Μαθηματική Ανάλυση και Γραμμική Άλγεβρα

Ασκήσεις στην Ανάλυση

Χειμερινό Εξάμηνο 2023-2024

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Σχολή Πολιτικών Μηχανικών

3ο Φυλλάδιο

Διδάσκοντες:
Β. Γρηγοριάδης
Κ. Παυλοπούλου
Γ. Μανουσάκης

Άσκηση 1 (Πολυνώνυμο Taylor Εκθετικής Συνάρτησης). Θεωρούμε την εκθετική συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = e^x$. Δείξτε ότι το πολυώνυμο Taylor P_n της f τάξης $n \in \mathbb{N}$ στο σημείο $x_0 = 0$ δίνεται από τον τύπο

$$P_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Ισοδύναμα

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Λύση.
Αφού $f^{(k)}(0) = 1$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$\begin{aligned} P_n(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \cdot (x-0)^k \qquad \text{(από τον ορισμό)} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \cdot x^k \ . \end{aligned}$$

Άσκηση 2 (Πολυνώνυμο Taylor Λογαρίθμου). Δείξτε ότι το πολυώνυμο Taylor P_n της συνάρτησης

$$f : (-1,1) \to \mathbb{R} : f(x) = \ln(1+x)$$

τάξης n στο σημείο 0 δίνεται από τον τύπο

$$P_n(x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \cdot \frac{x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^n}{n} \ .$$

Λύση.
Από προηγούμενη άσκηση έχουμε ότι $f^{(k)}(0) = (-1)^{k-1} \cdot (k-1)!$ για κάθε $k \geq 1$. Επομένως ισχύει

$$\begin{aligned} P_n(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \cdot (x-0)^k \qquad \text{(ορισμός } P_n\text{)} \\ &= f(0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \cdot (x-0)^k \qquad \text{(διαχωρίζουμε περιπτώσεις } k=0 \text{ και } k \geq 1\text{)} \\ &= \ln 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1} \cdot (k-1)!}{k!} \cdot x^k \qquad \text{(από τα προηγούμενα)} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \cdot x^k \qquad \text{(ισχύει } k! = (k-1)! \cdot k\text{)} \end{aligned}$$

$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^n}{n} \ .$$

Άσκηση 3. Βρείτε όλα τα πολυώνυμα Taylor στο 0 της συνάρτησης του ημιτόνου με τη βοήθεια του ακόλουθου τύπου:

$$\sin^{(k)}(0) = \begin{cases} (-1)^j, & k = 2j+1 \\ 0, & k = 2j. \end{cases}$$

Λύση.
Έστω P_m τα ζητούμενα πολυώνυμα, $m \in \mathbb{N}$. Αρχικά βρίσκουμε τα P_{2n+1} και μετά τα P_{2n}, όπου $n \in \mathbb{N}$. Έχουμε

$$\begin{aligned} P_{2n+1}(x) &= \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{\sin^{(k)}(0)}{k!} \cdot x^k \\ &= \sum_{j=0}^{n} \frac{\sin^{(2j+1)}(0)}{(2j+1)!} \cdot x^{2j+1} \quad \text{(γιατί για } k = 2j \text{ η παράγωγος είναι 0)} \\ &= \sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^j}{(2j+1)!} \cdot x^{2j+1} \quad \text{(από τον τύπο).} \end{aligned}$$

Προφανώς το $P_{2n+2}(x)$ διαφέρει από το $P_{2n+1}(x)$ κατά τον παράγοντα $\frac{\sin^{(2n+2)}(0)}{(2n+2)!} \cdot x^{2n+2}$. Αφού όμως $\sin^{(2n+2)}(0) = 0$ προκύπτει ότι $P_{2n+2}(x) = P_{2n+1}(x)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Απομένει να βρούμε το P_0. Αυτό όμως είναι άμεσο: $P_0(x) = \frac{\sin^{(0)}(0)}{0!} \cdot x^0 = \sin(0) \cdot x^0 = 0$.

Συνοψίζοντας έχουμε

$$\begin{aligned} P_{2n+1}(x) &= \sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^j}{(2j+1)!} \cdot x^{2j+1} \\ P_{2n+2}(x) &= P_{2n+1}(x) \\ P_0 &= 0. \end{aligned}$$

Άσκηση 4. Βρείτε όλα τα πολυώνυμα Taylor στο 0 της συνάρτησης του συνημιτόνου με τη βοήθεια του ακόλουθου τύπου:

$$\cos^{(k)}(0) = \begin{cases} (-1)^j, & k = 2j \text{ για κάποιο } j \in \mathbb{N} \\ 0, & k = 2j+1 \text{ για κάποιο } j \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Λύση.
Έστω P_m τα ζητούμενα πολυώνυμα, $m \in \mathbb{N}$. Αρχικά βρίσκουμε τα P_{2n} και μετά τα P_{2n+1}, όπου $n \in \mathbb{N}$. Έχουμε

$$\begin{aligned} P_{2n}(x) &= \sum_{k=0}^{2n} \frac{\cos^{(k)}(0)}{k!} \cdot x^k \\ &= \sum_{j=0}^{n} \frac{\cos^{(2j)}(0)}{(2j)!} \cdot x^{2j} \quad \text{(γιατί για } k = 2j+1 \text{ η παράγωγος είναι 0)} \\ &= \sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^j}{(2j)!} \cdot x^{2j} \quad \text{(από τον τύπο).} \end{aligned}$$

Προφανώς το $P_{2n+1}(x)$ διαφέρει από το $P_{2n}(x)$ κατά τον παράγοντα $\dfrac{\cos^{(2n+1)}(0)}{(2n+1)!} \cdot x^{2n+1}$. Αφού όμως $\cos^{(2n+1)}(0) = 0$ προκύπτει ότι $P_{2n+1}(x) = P_{2n}(x)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Απομένει να βρούμε το P_0. Αυτό όμως είναι άμεσο: $P_0(x) = \dfrac{\cos^{(0)}(0)}{0!} \cdot x^0 = \cos(0) \cdot x^0 = 1$.

Συνοψίζοντας έχουμε

$$P_{2n}(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^j}{(2j)!} \cdot x^{2j}$$

$$P_{2n+1}(x) = P_{2n}(x)$$

$$P_0 = 1.$$

Άσκηση 5.

(i) Βρείτε έναν φυσικό αριθμό n για τον οποίο

$$e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < 10^{-4}.$$

(ii) Βρείτε (με απόδειξη) τον ελάχιστο φυσικό αριθμό n με την πιο πάνω ιδιότητα.

Λύση.

(i) Το πολυώνυμο Taylor P_n της e^x στο 0 είναι το

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} \ .$$

Συμβολίζουμε με R_n το αντίστοιχο υπόλοιπο. Παίρνουμε $x = 1$ και $n \in \mathbb{N}$. Παρατηρούμε ότι

$$P_n(1) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1^k}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

και άρα

$$e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = e - P_n(1) = R_n(1).$$

Από τη μορφή Lagrange του υπολοίπου υπάρχει $\xi \in (0,1)$ έτσι ώστε

$$R_n(1) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot (1-0)^{n+1} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

όπου $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$. Επειδή $f^{(m)}(x) = f(x)$ για κάθε $m \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$R_n(1) = \frac{f(\xi)}{(n+1)!} = \frac{e^\xi}{(n+1)!}$$

και συνεπώς

$$e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = R_n(1) = \frac{e^\xi}{(n+1)!} \ . \tag{1}$$

Επειδή η e^x είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση και $\xi < 1$ έχουμε

$$\frac{e^\xi}{(n+1)!} < \frac{e^1}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!} \ .$$

Ειδικότερα από την (1) έχουμε

$$e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < \frac{3}{(n+1)!}. \tag{2}$$

Επομένως αρκεί να έχουμε $\dfrac{3}{(n+1)!} < 10^{-4}$. Ισοδύναμα $(n+1)! > 30000$. Υπολογίζουμε

$$5! = 120, \quad 6! = 720, \quad 7! = 720 \cdot 7 = 5040, \quad 8! = 5040 \cdot 8 = 40320 > 30000.$$

Επομένως αρκεί να έχουμε $n+1 = 8$ δηλαδή $n = 7$.

Προσοχή. Θέτοντας $n = 6$ στην (2) βλέπουμε ότι $e - \sum_{k=0}^{6} \dfrac{1}{k!} < \dfrac{3}{7!} = \dfrac{3}{5040}$. Η τελευταία ανισότητα δεν μπορεί να αποκλείσει το ενδεχόμενο η προσέγγιση του $\sum_{k=0}^{6} \dfrac{1}{k!}$ στο e να είναι πολύ μικρότερη του $3 \cdot 5040^{-1}$, ίσως και μικρότερη του 10^{-4}. Επομένως δεν μπορούμε να συμπεράνουμε ακόμα ότι το $n = 7$ είναι ο ελάχιστος φυσικός n με $e - \sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k!} < 10^{-4}$. Αυτό ουσιαστικά είναι το ζητούμενο του επόμενου ερωτήματος.

(ii) Από την (1) και το γεγονός ότι η e^x είναι αύξουσα συνάρτηση έχουμε

$$e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \frac{e^{\xi}}{(n+1)!} > \frac{e^0}{(n+1)!} = \frac{1}{(n+1)!} \ .$$

Για $n = 6$ έχουμε

$$e - \sum_{k=0}^{6} \frac{1}{k!} > \frac{1}{7!} = \frac{1}{5040} \ .$$

Αλλά $5040 < 10000 = 10^4$, άρα $e - \sum_{k=0}^{6} \dfrac{1}{k!} > \dfrac{1}{5040} > 10^{-4}$.

Επομένως ο $n = 7$ είναι ο ελάχιστος φυσικός αριθμός με $e - \sum_{k=0}^{7} \dfrac{1}{k!} < 10^{-4}$.

Άσκηση 6. Δείξτε ότι

$$\left| \cos(2x) - \left(1 - \frac{4x^2}{2!} + \frac{16x^4}{4!}\right) \right| \leq \frac{64x^6}{6!}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Λύση.
Αρχικά δείχνουμε μια ανισότητα με βάση το $\cos x$ και το πολυώνυμο Taylor P_5 της $\cos x$ στο 0 - έπειτα αντικαθιστούμε το x με το $2x$. Το 5 υπαγορεύεται από την εκφώνηση όπου το σφάλμα στην προσέγγιση είναι $64x^6/6!$, με άλλα λόγια **το υπόλοιπο Taylor πρέπει να έχει τάξη** 6. Αυτό συμβαίνει όταν το πολυώνυμο Taylor είναι το P_5.

Υπενθυμίζουμε ότι τα πολυώνυμα Taylor της $\cos x$ στο 0 δίνονται από

$$1, \quad 1 - \frac{x^2}{2!}, \quad 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}, \quad 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!}, \quad \ldots$$

Για να βρούμε το πολυώνυμο Taylor P_5 στο 0 παίρνουμε τις δυνάμεις όπου ο εκθέτης φτάνει το πολύ μέχρι 5, δηλαδή

$$P_5(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \ .$$

(Δεν πειράζει που ο συντελεστής του x^5 είναι 0.)

Θεωρούμε $x \in \mathbb{R}$. Από τη μορφή Lagrange του υπολοίπου Taylor υπάρχει ξ ανάμεσα στο 0 και στο x με

$$R_5(x) = \frac{f^{(6)}(\xi)}{6!} \cdot x^6 = \frac{\cos^{(6)}(\xi)}{6!} \cdot x^6$$

όπου $R_5(x) = \cos(x) - P_5(x)$. Έχουμε $|\cos^{(6)}(\xi)| \leq 1$ (οι παράγωγοι του συνημιτόνου κάθε τάξης είναι της μορφής $\pm\sin$ ή $\pm\cos$), άρα

$$|\cos x - P_5(x)| = |R_5(x)| \leq \frac{1}{6!} \cdot |x^6|$$

$$\implies \left|\cos x - \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}\right)\right| \leq \frac{x^6}{6!}\ .$$

Το πιο πάνω ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$, επομένως μπορούμε να αντικαταστήσουμε το x με το $2x$ και παίρνουμε

$$\left|\cos(2x) - \left(1 - \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!}\right)\right| \leq \frac{(2x)^6}{6!}\ .$$

Δηλαδή

$$\left|\cos(2x) - \left(1 - \frac{4x^2}{2!} + \frac{16x^4}{4!}\right)\right| \leq \frac{64x^6}{6!}\ .$$

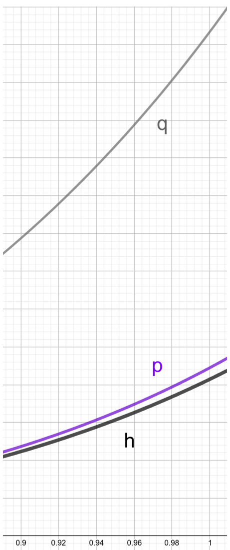
Σχόλιο: Επειδή ο συντελεστής του x^5 στο $P_5(x)$ είναι 0 έχουμε ότι $P_5(x) = P_4(x)$. Άρα το $|\cos x - P_5(x)|$ παραμένει το ίδιο με το $|\cos x - P_4(x)| = |R_4(x)|$. Μπορούμε να εφαρμόσουμε τα ίδια παίρνοντας το υπόλοιπο R_4 αντί του R_5. Όπως με πριν καταλήγουμε στο $|R_4(x)| \leq \frac{|x|^5}{5!}$. Τέλος αντικαθιστώντας το x με το $2x$ παίρνουμε

$$\left|\cos(2x) - \left(1 - \frac{4x^2}{2!} + \frac{16x^4}{4!}\right)\right| = |\cos(2x) - P_4(2x)| = |R_4(2x)| \leq \frac{|2x|^5}{5!} = \frac{32|x|^5}{5!}.$$

Με άλλα λόγια η προσέγγιση με σφάλμα το πολύ $\frac{32|x|^5}{5!}$ είναι επίσης σωστή. Όμως η προσέγγιση της εκφώνησης, δηλαδή με σφάλμα το πολύ $\frac{64|x|^6}{6!}$, είναι ακριβέστερη όταν $0 < |x| < 3$. Για να δούμε το τελευταίο παρατηρούμε ότι

$$\frac{64|x|^6}{6!} < \frac{32|x|^5}{5!} \iff \frac{2|x|^6}{6} < |x|^5 \iff |x| < 3, \qquad \text{όπου } x \neq 0.$$

Πιο κάτω δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των $h(x) = \left|\cos(2x) - \left(1 - \frac{4x^2}{2!} + \frac{16x^4}{4!}\right)\right|$, $p(x) = \frac{64x^6}{6!}$ και $q(x) = \frac{32|x|^5}{5!}$ γύρω από το $x = 0,96$ για να δούμε την τάξη μεγέθους στη διαφορά των σφαλμάτων:



Όπως βλέπουμε στην περιοχή του $x = 0,96$ η συνάρτηση p είναι αρκετά καλύτερη προσέγγιση της h σε σχέση με την q.

Άσκηση 7. Δείξτε ότι
$$\left|\sin 1-\left(1-\frac{1}{3!}\right)\right|<10^{-2}.$$

Λύση.
Το πολυώνυμο Taylor P_4 της συνάρτησης ημίτονο στο 0 είναι το
$$P_4(x)=x-\frac{x^3}{3!}\ .$$
Για το $x=1$ υπάρχει από τη μορφή Lagrange του υπολοίπου ένα $\xi\in(0,1)$ με
$$R_4(1)=\frac{\sin^{(5)}(\xi)}{5!}\cdot 1^5=\frac{\sin^{(5)}(\xi)}{5!}\ ,$$
όπου
$$R_4(1)=\sin 1-P_4(1)=\sin 1-\left(1-\frac{1}{3!}\right).$$
Τότε
$$\left|\sin 1-\left(1-\frac{1}{3!}\right)\right|=|R_4(1)|=\left|\frac{\sin^{(5)}(\xi)}{5!}\right|\leq\frac{1}{5!}=\frac{1}{120}<10^{-2}.$$

Άσκηση 8. Βρείτε ένα ανοικτό διάστημα I με κέντρο το 0 έτσι ώστε για κάθε $x\in I$ να ισχύει
$$\left|\sin x-\left(x-\frac{x^3}{3!}\right)\right|<10^{-4}.$$

Λύση.
Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=\sin x, x\in\mathbb{R}$. Συμβολίζουμε με P_4 το πολυώνυμο Taylor της f στο 0 τάξης 4 και με R_4 το αντίστοιχο υπόλοιπο.

Θεωρούμε ένα $x\in\mathbb{R}$. Τότε $P_4(x)=x-\dfrac{x^3}{3!}$, επομένως
$$\sin x-\left(x-\frac{x^3}{3!}\right)=f(x)-P_4(x)=R_4(x).$$

Από τη μορφή Lagrange του υπολοίπου υπάρχει ξ ανάμεσα στο 0 και στο x έτσι ώστε
$$R_4(x)=\frac{f^{(5)}(\xi)}{5!}\cdot(x-0)^5.$$

Ισχύει $|f^{(5)}(\xi)|\leq 1$ άρα
$$|R_4(x)|\leq\frac{1}{5!}\cdot|x|^5.$$

Άρα αν έχουμε

(3)
$$\frac{|x|^5}{5!}<10^{-4}$$

τότε θα ισχύει

(4)
$$\left|\sin x-\left(x-\frac{x^3}{3!}\right)\right|=|R_4(x)|\leq\frac{|x|^5}{5!}<10^{-4}.$$

Επιλύουμε την ανίσωση (3):
$$\begin{aligned}
&\iff \frac{|x|^5}{5!}<10^{-4}\\
&\iff |x|^5<10^{-4}\cdot 5!\\
&\iff |x|^5<120\cdot 10^{-4}\\
&\iff |x|^5<1,2\cdot 10^{-2}
\end{aligned}$$

$$\iff \ |x| < \sqrt[5]{1,2\cdot 10^{-2}}$$

$$\iff \ -\sqrt[5]{1,2\cdot 10^{-2}} < x < \sqrt[5]{1,2\cdot 10^{-2}}.$$

Επομένως για κάθε $x \in \left(-\sqrt[5]{1,2\cdot 10^{-2}}, \sqrt[5]{1,2\cdot 10^{-2}}\right)$ έχουμε από την (4) ότι ισχύει

$$\left|\sin x - \left(x - \frac{x^3}{3!}\right)\right| < 10^{-4},$$

δηλαδή το ζητούμενο.

Οπότε **ένα κατάλληλο** διάστημα είναι το

$$I = \left(-\sqrt[5]{1,2\cdot 10^{-2}}, \sqrt[5]{1,2\cdot 10^{-2}}\right).$$