



5ο Φυλλάδιο

Διδάσκοντες:
Β. Γρηγοριάδης
Κ. Παυλοπούλου
Γ. Μανουσάκης

Άσκηση 1. Θεωρούμε τα αόριστα ολοκληρώματα

$$I = \int \frac{1}{\sin^2 x \cdot \cos x} dx \quad \text{και} \quad J = \int \frac{1}{\sin^4 x \cdot \cos^2 x} dx.$$

(i) Να αναγάγετε τα I και J σε ολοκληρώματα ρητών συναρτήσεων με κατάλληλη αντικατάσταση.

(ii) Υπολογίστε τα αόριστα ολοκληρώματα I και J .

Λύση.

(i) Θεωρούμε τη συνάρτηση $R(u, v) = \frac{1}{u^2 \cdot v}$, $u, v \neq 0$, έτσι που

$$I = \int R(\sin x, \cos x) dx.$$

Παρατηρούμε ότι

$$R(u, -v) = \frac{1}{u^2 \cdot (-v)} = -R(u, v)$$

δηλαδή η R είναι περιττή ως προς v . (Προσοχή μην μπερδευτείτε με το ότι η συνάρτηση συνιμίτιο είναι άρτια - αυτό δεν έχει σχέση σε αυτό το σημείο.)

Σύμφωνα με τα γνωστά το ολοκλήρωμα $\int R(\sin x, \cos x) dx$ ανάγεται σε ολοκλήρωμα ρητής συνάρτησης εφαρμόζοντας την αντικατάσταση $t = \sin x$.

Έχουμε $dt = \cos x dx$ και

$$I = \int \frac{1}{\sin^2 x \cdot \cos x} dx = \int \frac{\cos x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} dx = \int \frac{1}{t^2 \cdot (1-t^2)} dt,$$

όπου πιο πάνω χρησιμοποιήσαμε ότι $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - t^2$. Επομένως έχουμε εκφράσει το I ως αόριστο ολοκλήρωμα της ρητής συνάρτησης $f(t) = \frac{1}{t^2 \cdot (1-t^2)}$, $t \neq 0$.

Στο ολοκλήρωμα J παίρνουμε $Q(u, v) = \frac{1}{u^4 \cdot v^2}$, $u, v \neq 0$, έτσι που

$$J = \int Q(\sin x, \cos x) dx.$$

Παρατηρούμε ότι η Q είναι άρτια ως προς το ζεύγος (u, v) , δηλαδή

$$Q(-u, -v) = \frac{1}{(-u)^4 \cdot (-v)^2} = \frac{1}{u^4 \cdot v^2} = Q(u, v).$$

Σύμφωνα με τα γνωστά το ολοκλήρωμα $\int Q(\sin x, \cos x) dx$ ανάγεται σε ολοκλήρωμα ρητής συνάρτησης εφαρμόζοντας την αντικατάσταση $t = \tan x$.

Έχουμε $dt = \frac{1}{\cos^2 x} dx$ και

$$J = \int \frac{1}{\sin^4 x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} dx,$$

άρα θέλουμε να εκφράσουμε την ποσότητα $1/\sin^4 x$ συναρτήσει του t . Αφού $t = \tan x$ έχουμε

$$\begin{aligned} \sin^2 x = t^2 \cos^2 x &\implies \sin^2 x = t^2(1 - \sin^2 x) \\ \implies \sin^2 x = t^2 - t^2 \sin^2 x &\implies \sin^2 x(1 + t^2) = t^2 \\ \implies \sin^2 x = \frac{t^2}{1 + t^2} &\implies \sin^4 x = \frac{t^4}{(1 + t^2)^2} \\ \implies \frac{1}{\sin^4 x} &= \frac{(1 + t^2)^2}{t^4}. \end{aligned}$$

Επομένως

$$J = \int \frac{(1 + t^2)^2}{t^4} dt.$$

(ii) Υπολογίζουμε το $I = \int \frac{1}{t^2(1-t^2)} dt$ ως συνάρτηση του t και μετά αντικαθιστούμε $t = \sin x$.

Παρατηρούμε ότι το κλάσμα είναι έκφραση του t^2 , δηλαδή αν θέσουμε $s = t^2$ τότε το κλάσμα μετατρέπεται σε $\frac{1}{s(1-s)}$, το οποίο αναλύεται εύκολα ως εξής:

$$\frac{1}{s(1-s)} = \frac{1}{s} + \frac{1}{1-s} = \frac{1}{t^2} + \frac{1}{1-t^2}.$$

Άρα

$$I = \int \frac{1}{t^2(1-t^2)} dt = \int \frac{1}{t^2} dt + \int \frac{1}{1-t^2} dt = -\frac{1}{t} + \int \frac{1}{1-t^2} dt.$$

Για να βρούμε το τελευταίο ολοκλήρωμα κάνουμε ακόμα μία ανάλυση κλάσματος,

$$\frac{1}{1-t^2} = \frac{1}{(1-t)(1+t)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-t} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+t}.$$

Καταλήγουμε

$$I = -\frac{1}{t} + \frac{1}{2} \cdot \int \frac{1}{1-t} dt + \frac{1}{2} \cdot \int \frac{1}{1+t} dt = -\frac{1}{t} - \frac{1}{2} \cdot \ln|1-t| + \frac{1}{2} \cdot \ln|1+t| + c.$$

(Το προτελευταίο ολοκλήρωμα προκύπτει με αντικατάσταση $u = -t$.) Θέτοντας πίσω $t = \sin x$ έχουμε

$$I = \frac{1}{2} \cdot \left(\ln(1 + \sin x) - \ln(1 - \sin x) - \frac{2}{\sin x} \right) + c.$$

Τέλος υπολογίζουμε το J . Εδώ δεν χρειάζεται να αναλύσουμε το κλάσμα γιατί ο παρονομαστής αποτελείται μόνο από έναν όρο, το t^4 .

$$J = \int \frac{(1+t^2)^2}{t^4} dt = \int \frac{1+2t^2+t^4}{t^4} dt = \int \frac{1}{t^4} dt + \int \frac{2}{t^2} dt + \int 1 dt = -\frac{1}{3t^3} - \frac{2}{t} + t + c.$$

Αφού $t = \tan x$ προκύπτει

$$J = \tan x - \frac{2}{\tan x} - \frac{1}{3 \tan^3 x} + c.$$

Άσκηση 2. Δίνεται $\rho \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι αν $\rho > 1$ τότε

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\rho} dx = \frac{1}{\rho - 1},$$

ενώ αν $\rho \leq 1$ το πιο πάνω γενικευμένο ολοκλήρωμα δεν ορίζεται.

Λύση.

Υποθέτουμε ότι $\rho > 1$ και θεωρούμε $R > 1$. Τότε

$$\int_1^R \frac{1}{x^\rho} dx = \int_1^R x^{-\rho} dx = \frac{x^{-\rho+1}}{-\rho+1} \Big|_1^R = \frac{1}{1-\rho} \cdot (R^{-\rho+1} - 1) = \frac{1}{\rho-1} \cdot \left(1 - \frac{1}{R^{\rho-1}}\right).$$

Επειδή $\rho > 1$ έχουμε $\lim_{R \rightarrow \infty} R^{\rho-1} = \infty$ και συνεπώς

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{R^{\rho-1}} = 0.$$

Άρα

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_1^R \frac{1}{x^\rho} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{\rho-1} \cdot \left(1 - \frac{1}{R^{\rho-1}}\right) = \frac{1}{\rho-1} \cdot (1-0) = \frac{1}{\rho-1}.$$

Καταλήγουμε ότι

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\rho} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_1^R \frac{1}{x^\rho} dx = \frac{1}{\rho-1}.$$

Αν $\rho < 1$ τότε $1 - \rho > 0$ και $\lim_{R \rightarrow \infty} R^{-\rho+1} = +\infty$. Όπως πιο πάνω έχουμε

$$\int_1^R \frac{1}{x^\rho} dx = \frac{1}{1-\rho} \cdot (R^{-\rho+1} - 1)$$

για κάθε $R > 1$ και άρα

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_1^R \frac{1}{x^\rho} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{1-\rho} \cdot (R^{-\rho+1} - 1) = +\infty.$$

Επομένως το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_1^\infty \frac{1}{x^\rho} dx$ δεν ορίζεται για $\rho < 1$. (Κάποια συγγράμματα αναφέρουν $\int_1^\infty \frac{1}{x^\rho} dx = +\infty$ όταν $\rho < 1$.)

Τέλος αν $\rho = 1$,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_1^R \frac{1}{x^\rho} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_1^R \frac{1}{x} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \ln(x) \Big|_1^R = \lim_{R \rightarrow \infty} \ln(R) = \infty.$$

Συνεπώς πάλι δεν ορίζεται το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_1^\infty \frac{1}{x^\rho} dx$.

Άσκηση 3. Δίνεται μια συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

(i) Αν ορίζεται το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^\infty f(x) dx$ δείξτε ότι

$$\int_{-\infty}^\infty f(x) dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(x) dx.$$

(ii) Δείξτε ότι το αντίστροφο του προηγούμενου ερωτήματος δεν ισχύει γενικά, δηλαδή μπορεί να υπάρχει στο \mathbb{R} το όριο $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(x) dx$ αλλά το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$\int_{-\infty}^\infty f(x) dx$ να μην ορίζεται.

Υπόδειξη. Θεωρήστε τη συνάρτηση $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$, $x \in \mathbb{R}$.

Λύση.

(i) Εφόσον ορίζεται το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε να ορίζονται τα γενικευμένα ολοκληρώματα $\int_c^{\infty} f(x) dx$, $\int_{-\infty}^c f(x) dx$ και

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^{\infty} f(x) dx.$$

Τότε υπάρχουν τα όρια $\lim_{R_1 \rightarrow -\infty} \int_{R_1}^c f(x) dx$ και $\lim_{R_2 \rightarrow \infty} \int_c^{R_2} f(x) dx$. Παίρνουμε $R_2 = R$ και $R_1 = -R$ (δηλαδή θεωρούμε ότι $R_1 = -R_2$) και έχουμε από πιο πάνω

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^c f(x) dx + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_c^R f(x) dx \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \left(\int_{-R}^c f(x) dx + \int_c^R f(x) dx \right) \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(x) dx. \end{aligned}$$

(ii) Για κάθε $R > 0$ έχουμε

$$\int_{-R}^R \frac{2x}{x^2+1} dx = \int_{-R}^R \frac{(x^2+1)'}{x^2+1} dx = \ln(x^2+1) \Big|_{-R}^R = \ln(R^2+1) - \ln(R^2+1) = 0,$$

άρα υπάρχει το όριο $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{2x}{x^2+1} dx$ και είναι ίσο με 0.

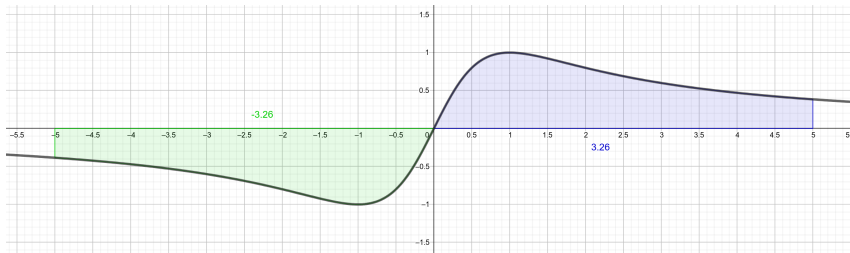
Από την άλλη για κάθε $c \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$\int_c^R \frac{2x}{x^2+1} dx = \ln(x^2+1) \Big|_c^R = \ln(R^2+1) - \ln(c^2+1) \xrightarrow{R \rightarrow \infty} \infty.$$

Άρα δεν ορίζεται το $\int_c^{\infty} \frac{2x}{x^2+1} dx$ και επομένως ούτε το $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x}{x^2+1} dx$.

(Όμοια μπορεί να δείξει κανείς ότι $\lim_{R \rightarrow -\infty} \int_R^c \frac{2x}{x^2+1} dx = -\infty$ και άρα επίσης δεν ορίζεται το $\int_{-\infty}^c \frac{2x}{x^2+1} dx$).

Σχήμα:



Πιο πάνω δίνεται η γραφική παράσταση της $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$, $x \in \mathbb{R}$. Αυτή είναι περιττή συνάρτηση, επομένως τα εμβαδά στην πράσινη και στην μπλε περιοχή είναι ίσα και στο ολοκλήρωμα προσμετρώνται με διαφορετικό πρόσημο. Με άλλα λόγια $\int_{-R}^0 \frac{2x}{x^2+1} dx = -\int_0^R \frac{2x}{x^2+1} dx$, ειδικότερα έχουμε $\int_{-R}^R \frac{2x}{x^2+1} dx = 0$.

Από την άλλη το εμβαδόν που καθορίζεται από τον θετικό ημιάξονα Ox και τη γραφική παράσταση της f είναι άπειρο και γι' αυτό δεν ορίζεται το $\int_0^\infty \frac{2x}{x^2+1} dx$. Παρατηρούμε επίσης ότι το άθροισμα $\lim_{R_1 \rightarrow -\infty} \int_{R_1}^0 f(x) dx + \lim_{R_2 \rightarrow \infty} \int_0^{R_2} f(x) dx$ οδηγεί στην απροσδιόριστη μορφή $\infty - \infty$.

Σημείωση. Για τη επίλυση της επόμενης άσκησης χρειάζονται κάποια στοιχεία από τη διάλεξη που θα γίνει την Παρασκευή 8 Δεκεμβρίου.

Άσκηση 4.

(i) Εξετάστε ποια από τα ακόλουθα γενικευμένα ολοκληρώματα ορίζονται και σε αυτή την περίπτωση υπολογίστε τα:

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2} dx, \quad \int_0^1 \frac{1}{x} dx, \quad \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx.$$

(ii) Με βάση το πιο πάνω ερώτημα για ποια $\rho \in \mathbb{R}$ περιμένετε να ορίζεται το ολοκλήρωμα

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\rho} dx;$$

Διατυπώστε και αποδείξτε τον ισχυρισμό σας. Όπου ορίζεται το ολοκλήρωμα υπολογίστε το.

Τι παρατηρείτε σε σχέση με το $\int_1^\infty \frac{1}{x^\rho} dx$ (Άσκηση 2);

Λύση.

(i) Για κάθε $r > 0$ έχουμε

$$\int_r^1 \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} \Big|_r^1 = -1 + \frac{1}{r}$$

$$\int_r^1 \frac{1}{x} dx = \ln x \Big|_r^1 = \ln 1 - \ln r = -\ln r$$

$$\int_r^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \int_r^1 x^{-1/2} dx = \frac{x^{1/2}}{1/2} \Big|_r^1 = 2\sqrt{x} \Big|_r^1 = 2(\sqrt{1} - \sqrt{r}) = 2 - 2\sqrt{r}.$$

Παίρνοντας το όριο όταν το r τείνει στο 0 από δεξιά έχουμε

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \left(-1 + \frac{1}{r}\right) = +\infty, \quad \lim_{r \rightarrow 0^+} (-\ln r) = +\infty, \quad \lim_{r \rightarrow 0^+} (2 - 2\sqrt{r}) = 2.$$

Άρα τα δύο πρώτα ολοκληρώματα $\int_0^1 \frac{1}{x^2} dx$ και $\int_0^1 \frac{1}{x} dx$ δεν ορίζονται, ενώ το τρίτο ολοκλήρωμα $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ ορίζεται και είναι ίσο με 2.

(ii) Από το πιο πάνω ερώτημα βλέπουμε ότι το ολοκλήρωμα $\int_0^1 \frac{1}{x^\rho} dx$ δεν ορίζεται για $\rho = 1, 2$ ενώ ορίζεται για $\rho = 1/2$. Ισχυριζόμαστε ότι το ολοκλήρωμα $\int_0^1 \frac{1}{x^\rho} dx$ ορίζεται αν και μόνο αν $\rho < 1$.

Παρατηρούμε ότι αυτό λειτουργεί συμπληρωματικά σε σχέση με το ολοκλήρωμα $\int_1^\infty \frac{1}{x^\rho} dx$: σύμφωνα με την Άσκηση 2 το ολοκλήρωμα $\int_1^\infty \frac{1}{x^\rho} dx$ ορίζεται αν και μόνο $\rho > 1$. (Για $\rho = 1$ δεν ορίζεται κανένα από αυτά τα ολοκληρώματα.)

Για να δείξουμε τον ισχυρισμό μας θεωρούμε $\rho \in \mathbb{R}$ με $\rho \neq 1$. (Όπως είδαμε στο προηγούμενο ερώτημα το $\int_r^1 \frac{1}{x^\rho} dx$ δεν ορίζεται για $\rho = 1$.) Τότε για κάθε $r > 0$ έχουμε

$$\int_r^1 \frac{1}{x^\rho} dx = \int_r^1 x^{-\rho} dx = \frac{x^{-\rho+1}}{-\rho+1} \Big|_r^1 = \frac{1}{1-\rho} \cdot (1 - r^{1-\rho}).$$

Γνωρίζουμε ότι $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha = 0$ για $\alpha > 0$ και $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha = +\infty$ για $\alpha < 0$. Επομένως αν $1 - \rho > 0$, δηλαδή αν $\rho < 1$, ισχύει $\lim_{r \rightarrow 0^+} r^{1-\rho} = 0$ και άρα

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \int_r^1 \frac{1}{x^\rho} dx = \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{1}{1-\rho} \cdot (1 - r^{1-\rho}) = \frac{1}{1-\rho},$$

Επομένως

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\rho} dx = \frac{1}{1-\rho}, \quad \rho < 1.$$

Από την άλλη αν $1 - \rho < 0$, δηλαδή αν $\rho > 1$, ισχύει $\lim_{r \rightarrow 0^+} r^{1-\rho} = +\infty$ και άρα το $\int_0^1 \frac{1}{x^\rho} dx$ δεν ορίζεται. Αυτό αποδεικνύει τον ισχυρισμό μας.