



5ο Φυλλάδιο

Διδάσκοντες:
Β. Γρηγοριάδης
Κ. Παυλοπούλου
Γ. Μανουσάκης

Άσκηση 1. Θεωρούμε τα αόριστα ολοκληρώματα

$$I = \int \frac{1}{\sin^2 x \cdot \cos x} dx \quad \text{και} \quad J = \int \frac{1}{\sin^4 x \cdot \cos^2 x} dx.$$

- (i) Να αναγάγετε τα I και J σε ολοκληρώματα ρητών συναρτήσεων με κατάλληλη αντικατάσταση.
(ii) Υπολογίστε τα αόριστα ολοκληρώματα I και J .

Άσκηση 2. Δίνεται $\rho \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι αν $\rho > 1$ τότε

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^\rho} dx = \frac{1}{\rho - 1},$$

ενώ αν $\rho \leq 1$ το πιο πάνω γενικευμένο ολοκλήρωμα δεν ορίζεται.

Άσκηση 3. Δίνεται μια συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

- (i) Αν ορίζεται το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ δείξτε ότι

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(x) dx.$$

- (ii) Δείξτε ότι το αντίστροφο του προηγούμενου ερωτήματος δεν ισχύει γενικά, δηλαδή μπορεί να υπάρχει στο \mathbb{R} το όριο $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(x) dx$ αλλά το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ να μην ορίζεται.

Υπόδειξη. Θεωρήστε τη συνάρτηση $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$, $x \in \mathbb{R}$.

Σημείωση. Για τη επίλυση της επόμενης άσκησης χρειάζονται κάποια στοιχεία από τη διάλεξη που θα γίνει την Παρασκευή 8 Δεκεμβρίου.

Άσκηση 4.

- (i) Εξετάστε ποια από τα ακόλουθα γενικευμένα ολοκληρώματα ορίζονται και σε αυτή την περίπτωση υπολογίστε τα:

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2} dx, \quad \int_0^1 \frac{1}{x} dx, \quad \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx.$$

(ii) Με βάση το πιο πάνω ερώτημα για ποια $\rho \in \mathbb{R}$ περιμένετε να ορίζεται το ολοκλήρωμα

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\rho} dx;$$

Διατυπώστε και αποδείξτε τον ισχυρισμό σας. Όπου ορίζεται το ολοκλήρωμα υπολογίστε το.

Τι παρατηρείτε σε σχέση με το $\int_1^\infty \frac{1}{x^\rho} dx$ (Άσκηση 2);