



## 6ο Φυλλάδιο

Διδάσκοντες:  
Β. Γρηγοριάδης  
Κ. Παυλοπούλου  
Γ. Μανουσάκης

**Άσκηση 1.** Ποια από τα παρακάτω σύνολα περιέχουν σχεδόν όλα τα  $n \in \mathbb{N}$ ; (Χωρίς απόδειξη)

$$A = \{5, 6, 7, \dots, 99, 100\} \cup \{n \in \mathbb{N} \mid n^2 \geq 400\}$$

$$B = \{n \in \mathbb{N} \mid (n-3) \cdot (n-8) > 0\}$$

$$C = \{n \in \mathbb{N} \mid (n-3) \cdot (n-8) = 0\}$$

$$D = \{n \in \mathbb{N} \mid \text{o } n \text{ είναι άρτιος}\}$$

**Λύση.**

Τα σύνολα που περιέχουν σχεδόν όλα τα  $n \in \mathbb{N}$  είναι τα  $A$  και  $B$ .

Δίνουμε κάποιες εξηγήσεις (δεν είναι ζητούμενο της άσκησης).

Για το  $A$ : παρατηρούμε ότι αν  $n \geq 20$  τότε  $n^2 \geq 400$  και επομένως  $n \in A$ . Άρα το  $A$  περιέχει σχεδόν όλα τα  $n \in \mathbb{N}$ . Το σύνολο  $\{5, 6, 7, \dots, 99, 100\}$  δεν παίζει κανένα ρόλο, ούτε μας επηρεάζει που περιέχει φυσικούς που το τετράγωνό τους είναι μεγαλύτερο-ίσο του 400.

Για το  $B$  παρατηρούμε ότι για κάθε  $n \geq 9$  έχουμε  $(n-3) \cdot (n-8) > 0$  και άρα  $n \in B$ .

Το  $C$  είναι πεπερασμένο σύνολο, συγκεκριμένα  $C = \{3, 8\}$ , επομένως δεν μπορεί να περιέχει σχεδόν όλα τα  $n \in \mathbb{N}$ .

Για το  $D$  καταλαβαίνουμε ότι “αφήνει εκτός” άπειρα  $n \in \mathbb{N}$  (τους περιττούς αριθμούς) επομένως δεν μπορεί να περιέχει σχεδόν όλα τα  $n \in \mathbb{N}$ .

**Άσκηση 2** (Κατανόηση σύγκλισης). Δίνεται μια ακολουθία  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  που συγκλίνει στον αριθμό 1. Ποια από τα παρακάτω σύνολα περιέχουν σχεδόν όλα τα  $n \in \mathbb{N}$  και ποια σύνολα είναι πεπερασμένα;

$$A = \{n \in \mathbb{N}^* \mid 0,99 < a_n < 1,01\}$$

$$B = \{n \in \mathbb{N}^* \mid a_n \leq 0,999\}$$

$$C = \{n \in \mathbb{N}^* \mid a_n > 1,1\}$$

$$D = \{n \in \mathbb{N}^* \mid 0,9999 < a_n\}$$

Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

**Λύση.**

Το σύνολο  $A$  περιέχει σχεδόν όλα τα  $n \in \mathbb{N}$ . Για να το δούμε παίρνουμε  $\varepsilon = 0,01 > 0$ , εφόσον  $a_n \rightarrow 1$  έχουμε ότι  $a_n \in (1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon)$  σχεδόν για όλα τα  $n \in \mathbb{N}$ . Δηλαδή  $a_n \in (0,99, 1,01)$  σχεδόν για όλα τα  $n \in \mathbb{N}$ .

Το σύνολο  $B$  είναι πεπερασμένο. Για  $\varepsilon = 0,001 > 0$  υπάρχει  $n_0$  έτσι ώστε για κάθε  $n \geq n_0$  ισχύει  $a_n \in (1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon) = (0,999, 1,001)$ . Ειδικότερα έχουμε  $a_n > 0,999$  για κάθε  $n \geq n_0$ . Επομένως αν  $a_n \leq 0,999$  τότε  $n < n_0$ . Δηλαδή  $B \subseteq \{n \in \mathbb{N}^* \mid n < n_0\}$ .

Το σύνολο  $C$  είναι επίσης πεπερασμένο. Παίρνουμε  $\varepsilon = 0,1 > 0$ . Τότε υπάρχει  $n_0$  έτσι ώστε για κάθε  $n \geq n_0$  ισχύει  $a_n \in (1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon) = (0,9, 1,1)$ . Ειδικότερα έχουμε  $a_n < 1,1$  για κάθε  $n \geq n_0$ . Επομένως αν  $a_n > 1,1$  τότε  $n < n_0$ . Δηλαδή  $C \subseteq \{n \in \mathbb{N}^* \mid n < n_0\}$ .

Το σύνολο  $D$  περιέχει σχεδόν όλα τα  $n \in \mathbb{N}$ . Για  $\varepsilon = 0,0001 > 0$  υπάρχει  $n_0$  έτσι ώστε για κάθε  $n \geq n_0$  ισχύει  $a_n \in (1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon)$ . Ειδικότερα έχουμε  $a_n > 1 - \varepsilon = 0,9999$  για κάθε  $n \geq n_0$ .

**Άσκηση 3** (Επαλήθευση με βάση τον ορισμό). Δείξτε με βάση τον ορισμό ότι η ακολουθία  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  με  $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ ,  $n \geq 1$  συκλίνει στο 0.

**Λύση.**

Δείχνουμε ότι για κάθε  $\varepsilon > 0$  υπάρχει  $n_0 \geq 1$  έτσι ώστε για κάθε  $n \geq n_0$  ισχύει  $|a_n - 0| < \varepsilon$ .

Έστω  $\varepsilon > 0$ .

[Πρόχειρο: Θέλουμε  $|a_n - 0| = \frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon$ . Αν  $n \geq n_0$  τότε  $\frac{1}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n_0}}$  επομένως αρκεί να έχουμε  $\frac{1}{\sqrt{n_0}} < \varepsilon$ . Ισοδύναμα  $\sqrt{n_0} > 1/\varepsilon$  ή αλλιώς  $n_0 > 1/\varepsilon^2$ .]

Από την Αρχιμήδεια Ιδιότητα υπάρχει φυσικός αριθμός  $n_0 \geq 1$  με  $n_0 > \frac{1}{\varepsilon^2}$ .

Έστω  $n \geq n_0$ .

Τότε

$$|a_n - 0| = \left| \frac{1}{\sqrt{n}} - 0 \right| = \frac{1}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n_0}} < \varepsilon.$$

**Άσκηση 4** (Θεωρία Σύγκλισης). Θεωρούμε δύο ακολουθίες  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  and  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  πραγματικών αριθμών. Ποιες από τις ακόλουθες προτάσεις είναι αληθείς και ποιες ψευδείς; Αν μια πρόταση είναι αληθής δώστε απόδειξη, αλλιώς δώστε ένα παράδειγμα όπου η πρόταση δεν ισχύει.

(i) Αν η  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  είναι φραγμένη τότε  $a_n \cdot \frac{1}{n} \rightarrow 0$ .

(ii) Αν η  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  είναι φραγμένη και η  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  είναι συγκλίνουσα τότε η  $(a_n \cdot b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  είναι επίσης συγκλίνουσα.

(iii) Αν οι  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  και  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  είναι αποκλίνουσες τότε και η  $(a_n + b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  είναι αποκλίνουσα.

(iv) Αν οι  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  και  $(a_n + b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  είναι συγκλίνουσες τότε και η  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  είναι συγκλίνουσα.

**Λύση.**

(i) Η πρόταση είναι αληθής. Εφόσον η  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  είναι φραγμένη υπάρχει  $M > 0$  έτσι ώστε  $|a_n| \leq M$ , δηλαδή  $-M \leq a_n \leq M$  για όλα τα  $n \geq 1$ . Επομένως

$$-\frac{M}{n} \leq \frac{a_n}{n} \leq \frac{M}{n}$$

Αφού  $\frac{M}{n} \rightarrow 0$  και  $-\frac{M}{n} \rightarrow 0$  από το Κριτήριο Παρεμβολής ισχύει  $\frac{a_n}{n} \rightarrow 0$ .

(ii) Η πρόταση είναι ψευδής. Παίρνουμε  $a_n = (-1)^n$  and  $b_n = 1$ ,  $n \geq 1$ . Τότε  $|a_n| \leq 1$  για κάθε  $n \geq 1$  και άρα η ακολουθία  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  είναι φραγμένη. Προφανώς η ακολουθία  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  συκλίνει στο 1. Από την άλλη  $a_n \cdot b_n = a_n = (-1)^n$  για κάθε  $n \geq 1$  και όπως δείξαμε αυτή δεν είναι συγκλίνουσα ακολουθία.

(iii) Η πρόταση είναι ψευδής. Παίρνουμε  $a_n = (-1)^n$  και  $b_n = (-1)^{n+1}$ ,  $n \geq 1$ . Παρατηρούμε ότι  $b_n = (-1) \cdot (-1)^n = (-1) \cdot a_n = -a_n$  και άρα  $a_n + b_n = 0$  για κάθε  $n \geq 1$ . (Αλλιώς μπορούμε να πούμε ότι  $a_n = 1$  και  $b_n = -1$  για  $n$ : άρτιος, όπως επίσης  $a_n = -1$  και  $b_n = 1$  για  $n$ : περιττός. Επομένως σε κάθε περίπτωση έχουμε  $a_n + b_n = 0$ .)

Αφού  $a_n + b_n = 0$  για κάθε  $n \geq 1$  είναι σαφές ότι η ακολουθία  $(a_n + b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  συκλίνει στο 0. Από την άλλη οι ακολουθίες  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  και  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  είναι αποκλίνουσες. Αυτό το έχουμε δείξει στο μάθημα για την  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ . Με όμοιο τρόπο μπορεί ναδειχθεί ότι και η  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  είναι αποκλίνουσα. Αλλιώς: αν είχαμε  $b_n \rightarrow b$  τότε και  $-b_n \rightarrow -b$  δηλαδή  $a_n \rightarrow -b$  (αφού  $a_n + b_n = 0$ ), οπότε και η ακολουθία  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  θα ήταν συγκλίνουσα που είναι άτοπο.

(iv) Η πρόταση είναι αληθής. Προφανώς  $b_n = a_n + b_n + (-a_n)$  για κάθε  $n \geq 1$ . Από την υπόθεσή μας  $a_n \rightarrow a$  και  $a_n + b_n \rightarrow c$  για κάποια  $a, c \in \mathbb{R}$ . Επομένως

$$b_n = a_n + b_n - a_n \rightarrow c - a.$$

Άρα η ακολουθία  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  είναι συγκλίνουσα.

**Άσκηση 5** (Όριο ρητών παραστάσεων).

(i) Δείξτε ότι  $\frac{1}{2n^2 - 1} \rightarrow 0$ . (Χωρίς τη χρήση του ορισμού.)

(ii) Υπολογίστε το όριο  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 - 2n + 1}{5n^3 + n^2 + 1}$ .

(iii) (Γενίκευση των προηγούμενων) Δίνονται δύο πολυώνυμα

$$p(x) = a_k x^k + \dots + a_0 \quad \text{και} \quad q(x) = b_m x^m + \dots + b_0$$

με  $a_k, b_m \neq 0$ ,  $m \geq k$  και  $m \geq 1$ .

Αν  $k = m$  δείξτε ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p(n)}{q(n)} = \frac{a_k}{b_m}$$

και αν  $k < m$  δείξτε ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p(n)}{q(n)} = 0.$$

**Υπόδειξη:** Διαιρέστε κάθε φορά τους αριθμητή-παρονομαστή με τη μεγαλύτερη δύναμη του  $n$ .

**Λύση.**

(i) Διαιρούμε αριθμητή και παρονομαστή με το  $n^2$  και έχουμε

$$\frac{1}{2n^2 - 1} = \frac{\frac{1}{n^2}}{2 - \frac{1}{n^2}} \rightarrow \frac{0}{2 - 0} = \frac{0}{2} = 0.$$

(ii) Διαιρούμε αριθμητή και παρονομαστή με το  $n^3$  και έχουμε

$$\frac{n^3 - 2n + 1}{5n^3 + n^2 + 1} = \frac{1 - \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^3}}{5 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^3}} \rightarrow \frac{1 - 2 \cdot 0 + 0}{5 + 0 + 0} = \frac{1}{5}.$$

(iii) Θεωρούμε τα πολυώνυμα  $p(x) = a_k x^k + \dots + a_0$  και  $q(x) = b_m x^m + \dots + b_0$  με  $a_k, b_m \neq 0$ . Διαιρούμε αριθμητή και παρονομαστή με το  $n^m$  και έχουμε

$$\frac{p(n)}{q(n)} = \frac{\frac{a_k}{n^{m-k}} + \dots + \frac{a_0}{n^m}}{b_m + \dots + \frac{b_0}{n^m}}.$$

Είναι σαφές ότι ο παρονομαστής συγκλίνει στον αριθμό

$$b_m + \dots + b_0 \cdot 0 = b_m.$$

Αν  $k = m$  τότε στον αριθμητή του προηγούμενου κλάσματος έχουμε  $n^{m-k} = 1$  και όλοι οι άλλοι εκθέτες του  $n$  είναι θετικοί. Επομένως ο αριθμητής του κλάσματος συγκλίνει στον αριθμό

$$a_k + \dots + a_0 \cdot 0 = a_k,$$

Άρα  $\frac{p(n)}{q(n)} \rightarrow \frac{a_k}{b_m}$ .

Αν  $k < m$  τότε  $n^{m-k} \geq n$  και άρα όλοι οι εκθέτες του  $n$  στον αριθμητή του πιο πάνω κλάσματος είναι θετικοί. Προκύπτει ότι ο αριθμητής συγκλίνει στον αριθμό

$$a_k \cdot 0 + \dots + a_0 \cdot 0 = 0.$$

Συνεπώς  $\frac{p(n)}{q(n)} \rightarrow \frac{0}{b_m} = 0$ .

**Άσκηση 6** (Υπολογισμός ορίων). Υπολογίστε τα όρια των πιο κάτω ακολουθιών:

(i)  $a_n = \left(-\frac{7}{8}\right)^n + \sqrt[n]{n}, \quad n \geq 1.$

(ii)  $b_n = \frac{(-1)^n}{n}, \quad n \geq 1.$

(iii)  $c_n = \sqrt{n^2+2} - \sqrt{n^2+1}, \quad n \geq 1.$  **Υπόδειξη:** Θεωρήστε τη συζυγή παράσταση.

(iv)  $d_n = \frac{n^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^n + 1}{n^3 - \sqrt[n]{n} + 1}, \quad n \geq 1.$

(v)  $e_n = \sqrt[2n]{2n}, \quad n \geq 1.$  **Υπόδειξη:** Τι σχέση έχει η  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  με την  $x_n = \sqrt[n]{n}, n \geq 1$ ;

(vi)  $f_n = \sqrt[2n]{n}, \quad n \geq 1.$

**Λύση.**

(i) Αφού  $\left|-\frac{7}{8}\right| < 1$  έχουμε  $\left(-\frac{7}{8}\right)^n \rightarrow 0$ . Γνωρίζουμε επίσης ότι  $\sqrt[n]{n} \rightarrow 1$ . Συνεπώς

$$a_n = \left(-\frac{7}{8}\right)^n + \sqrt[n]{n} \rightarrow 0 + 1 = 1.$$

(ii) Προφανώς  $-1 \leq (-1)^n \leq 1$  και άρα

$$-\frac{1}{n} \leq \frac{(-1)^n}{n} \leq \frac{1}{n}, \quad \text{για κάθε } n \geq 1.$$

Αφού  $\frac{1}{n} \rightarrow 0$  και  $-\frac{1}{n} \rightarrow 0$  έχουμε από το Κριτήριο Παρεμβολής  $\frac{(-1)^n}{n} \rightarrow 0$ .

(iii) Πολλαπλασιάζουμε και διαιρούμε με τη συζυγή παράσταση  $\sqrt{n^2+2} + \sqrt{n^2+1}$  και έχουμε

$$\begin{aligned} c_n &= \sqrt{n^2+2} - \sqrt{n^2+1} \\ &= \frac{(\sqrt{n^2+2} - \sqrt{n^2+1}) \cdot (\sqrt{n^2+2} + \sqrt{n^2+1})}{\sqrt{n^2+2} + \sqrt{n^2+1}} \\ &= \frac{(n^2+2) - (n^2+1)}{(\sqrt{n^2+2} + \sqrt{n^2+1})} \\ &= \frac{1}{(\sqrt{n^2+2} + \sqrt{n^2+1})} \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{n^2} + \sqrt{n^2}} \quad (\text{γιατί } n^2 \leq n^2+1 \leq n^2+2) \\ &= \frac{1}{n+n} \\ &= \frac{1}{2n} \end{aligned}$$

Αφού  $n^2+1 \leq n^2+2$  έχουμε  $c_n \geq 0$  και άρα

$$0 \leq c_n \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n} \quad \text{για κάθε } n \geq 1.$$

Από το Κριτήριο Παρεμβολής έχουμε  $c_n \rightarrow 0$ .

(iv) Διαιρούμε αριθμητή-παρονομαστή με το  $n^3$  και έχουμε

$$d_n = \frac{n^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^n + 1}{n^3 - \sqrt[n]{n} + 1} = \frac{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n + \frac{1}{n^3}}{1 - \frac{1}{n^3} \cdot \sqrt[n]{n} + \frac{1}{n^3}} \rightarrow \frac{0 + 0 \cdot 0 + 0}{1 - 0 \cdot 1 + 0} = \frac{0}{1} = 0.$$

---

(v) Θέτουμε  $x_n = \sqrt[n]{n}$ ,  $n \geq 1$ . Παρατηρούμε ότι  $e_n = \sqrt[2n]{2n} = x_{2n}$ . Γνωρίζουμε ότι  $x_n \rightarrow 1$  και επομένως  $x_{2n} \rightarrow 1$ . Άρα  $\sqrt[2n]{2n} \rightarrow 1$ .

(vii) Θέτουμε όπως και πριν  $x_n = \sqrt[n]{n}$ ,  $n \geq 1$ . Παρατηρούμε ότι

$$\sqrt[2n]{n} = n^{\frac{1}{2n}} = \left(n^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sqrt[n]{n}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x_n}.$$

Αφού  $x_n \rightarrow 1$  έχουμε  $\sqrt{x_n} \rightarrow 1$ , δηλαδή  $\sqrt[2n]{n} \rightarrow 1$ .