Μαθηματική Ανάλυση και Γραμμική Άλγεβρα

Ασκήσεις στην Ανάλυση

Χειμερινό Εξάμηνο 2023-2024

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Σχολή Πολιτικών Μηχανικών

2ο Φυλλάδιο

Διδάσκοντες:
Β. Γρηγοριάδης
Κ. Παυλοπούλου
Γ. Μανουσάκης

Συμβολισμός. Για κάθε $n = 1, 2, \dots$ συμβολίζουμε με $f^{(n)}$ τη n-στη παράγωγο της f. Με $f^{(0)}$ εννοούμε την f. Επομένως $f^{(0)} = f$, $f^{(1)} = f'$, $f^{(2)} = f''$ κ.τ.λ.

Άσκηση 1 (Χρήση του συμβολισμού Σ). Συμπληρώστε τα πιο κάτω κενά.

$$17 \cdot \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{\dots}^{\dots} \dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k = \sum_{\dots}^{\dots} \dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{j=0}^{\dots} a_{\dots}$$

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x^k\right) + x^{n+1} = \sum_{k=1}^{\dots} \dots\dots\dots\dots\dots$$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \qquad \text{όπου } a, b \neq 0 \text{ και } n \in \mathbb{N}^*.$$

Λύση.

$$17 \cdot \sum_{k=1}^{n} a_k = 17 \cdot (a_1 + \dots + a_n) = 17 \cdot a_1 + \dots + 17 \cdot a_n = \sum_{k=1}^{n} 17 \cdot a_k$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k &= (a_1 + \dots + a_n) + (b_1 + \dots + b_n) = (a_1 + b_1) + \dots + (a_n + b_n) \\ &= \sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)\end{aligned}$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + \dots + a_n = \sum_{j=0}^{n-1} a_{j+1}$$

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x^k\right) + x^{n+1} = (x + x^2 + \dots x^n) + x^{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} x^k$$

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} \cdot a^n \cdot b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} \cdot b + \dots + \binom{n}{k} \cdot a^{n-k} \cdot b^k + \dots + \binom{n}{n} \cdot a^0 \cdot b^n$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^{n-k} \cdot b^k \qquad \text{(Διώνυμο Νεύτωνα).}$$

Σχόλιο: Είναι επίσης σωστό ότι $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^k \cdot b^{n-k}$, απλά τότε ο πρώτος όρος θα είναι ο $\binom{n}{0} \cdot a^0 \cdot b^n$.

Άσκηση 2 (Εκθετική Συνάρτηση - Παράγωγοι στο $x_0 = 0$). Δίνεται η εκθετική συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = e^x$. Δείξτε ότι $f^{(n)}(0) = 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Λύση.
Δείχνουμε την ισχυρότερη σχέση $f^{(n)}(x) = e^x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Εφαρμόζουμε την Αρχής της Επαγωγής: για $n = 0$ έχουμε προφανώς $f^{(0)}(x) = f(x) = e^x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι για κάποιο $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $f^{(n)}(x) = e^x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και δείχνουμε ότι $f^{(n+1)}(x) = e^x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Έχουμε

$$f^{(n+1)}(x) = \left(f^{(n)}(x)\right)' = (e^x)' = e^x, \quad x \in \mathbb{R},$$

όπου στη δεύτερη ισότητα πιο πάνω χρησιμοποιήσαμε την Επαγωγική Υπόθεση. Από την Αρχή της Επαγωγής έχουμε το ζητούμενο.

Τέλος για να δείξουμε ότι $f^{(n)}(0) = 1$ παίρνουμε την ισότητα $f^{(n)}(x) = e^x$ και θέτουμε $x = 0$.

Άσκηση 3 (Παράγωγοι Συνάρτησης Λογαρίθμου στο $x_0 = 1$). Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g : (-1, 1) \to \mathbb{R}$:

$$g(x) = \frac{1}{1+x}\ , \qquad f(x) = \ln(1+x).$$

Δείξτε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει

$$g^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n \cdot n!}{(1+x)^{n+1}}\ , \quad x \in (-1, 1),$$

καθώς και ότι

$$f^{(k)}(0) = (-1)^{k-1} \cdot (k-1)!$$

για κάθε $k \geq 1$.

Λύση.
Ο ισχυρισμός για τη g αποδεικνύεται με επαγωγή. Για $n = 0$ έχουμε προφανώς $g^{(0)}(x) = g(x) = \frac{1}{1+x}$ και

$$\frac{(-1)^0 \cdot 0!}{(1+x)^{0+1}} = \frac{1 \cdot 1}{(1+x)^1} = \frac{1}{1+x} = g^{(0)}(x), \quad x \in (-1, 1).$$

Υποθέτουμε ότι για κάποιο $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $g^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n \cdot n!}{(1+x)^{n+1}}$, όπου $x \in (-1, 1)$. Δείχνουμε ότι

$$g^{(n+1)}(x) = \frac{(-1)^{n+1} \cdot (n+1)!}{(1+x)^{n+2}}, \qquad x \in (-1, 1).$$

Για κάθε $x \in (-1, 1)$ έχουμε

$$\begin{aligned} g^{(n+1)}(x) &= \left(g^{(n)}(x)\right)' \\ &= \left(\frac{(-1)^n \cdot n!}{(1+x)^{n+1}}\right)' \\ &= (-1)^n \cdot n! \cdot \left(\frac{1}{(1+x)^{n+1}}\right)' \end{aligned}$$

$$= (-1)^n \cdot n! \cdot [-(n+1)] \cdot (1+x)^{-(n+2)} \cdot (1+x)'$$

$$= (-1)^n \cdot (-1) \cdot n! \cdot (n+1) \cdot \frac{1}{(1+x)^{n+2}} \cdot 1$$

$$= \frac{(-1)^{n+1} \cdot (n+1)!}{(1+x)^{n+2}} .$$

Αυτό ολοκληρώνει το επαγωγικό βήμα. Από την Αρχή της Επαγωγής έχουμε το ζητούμενο.

Στη συνέχεια παρατηρούμε ότι $g = f'$ οπότε $g^{(n)} = f^{(n+1)}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ή αλλιώς $f^{(k)} = g^{(k-1)}$ για κάθε $k \geq 1$. Ειδικότερα για $x = 0$ έχουμε $f^{(k)}(0) = g^{(k-1)}(0)$, δηλαδή

$$f^{(k)}(0) = g^{(k-1)}(0) = \frac{(-1)^{k-1} \cdot (k-1)!}{(1+0)^{k-1+1}} = \frac{(-1)^{k-1} \cdot (k-1)!}{1^k} = (-1)^{k-1} \cdot (k-1)!$$

για κάθε $k \geq 1$.

Άσκηση 4 (Παράγωγοι ημιτόνου κάθε τάξης). Δείξτε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε

(1)

$$\sin^{(4n)}(x) = \sin(x), \quad \sin^{(4n+1)}(x) = \cos(x), \quad \sin^{(4n+2)}(x) = -\sin(x), \quad \sin^{(4n+3)}(x) = -\cos(x),$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$, όπου $f^{(m)}(x)$ είναι η παράγωγος της f τάξης $m \in \mathbb{N}$. (Με $f^{(0)}$ εννοούμε την f.) Συμπεράνετε ότι

$$\sin^{(k)}(0) = \begin{cases} (-1)^j, & k = 2j+1 \text{ για κάποιο } j \in \mathbb{N} \\ 0, & k = 2j \text{ για κάποιο } j \in \mathbb{N}. \end{cases} \tag{2}$$

Λύση.

Δείχνουμε τις ισότητες (1) με επαγωγή στο n. Ορίζουμε την ιδιότητα P ως εξής: ένας φυσικός αριθμός n ικανοποιεί την P ακριβώς όταν ικανοποιούνται **και οι τέσσερις** ισότητες στην (1) για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Για $n = 0$ έχουμε για κάθε $x \in \mathbb{R}$,

$$\sin^{(0)}(x) = \sin(x), \qquad \sin^{(1)} x = (\sin(x))' = \cos(x)$$

$$\sin^{(2)}(x) = (\cos(x))' = -\sin(x), \quad \sin^{(3)}(x) = (-\sin(x))' = -\cos(x).$$

Υποθέτουμε ότι κάποιο $n \in \mathbb{N}$ ικανοποιεί την ιδιότητα P και δείχνουμε το ίδιο για το $n+1$. Έστω $x \in \mathbb{R}$, για την πρώτη ισότητα έχουμε

$$\sin^{(4(n+1))}(x) = \sin^{(4n+4)}(x) = (\sin^{(4n+3)})'(x) = (-\cos(x))' = +\sin(x),$$

όπου στην προτελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε την Επαγωγική Υπόθεση και πιο συγκεκριμένα την *τέταρτη ισότητα* της (1). Για τις υπόλοιπες ισότητες,

$$\sin^{(4(n+1)+1)}(x) = \sin^{(4n+5)}(x) = (\sin^{(4n+4)}(x))' = (\sin(x))' = \cos(x)$$

$$\sin^{(4(n+1)+2)}(x) = \sin^{(4n+6)}(x) = (\sin^{(4n+5)}(x))' = (\cos(x))' = -\sin(x)$$

και

$$\sin^{(4(n+1)+3)}(x) = \sin^{(4n+7)}(x) = (\sin^{(4n+6)}(x))' = (-\sin(x))' = -\cos(x).$$

Επομένως το $n+1$ ικανοποιεί την ιδιότητα P και από την Αρχή της Επαγωγής έχουμε το ζητούμενο.

Για την (2) θεωρούμε έναν άρτιο φυσικό αριθμό $k \in \mathbb{N}$ και $j \in \mathbb{N}$ με $k = 2j$. Αν ο j είναι άρτιος τότε $j = 2n$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$ και $k = 4n$, ενώ αν ο j είναι περιττός τότε $j = 2n+1$ για κάποιο n και τότε $k = 2(2n+1) = 4n+2$. Από την (1) έχουμε $\sin^{(k)}(0) = \pm\sin(0) = 0$.

Τέλος θεωρούμε έναν περιττό φυσικό αριθμό $k \in \mathbb{N}$ και $j \in \mathbb{N}$ με $k = 2j+1$. Αν $j = 2n$ τότε $k = 4n+1$ οπότε από την (1) έχουμε $\sin^{(k)}(0) = \cos(0) = 1 = (-1)^{2n} = (-1)^j$, και αν $j = 2n+1$ τότε $k = 2\cdot(2n+1)+1 = 4n+3$ οπότε από την (1) έχουμε $\sin^{(k)}(0) = -\cos(0) = -1 = (-1)^{2n+1} = (-1)^j$. Σε κάθε περίπτωση έχουμε $\sin^{(k)}(0) = (-1)^j$, όταν $k = 2j+1$.

Άσκηση 5 (Παράγωγοι συνημιτόνου κάθε τάξης). Διατυπώστε και αποδείξτε τις αντίστοιχες με την Άσκηση 4 ισότητες για τη συνάρτηση του συνημιτόνου cos.

Λύση.
Οι αντίστοιχες ισότητες για τη συνάρτηση cos είναι

$$\cos^{(4n)}(x) = \cos(x), \quad \cos^{(4n+1)}(x) = -\sin(x), \quad \cos^{(4n+2)}(x) = -\cos(x), \quad \sin^{(4n+3)}(x) = \sin(x), \tag{3}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $n \in \mathbb{N}$. Στο $x = 0$ έχουμε

$$\cos^{(k)}(0) = \begin{cases} (-1)^j, & k = 2j \text{ για κάποιο } j \in \mathbb{N} \\ 0, & k = 2j+1 \text{ για κάποιο } j \in \mathbb{N}. \end{cases} \tag{4}$$

Δείχνουμε τις ισότητες της (3) με επαγωγή στο $n \in \mathbb{N}$. Για $n = 0$ έχουμε για κάθε $x \in \mathbb{R}$,

$$\cos^{(0)}(x) = \cos(x), \qquad \cos^{(1)} x = (\cos(x))' = -\sin(x)$$
$$\cos^{(2)}(x) = (-\sin(x))' = -\cos(x), \quad \cos^{(3)}(x) = (-\cos(x))' = +\sin(x).$$

Υποθέτουμε ότι οι ισότητες της (3) ισχύουν για κάποιο n και δείχνουμε ότι ισχύουν και για το $n+1$. Έστω $x \in \mathbb{R}$, τότε

$$\cos^{(4(n+1))}(x) = \cos^{(4n+4)}(x) = (\cos^{(4n+3)})'(x) = (\sin(x))' = \cos(x),$$

όπου στην προτελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε την Επαγωγική Υπόθεση και πιο συγκεκριμένα την τέταρτη ισότητα της (3). Για τις υπόλοιπες ισότητες,

$$\cos^{(4(n+1)+1)}(x) = \cos^{(4n+5)}(x) = (\cos^{(4n+4)}(x))' = (\cos(x))' = -\sin(x)$$
$$\cos^{(4(n+1)+2)}(x) = \cos^{(4n+6)}(x) = (\cos^{(4n+5)}(x))' = (-\sin(x))' = -\cos(x)$$

και

$$\cos^{(4(n+1)+3)}(x) = \cos^{(4n+7)}(x) = (\cos^{(4n+6)}(x))' = (-\cos(x))' = \sin(x).$$

Επομένως οι ισότητες ικανοποιούνται για το $n+1$ και από την Αρχή της Επαγωγής έχουμε το ζητούμενο.

Για τη (4) θεωρούμε έναν περιττό φυσικό αριθμό $k \in \mathbb{N}$ και $j \in \mathbb{N}$ με $k = 2j+1$. Αν $j = 2n$ τότε $k = 4n+1$ οπότε από την (3) έχουμε $\cos^{(k)}(0) = -\sin(0) = 0$, και αν $j = 2n+1$ τότε $k = 2 \cdot (2n+1) + 1 = 4n+3$ οπότε από την (3) έχουμε $\cos^{(k)}(0) = \sin(0) = 0$. Άρα $\sin^{(k)}(0) = 0$.

Τέλος θεωρούμε έναν άρτιο φυσικό αριθμό $k \in \mathbb{N}$ και $j \in \mathbb{N}$ με $k = 2j$. Αν ο j είναι άρτιος τότε $j = 2n$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$ και $k = 4n$. Από την (3) έχουμε $\cos^{(k)}(0) = \cos(0) = 1 = (-1)^{2n} = (-1)^j$. Αν ο j είναι περιττός τότε $j = 2n+1$ για κάποιο n και τότε $k = 2(2n+1) = 4n+2$. Επομένως από την (3) $\cos^{(k)}(0) = -\cos(0) = -1 = (-1)^{2n+1} = (-1)^j$.