο της ακολουθίας των πεπερασμένων αθροισμάτων. Αν κάθε πεπερασμένο άθροισμα είναι 0 τότε το όριο της σειράς είναι και αυτό 0.

(ii) Παρατηρούμε ότι $b_n = a_n + b_n + (-1)\cdot a_n$ για κάθε $n \geq 1$. Αφού η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει τότε συγκλίνει και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)\cdot a_n$. Επιπλέον αφού η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ συγκλίνει, η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n + b_n + (-1)\cdot a_n\right] = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

συγκλίνει επίσης. (Άθροισμα συγκλινουσών σειρών.)

(iii) Αφού η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} c\cdot a_n$ συγκλίνει τότε θα συγκλίνει και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} c^{-1}\cdot(c\cdot a_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

**Άσκηση 2** (Διερεύνηση Σύγκλισης). Εξετάστε ως προς τη σύγλιση τις ακόλουθες σειρές

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n, \quad \text{όπου } |x| \geq 1, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{n}\,, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left[(-1)^n + (-1)^{n+1}\right].$$

**Λύση.**

Αν $|x| \geq 1$ τότε $|x^n| = |x|^n \geq 1$ για κάθε $n \geq 1$. Επομένως $x^n \not\to 0$ και άρα η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ αποκλίνει. (Μπορεί να δειχθεί σχετικά εύκολα ότι $|x^n| \to +\infty$ όταν $|x| > 1$.)

Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{n}$ συνέκλινε τότε και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} 5^{-1} \cdot \frac{5}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ θα συνέκλινε επίσης που είναι άτοπο.

Σχετικά με την τρίτη σειρά θέτουμε $a_n = (-1)^n + (-1)^{n+1}$ και $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$. Αν ο $n$ είναι άρτιος τότε $a_n = 1 + (-1) = 0$ και αν ο $n$ είναι περιττός αριθμός τότε $a_n = -1 + 1 = 0$. Επομένως $a_n = 0$ για κάθε $n \geq 1$ και $s_n = a_1 + \cdots + a_n = 0$ για κάθε $n \geq 1$. Άρα $s_n \to 0$, δηλαδή $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 0$ και ειδικότερα η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει.

**Άσκηση 3.** Δίνονται $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ και $n \geq 1$. Δείξτε ότι

$$\sum_{k=1}^{n} x^{k-1} = \frac{1 - x^n}{1 - x}$$

και

$$\sum_{k=1}^{n} x^k = \frac{x(1 - x^n)}{1 - x} .$$

**Υπόδειξη**: Ένας τρόπος να αποδειχθεί η πρώτη ισότητα είναι με επαγωγή. Ένας άλλος τρόπος είναι να υπολογίσετε: $(1 - x) \cdot \sum_{k=1}^{n} x^{k-1} = \sum_{k=1}^{n} x^{k-1} - x \cdot \sum_{k=1}^{n} x^{k-1} = \ldots .$

**Λύση.**

Σύμφωνα με την υπόδειξη έχουμε

$$\begin{aligned}
(1 - x) \cdot \sum_{k=1}^{n} x^{k-1} &= \sum_{k=1}^{n} x^{k-1} - x \cdot \sum_{k=1}^{n} x^{k-1} \\
&= \sum_{k=1}^{n} x^{k-1} - \sum_{k=1}^{n} x^k \\
&= x^0 + x^1 + \cdots + x^{n-1} \\
&\quad - (x^1 + \cdots + x^{n-1} + x^n) \\
&= x^0 - x^n \\
&= 1 - x^n.
\end{aligned}$$

Δηλαδή

$$(1 - x) \cdot \sum_{k=1}^{n} x^{k-1} = 1 - x^n$$

και διαιρώντας με το $1 - x$,

$$\sum_{k=1}^{n} x^{k-1} = \frac{1 - x^n}{1 - x} .$$

Σχετικά με τη δεύτερη ισότητα έχουμε

$$\sum_{k=1}^{n} x^k = x \cdot \sum_{k=1}^{n} x^{k-1} = x \cdot \frac{1-x^n}{1-x} \,.$$

**Άσκηση 4** (Εύρεση ορίου σειράς). Βρείτε το όριο των ακόλουθων σειρών:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{2}{5}\right)^{n+3} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+1}-4^{n+2}}{5^{n+1}} \,.$$

**Λύση.**

Στις πρώτες δύο σειρές χρησιμοποιούμε τον τύπο $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x}$ καθώς και τις ιδιότητες των συγκλινουσών σειρών:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{2}{5}\right)^{n+3} = \left(-\frac{2}{5}\right)^{3} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{2}{5}\right)^{n} = -\frac{8}{125} \cdot \frac{-\frac{2}{5}}{1+\frac{2}{5}} = \frac{8}{125} \cdot \frac{2}{7} = \frac{16}{875}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+1}-4^{n+2}}{5^{n+1}} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{3^{n+1}}{5^{n+1}} - \frac{4^{n+2}}{5^{n+1}} \right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+1}}{5^{n+1}} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{n+2}}{5^{n+1}} \\
&= \frac{3}{5} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{5^n} - \frac{4^2}{5} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{5^n} \\
&= \frac{3}{5} \cdot \frac{\frac{3}{5}}{1-\frac{3}{5}} - \frac{16}{5} \cdot \frac{\frac{4}{5}}{1-\frac{4}{5}} \\
&= \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{2} - \frac{16}{5} \cdot 4 \\
&= \frac{9}{10} - \frac{64}{5} \\
&= \frac{9-128}{10} = -\frac{119}{10} \,.
\end{aligned}$$

**Άσκηση 5** (Κριτήριο Σύγκρισης). Εξετάστε τις ακόλουθες σειρές ως προς τη σύγκλιση:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin(n^2+1)}{2^n} \,, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \sin\left(\frac{1}{n}\right) \,, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n-2} \,.$$

**Υπόδειξη**: Υπενθυμίζουμε την ανισότητα $\sin x \leq x$ για κάθε $x \geq 0$.

**Λύση.**

Σχετικά με την πρώτη σειρά έχουμε

$$\left| \frac{(-1)^n \sin(n^2+1)}{2^n} \right| \leq \left| \frac{(-1)^n}{2^n} \right| = \frac{1}{2^n} \,.$$

Επειδή η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ συγκλίνει, έχουμε από το Κριτήριο Σύγκρισης ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin(n^2+1)}{2^n}$ συγκλίνει απολύτως και άρα και κανονικά.

Χρησιμοποιώντας την ανισότητα $\sin x \leq x$ για κάθε $x \geq 0$, έχουμε

$$\frac{1}{n} \cdot \sin\left(\frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2} .$$

Επειδή η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ συγκλίνει, έχουμε από το Κριτήριο Σύγκρισης ότι και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ συγκλίνει.

Στην τρίτη σειρά παρατηρούμε ότι $3n-2 < 3n$ και επομένως $\frac{1}{3n-2} > \frac{1}{3n}$ για κάθε $n \geq 1$. Αν συνέκλινε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n-2}$ τότε από το Κριτήριο Σύγκρισης θα συνέκλινε και σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n}$. Επομένως θα συνέκλινε και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} 3 \cdot \frac{1}{3n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ που είναι άτοπο.

**Άσκηση 6** (Κριτήριο Λόγου). Εξετάστε τις ακόλουθες σειρές ως προς τη σύγκλιση:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{3^n} , \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!} , \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n \cdot n!}{n^n} .$$

**Λύση.**

Εφαρμόζουμε το Κριτήριο του Λόγου σε όλες τις σειρές. (Κάθε φορά με $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ θα εννοούμε την ακολουθία της σειράς με την οποία ασχολούμαστε.)

Στην πρώτη σειρά έχουμε

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(n+1)^4}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{n^4} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^4 \cdot \frac{3^n}{3^{n+1}} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^4 \cdot \frac{1}{3} \longrightarrow 1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3} < 1.$$

Από το Κριτήριο του Λόγου η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{3^n}$ συγκλίνει. (Για την ακρίβεια συγκλίνει απολύτως αλλά μια και η ακολουθία αποτελείται από θετικούς όρους δεν κάνει διαφορά τι από τα δύο θα πούμε.)

Στη δεύτερη

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{3^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{3^n} = \frac{3^{n+1}}{3^n} \cdot \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{3}{n+1} \longrightarrow 0 < 1.$$

Από το Κριτήριο του Λόγου η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!}$ συγκλίνει.

Σχετικά με την τρίτη σειρά

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \frac{5^{n+1}\cdot(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{5^n\cdot n!} \\
&= \frac{5^{n+1}}{5^n}\cdot\frac{(n+1)!}{n!}\cdot\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} \\
&= 5\cdot(n+1)\cdot\frac{n^n}{(n+1)\cdot(n+1)^n} \\
&= 5\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \\
&= 5\cdot\frac{1}{(1+1/n)^n} \quad\longrightarrow\quad \frac{5}{e}>1.
\end{aligned}
$$

Από το Κριτήριο του Λόγου η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n\cdot n!}{n^n}$ αποκλίνει.

**Άσκηση 7** (Κριτήριο Ρίζας). Εξετάστε τις ακόλουθες σειρές ως προς τη σύγκλιση:

$$
\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}\ ,\quad \sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}\ ,\quad \sum_{n=1}^{\infty}e^{-n^2}\ .
$$

**Λύση.**
Εφαρμόζουμε το Κριτήριο της Ρίζας σε όλες τις σειρές. (Κάθε φορά με $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ θα εννοούμε την ακολουθία της σειράς με την οποία ασχολούμαστε.)

Στην πρώτη σειρά έχουμε

$$
\sqrt[n]{|a_n|}=\sqrt[n]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}}=\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n}\longrightarrow\frac{1}{e}<1.
$$

Από το Κριτήριο της Ρίζας η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ συγκλίνει.

Στη δεύτερη

$$
\sqrt[n]{|a_n|}=\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\ \longrightarrow\ e>1.
$$

Από το Κριτήριο της Ρίζας η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$ αποκλίνει.

Σχετικά με την τελευταία σειρά

$$
\sqrt[n]{|a_n|}=\sqrt[n]{e^{-n^2}}=e^{-n}=\left(\frac{1}{e}\right)^n\ \longrightarrow\ 0<1.
$$

Από το Κριτήριο της Ρίζας η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}e^{-n^2}$ συγκλίνει.

**Άσκηση 8**. Εξετάστε τις ακόλουθες σειρές όπως ως προς τη σύγκλιση:

$$
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n}\ ,\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+\cos(n)}{3^n}\ ,\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-3}\ ,\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(5+1/n)^n}{(2^n)^2}\ ,\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{2^n\cdot(n!)^2}\ ,
$$

ως προς τη σύγκλιση.

**Λύση.**

Στην πρώτη σειρά έχουμε

$$\sqrt[n]{\frac{1}{n^n}} = \frac{1}{n} \longrightarrow 0 < 1$$

επομένως από το Κριτήριο της Ρίζας η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$ συγκλίνει.

Στη δεύτερη σειρά παρατηρούμε ότι

$$\left| \frac{1+\cos(n)}{3^n} \right| \leq \frac{1+|\cos(n)|}{3^n} \leq \frac{1+1}{3^n} = \frac{2}{3^n} \,,$$

όπου στην πρώτη ανισότητα χρησιμοποιήσαμε την τριγωνική ανισότητα $|x+y| \leq |x|+|y|$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.

Εφόσον η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ συγκλίνει, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^n}$ συγκλίνει επίσης.

Εφόσον $\left| \frac{1+\cos(n)}{3^n} \right| \leq \frac{2}{3^n}$ για κάθε $n \geq 1$, από το Κριτήριο Σύγκρισης η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\cos(n)}{3^n}$ συγκλίνει απόλυτα και άρα συγκλίνει και με τη συνήθη έννοια.

Σχετικά με την τρίτη σειρά μπορούμε να εφαρμόσουμε το Οριακό Κριτήριο Σύγκρισης με $a_n = \frac{1}{4n^2-3}$ και $b_n = \frac{1}{n^2}$, $n \geq \mathbb{N}^*$.

Παρατηρούμε

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{1}{4n^2-3} \cdot n^2 = \frac{n^2}{4n^2-3} = \frac{1}{4-3/n^2} \longrightarrow \frac{1}{4} > 0.$$

Εφόσον η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ συγκλίνει, από το Οριακό Κριτήριο Σύγκρισης συγκλίνει και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-3}$.

**β' τρόπος**: Μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι $4n^2-3 \geq n^2$ για κάθε $n$, (ισοδύναμα $4n^2-n^2 \geq 3$ που ισχύει). Άρα $\frac{1}{4n^2-3} \leq \frac{1}{n^2}$ για κάθε $n \geq 1$. Εφόσον η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ συγκλίνει, από το Κριτήριο Σύγκρισης συγκλίνει και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-3}$ .

Στην τέταρτη σειρά εφαρμόζουμε το Κριτήριο της Ρίζας,

$$\sqrt[n]{\frac{(5+1/n)^n}{(2^n)^2}} = \frac{5+1/n}{2^2} \longrightarrow \frac{5}{4} > 1$$

επομένως η σειρά αποκλίνει.

Στην τελευταία σειρά έχουμε

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \frac{(2(n+1))!}{2^{n+1}\cdot((n+1)!)^2}\cdot\frac{2^n\cdot(n!)^2}{(2n)!}\\
&= \frac{2^n}{2^{n+1}}\cdot\frac{(2n+2)!}{(2n)!}\cdot\left[\frac{n!}{(n+1)!}\right]^2\\
&= \frac{1}{2}\cdot(2n+1)\cdot(2n+2)\cdot\left(\frac{1}{n+1}\right)^2\\
&= \frac{4n^2+4n+2n+2}{2(n^2+2n+1)}\\
&= \frac{2n^2+3n+1}{n^2+2n+1}\\
&= \frac{2+3/n+1/n^2}{1+2/n+1/n^2} \longrightarrow 2>1.
\end{aligned}
$$

Από το Κριτήριο του Λόγου η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{2^n\cdot(n!)^2}$ αποκλίνει.