Μαθηματική Ανάλυση και Γραμμική Άλγεβρα

Ασκήσεις στην Ανάλυση

Χειμερινό Εξάμηνο 2023-2024

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Σχολή Πολιτικών Μηχανικών

2ο Φυλλάδιο

Διδάσκοντες:
Β. Γρηγοριάδης
Κ. Παυλοπούλου
Γ. Μανουσάκης

Συμβολισμός. Για κάθε $n = 1, 2, \dots$ συμβολίζουμε με $f^{(n)}$ τη n-στη παράγωγο της f. Με $f^{(0)}$ εννοούμε την f. Επομένως $f^{(0)} = f$, $f^{(1)} = f'$, $f^{(2)} = f''$ κ.τ.λ.

Άσκηση 1 (Χρήση του συμβολισμού Σ). Συμπληρώστε τα πιο κάτω κενά.

$$17 \cdot \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{\dots}^{\dots} \dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k = \sum_{\dots}^{\dots} \dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{j=0}^{\dots} a_{\dots}$$

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x^k\right) + x^{n+1} = \sum_{k=1}^{\dots} \dots\dots\dots\dots\dots$$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \qquad \text{όπου } a, b \neq 0 \text{ και } n \in \mathbb{N}^*.$$

Άσκηση 2 (Εκθετική Συνάρτηση - Παράγωγοι στο $x_0 = 0$). Δίνεται η εκθετική συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = e^x$. Δείξτε ότι $f^{(n)}(0) = 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Άσκηση 3 (Παράγωγοι Συνάρτησης Λογαρίθμου στο $x_0 = 1$). Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g : (-1, 1) \to \mathbb{R}$:

$$g(x) = \frac{1}{1+x}\ , \qquad f(x) = \ln(1+x).$$

Δείξτε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει

$$g^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n \cdot n!}{(1+x)^{n+1}}\ , \quad x \in (-1, 1),$$

καθώς και ότι

$$f^{(k)}(0) = (-1)^{k-1} \cdot (k-1)!$$

για κάθε $k \geq 1$.

Άσκηση 4 (Παράγωγοι ημιτόνου κάθε τάξης). Δείξτε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε

(1)
$$\sin^{(4n)}(x) = \sin(x), \quad \sin^{(4n+1)}(x) = \cos(x), \quad \sin^{(4n+2)}(x) = -\sin(x), \quad \sin^{(4n+3)}(x) = -\cos(x),$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$, όπου $f^{(m)}(x)$ είναι η παράγωγος της f τάξης $m \in \mathbb{N}$. (Με $f^{(0)}$ εννοούμε την f.) Συμπεράνετε ότι

(2)
$$\sin^{(k)}(0) = \begin{cases} (-1)^j, & k = 2j+1 \text{ για κάποιο } j \in \mathbb{N} \\ 0, & k = 2j \text{ για κάποιο } j \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Άσκηση 5 (Παράγωγοι συνημιτόνου κάθε τάξης). Διατυπώστε και αποδείξτε τις αντίστοιχες με την Άσκηση 4 ισότητες για τη συνάρτηση του συνημιτόνου cos.