Μαθηματική Ανάλυση και Γραμμική Άλγεβρα

Ασκήσεις στην Ανάλυση

Χειμερινό Εξάμηνο 2023-2024

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Σχολή Πολιτικών Μηχανικών

3ο Φυλλάδιο

Διδάσκοντες:
Β. Γρηγοριάδης
Κ. Παυλοπούλου
Γ. Μανουσάκης

Άσκηση 1 (Πολυνώνυμο Taylor Εκθετικής Συνάρτησης). Θεωρούμε την εκθετική συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = e^x$. Δείξτε ότι το πολυώνυμο Taylor P_n της f τάξης $n \in \mathbb{N}$ στο σημείο $x_0 = 0$ δίνεται από τον τύπο

$$P_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Ισοδύναμα

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Άσκηση 2 (Πολυνώνυμο Taylor Λογαρίθμου). Δείξτε ότι το πολυώνυμο Taylor P_n της συνάρτησης

$$f : (-1, 1) \to \mathbb{R} : f(x) = \ln(1 + x)$$

τάξης n στο σημείο 0 δίνεται από τον τύπο

$$P_n(x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \cdot \frac{x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^n}{n} \ .$$

Άσκηση 3. Βρείτε όλα τα πολυώνυμα Taylor στο 0 της συνάρτησης του ημιτόνου με τη βοήθεια του ακόλουθου τύπου:

$$\sin^{(k)}(0) = \begin{cases} (-1)^j, & k = 2j + 1 \\ 0, & k = 2j. \end{cases}$$

Άσκηση 4. Βρείτε όλα τα πολυώνυμα Taylor στο 0 της συνάρτησης του συνημιτόνου με τη βοήθεια του ακόλουθου τύπου:

$$\cos^{(k)}(0) = \begin{cases} (-1)^j, & k = 2j \text{ για κάποιο } j \in \mathbb{N} \\ 0, & k = 2j + 1 \text{ για κάποιο } j \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Άσκηση 5.

(i) Βρείτε έναν φυσικό αριθμό n για τον οποίο

$$e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < 10^{-4}.$$

(ii) Βρείτε (με απόδειξη) τον ελάχιστο φυσικό αριθμό n με την πιο πάνω ιδιότητα.

Άσκηση 6. Δείξτε ότι

$$\left|\cos(2x) - \left(1 - \frac{4x^2}{2!} + \frac{16x^4}{4!}\right)\right| \leq \frac{64x^6}{6!}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Άσκηση 7. Δείξτε ότι

$$\left|\sin 1 - \left(1 - \frac{1}{3!}\right)\right| < 10^{-2}.$$

Άσκηση 8. Βρείτε ένα ανοικτό διάστημα I με κέντρο το 0 έτσι ώστε για κάθε $x \in I$ να ισχύει

$$\left|\sin x - \left(x - \frac{x^3}{3!}\right)\right| < 10^{-4}.$$