Μαθηματική Ανάλυση και Γραμμική Άλγεβρα

Ασκήσεις στην Ανάλυση

Χειμερινό Εξάμηνο 2023-2024

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Σχολή Πολιτικών Μηχανικών

1ο Φυλλάδιο

Διδάσκοντες:
Β. Γρηγοριάδης
Κ. Παυλοπούλου
Γ. Μανουσάκης

Άσκηση 1. Δείξτε ότι:

(i) $2n^2 > 2n + 1$ για κάθε φυσικό αριθμό $n \geq 2$.

(ii) $3^n > n^2$ για κάθε φυσικό αριθμό $n \geq 2$.

Σχόλιο: Παρατηρούμε ότι για $n = 0, 1$ η (i) **δεν** ισχύει. Από την άλλη η (ii) ισχύει για $n = 0, 1$. Παρ' όλα αυτά στην (ii) ξεκινάμε την επαγωγή από το $n = 2$. Αυτό το κάνουμε γιατί θα χρησιμοποιήσουμε την (i) που ισχύει για $n \geq 2$.

Λύση.

(i) Για $n = 2$ έχουμε $2n^2 = 2 \cdot 2^2 = 8$ και $2n + 1 = 2 \cdot 2 + 1 = 5$. Άρα ισχύει $2n^2 > 2n + 1$.
Υποθέτουμε ότι για κάποιο $n \geq 2$ ισχύει $2n^2 > 2n + 1$. (Επαγωγική Υπόθεση)
Δείχνουμε ότι $2(n + 1)^2 > 2(n + 1) + 1 = 2n + 3$. Έχουμε

$$2(n + 1)^2 = 2(n^2 + 2n + 1) = 2n^2 + 4n + 2 > (2n + 1) + 4n + 2$$

(από επαγωγική υπόθεση)

$$= 6n + 3 > 2n + 3.$$

Από την Αρχή της Επαγωγής έχουμε το ζητούμενο.

(ii) Για $n = 2$ έχουμε $3^n = 3^2 = 9 > 4 = 2^2 = n^2$.
Υποθέτουμε ότι $3^n > n^2$ για κάποιο $n \geq 2$. (Επαγωγική Υπόθεση)
Δείχνουμε ότι $3^{n+1} > (n + 1)^2$. Έχουμε

$$3^{n+1} = 3 \cdot 3^n > 3 \cdot n^2$$

(από επαγωγική υπόθεση)

$$= n^2 + 2n^2 > n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2,$$

όπου στην προηγούμενη ανίσωση χρησιμοποιήσαμε το (i). Άρα δείξαμε ότι $3^{n+1} > (n + 1)^2$ και από την Αρχή της Επαγωγής έχουμε το ζητούμενο.

Άσκηση 2. Δείξτε ότι ο αριθμός $(2n+1)^2 - 1$ είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του 8 για κάθε φυσικό αριθμό $n \geq 1$.

Λύση.

Για $n = 1$ έχουμε

$$(2n + 1)^2 - 1 = (2 \cdot 1 + 1)^2 - 1 = 9 - 1 = 8$$

που είναι πολλαπλάσιο του 8.

Υποθέτουμε ότι για κάποιο $n \geq 1$ ο αριθμός $(2n + 1)^2 - 1$ είναι πολλαπλάσιο του 8. Δείχνουμε ότι ο αριθμός $(2(n + 1) + 1)^2 - 1 = (2n + 3)^2 - 1$ είναι πολλαπλάσιο του 8.

Από την Επαγωγική Υπόθεση έχουμε $(2n+1)^2-1=8k$ για κάποιο $k\in\mathbb{N}$ ή αλλιώς $(2n+1)^2=8k+1$. Υπολογίζουμε

$$\begin{aligned}(2n+3)^2-1 &= 4n^2+12n+9-1\\ &= 4n^2+12n+8\\ &= 4n^2+4n+1+8n+7\\ &= (2n+1)^2+8n+7\\ &= 8k+1+8n+7 \quad \text{(από Επαγωγική Υπόθεση)}\\ &= 8k+8n+8\\ &= 8\cdot(k+n+1).\end{aligned}$$

Δηλαδή το $(2n+3)^2-1$ είναι πολλαπλάσιο του 8. Από την Αρχή της Επαγωγής έχουμε το ζητούμενο.

Άσκηση 3. Δείξτε ότι:

(i) $2+5+\cdots+(3n-1)=\dfrac{n(3n+1)}{2}$ για κάθε $n\geq 1$.
(Όταν $n=1$ θεωρούμε ότι το αριστερό σκέλος είναι ίσο με 2, δηλαδή σε αυτή την περίπτωση το άθροισμα αποτελείται μόνο από τον πρώτο όρο του.)

(ii) $1^2+2^2+\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ για κάθε $n\geq 1$.
(Όπως πιο πάνω όταν $n=1$ θεωρούμε ότι το αριστερό σκέλος είναι ίσο με $1^2=1$.)

Λύση.

(i) Για $n=1$ το δεξιό σκέλος είναι ίσο με

$$\frac{n(3n+1)}{2}=\frac{1\cdot(3\cdot1+1)}{2}=\frac{4}{2}=2.$$

Υποθέτουμε ότι για κάποιο $n\geq 1$ έχουμε

$$2+5+\cdots+(3n-1)=\frac{n(3n+1)}{2}.$$

(Επαγωγική Υπόθεση)
Δείχνουμε ότι

$$2+5+\cdots+(3(n+1)-1)=\frac{(n+1)(3(n+1)+1)}{2}.$$

Φέρνουμε το δεξιό σκέλος σε πιο απλή μορφή:

$$\frac{(n+1)(3(n+1)+1)}{2}=\frac{(n+1)(3n+4)}{2}.$$

Έχουμε

$$\begin{aligned}
2+5+\cdots+(3(n+1)-1) &= 2+5+\cdots+(3n-1)+(3(n+1)-1)\\
&= \frac{n(3n+1)}{2}+(3(n+1)-1) \qquad \text{(Από Επαγωγική Υπόθεση)}\\
&= \frac{n(3n+1)}{2}+3n+2\\
&= \frac{n(3n+1)+6n+4}{2}\\
&= \frac{3n^2+n+6n+4}{2}\\
&= \frac{3n^2+7n+4}{2}\\
&= \frac{(n+1)(3n+4)}{2}.
\end{aligned}$$

Από την Αρχή της Επαγωγής έχουμε το ζητούμενο.

(ii) Για $n=1$ το δεξιό σκέλος είναι ίσο με

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\frac{1\cdot(1+1)\cdot(2\cdot 1+1)}{6}=\frac{2\cdot 3}{6}=1.$$

Υποθέτουμε ότι για κάποιο $n\geq 1$ ισχύει

$$1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad .$$

(Επαγωγική Υπόθεση)

Δείχνουμε ότι

$$1^2+2^2+\cdots+(n+1)^2=\frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6}=\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} \quad .$$

Έχουμε

$$\begin{aligned}
1^2+2^2+\cdots+(n+1)^2 &= 1^2+2^2+\cdots+n^2+(n+1)^2\\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2 \qquad \text{(Από Επαγωγική Υπόθεση)}\\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)+6(n+1)^2}{6}\\
&= \frac{(n+1)[n(2n+1)+6(n+1)]}{6}\\
&= \frac{(n+1)(2n^2+n+6n+6)}{6}\\
&= \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6}\\
&= \frac{(n+1)(2n+3)(n+2)}{6}.
\end{aligned}$$

Από την Αρχή της Επαγωγής έχουμε το ζητούμενο.

Άσκηση 4. Δείξτε ότι το σύνολο $A = \{n \in \mathbb{N} \mid (n-3)\cdot(n+2)\cdot(n+4) > 0\}$ είναι μη κενό και βρείτε το ελάχιστο στοιχείο του.

Λύση.
Παρατηρούμε ότι $4 \in A$ επομένως το $\min A$ θα είναι κάποιος από τους αριθμούς $0, 1, 2, 3, 4$.

Ένας τρόπος για να βρούμε το $\min A$ είναι να πάρουμε τα $0, 1, 2, 3$ και να εξετάσουμε ένα-ένα αν ανήκουν στο A. Πιο σύντομα παρατηρούμε ότι

$$(k-3)\cdot(k+2)\cdot(k+4) \leq 0$$

για κάθε $k = 0, 1, 2, 3$ γιατί για αυτά τα k θα έχουμε $k - 3 \leq 0$ και $k + 2, k + 3 \geq 0$. Επομένως $k \notin A$ για κάθε $k = 0, 1, 2, 3$ και αφού $4 \in A$ θα έχουμε $\min A = 4$

Ένας ελαφρά διαφορετικός τρόπος είναι να θεωρήσουμε το πολυώνυμο

$$p(x) = (x-3)\cdot(x+2)\cdot(x+4),\ \ x \in \mathbb{R}.$$

Με τη βοήθεια του πίνακα προσήμων βρίσκουμε ότι $p(x) > 0$ ακριβώς όταν $-4 < x < -2$ ή $x > 3$. Εμείς θέλουμε τον ελάχιστο φυσικό για τον οποίο $p(x) > 0$ που είναι το $x = 4$. Άρα $\min A = 4$.

Άσκηση 5. Να βρείτε το minimum/maximum των ακόλουθων συνόλων εφόσον αυτά υπάρχουν (με πλήρη αιτιολόγηση):

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid 3 < x^2 - 1 \leq 15\}$$
$$B = (1, 2]$$
$$C = \{x \in \mathbb{Q} \mid 0 < x \leq 1\}$$
$$D = \{n^2 + 3 \mid n \in \mathbb{N}\}$$

Υπόδειξη. Για να δείξουμε ότι ένα μη κενό σύνολο $X \subseteq \mathbb{R}$ δεν έχει minimum θεωρούμε ένα $x \in X$ και δείχνουμε ότι υπάρχει $y \in X$ που είναι μικρότερο του x.

Λύση.
Για το A έχουμε

$$3 < x^2 - 1 \leq 15 \iff 4 < x^2 \leq 16.$$

Το x είναι φυσικός αριθμός, ελέγχουμε μερικές τιμές:

x	0	1	2	3	4
x^2	0	1	4	9	16

Συνεπώς $A = \{3, 4\}$ και $\min A = 3$, $\max A = 4$.

Για το B έχουμε ότι $\max B = 2$. Το B δεν έχει minimum γιατί αν $x \in B$ τότε $1 < (1 + x)/2 < x \leq 2$, επομένως ο αριθμός $(1 + x)/2$ είναι στοιχείο του B που είναι μικρότερο του x.

Όμοια με πριν $\max C = 1$ και το C δεν έχει minimum γιατί αν $x \in C$ τότε $0 < x/2 < x \leq 1$. Επειδή $x \in \mathbb{Q}$ έχουμε επίσης $x/2 \in \mathbb{Q}$. Άρα $x/2 \in \mathbb{Q} \cap (0, 1]$ δηλαδή $x/2 \in C$. Άρα υπάρχει ένα στοιχείο του C που είναι μικρότερο x.

Τέλος για το D έχουμε ότι $\min D = 3$. Για να το δούμε αυτό παίρνουμε $n = 0$ και έχουμε $0^2 + 3 = 3$. Επιπλέον αν έχουμε $n \in \mathbb{N}$ τότε $3 \leq n^2 + 3$. Δηλαδή το 3 είναι μικρότερο ή ίσο από κάθε άλλο στοιχείο του D.

Το D δεν έχει maximum γιατί αν πάρουμε $x = n^2 + 3 \in D$ τότε το $y = (n+1)^2 + 3$ είναι επίσης στοιχείο του D που είναι μεγαλύτερο του x.

Άσκηση 6 (Διωνυμικό Ανάπτυγμα).

(i) Δείξτε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και κάθε $n \geq 1$ έχουμε

$$(1+x)^n = 1 + \binom{n}{1}\cdot x + \cdots + \binom{n}{n-1}\cdot x^{n-1} + x^n$$

(ii) Υπολογίστε τον αριθμό

$$a = 1 + \binom{5}{1}\cdot(-2) + \binom{5}{2}\cdot(-2)^2 + \cdots + \binom{5}{4}\cdot(-2)^4 + (-2)^5.$$

(iii) Δείξτε ότι για κάθε $x > -1$ ισχύει

$$1 + \binom{7}{1} \cdot x + \binom{7}{2} \cdot x^2 + \cdots + \binom{7}{6} \cdot x^6 + x^7 \geq 7x + 1.$$

Υπόδειξη για το (iii). Χρησιμοποιήστε την ανισότητα Bernoulli.

Λύση.

(i) Εφαρμόζουμε το διωνυμικό ανάπτυγμα

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \cdots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

για $a = 1$ και $b = x$. Παρατηρούμε ότι $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$.

(ii) Εφαρμόζουμε το (i) για $x = -2$, $n = 5$ και έχουμε ότι

$$a = (1 + (-2))^5 = (-1)^5 = -1.$$

(iii) Εφαρμόζουμε το (i) για $n = 7$ και έχουμε ότι το αριστερό μέρος της ανισότητας είναι ίσο με $(1+x)^7$ το οποίο από την ανισότητα Bernoulli είναι μεγαλύτερο ή ίσο από $1 + 7x$, αφού $x > -1$.

Οι επόμενες δύο ασκήσεις δείχνουν ότι η Αρχή του Ελαχίστου και η Αρχή της Επαγωγής είναι ισοδύναμες προτάσεις.

Άσκηση 7 (Απαιτητική). Αποδείξτε την Αρχή της Επαγωγής με τη βοήθεια της Αρχής του Ελαχίστου.

Υπόδειξη. Θεωρήστε μια ιδιότητα P που ικανοποιεί τις υποθέσεις της Αρχής της Επαγωγής και υποθέστε προς άτοπο ότι το σύνολο

$$A = \{n \in \mathbb{N} \mid \text{το } n \text{ δεν έχει την ιδιότητα } P\}$$

είναι μη κενό.

Λύση.

Θεωρούμε μια ιδιότητα φυσικών αριθμών P και υποθέτουμε ότι ικανοποιούνται τα εξής:

(α) το 0 έχει την ιδιότητα P,

(β) αν κάποιος φυσικός αριθμός n έχει την ιδιότητα P τότε και το $n+1$ έχει την ιδιότητα P.

Πρέπει να δείξουμε ότι κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχει την ιδιότητα P. Υποθέτουμε προς άτοπο ότι αυτό δεν συμβαίνει, δηλαδή ότι το σύνολο

$$A = \{n \in \mathbb{N} \mid \text{το } n \text{ δεν έχει την ιδιότητα } P\}$$

είναι μη κενό.

Αφού το A είναι μη κενό υποσύνολο φυσικών αριθμών από την Αρχή του Ελαχίστου το A έχει ελάχιστο στοιχείο, ας το συμβολίσουμε με n_0.

Το n_0 δεν μπορεί να είναι 0 γιατί το 0 έχει την ιδιότητα P ενώ το n_0, ως στοιχείο του A, δεν έχει την ιδιότητα P.

Άρα $n_0 > 0$ και επομένως $n_0 = n+1$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$. Επειδή το n_0 είναι το ελάχιστο στοιχείο του A και αφού $n < n_0$ έχουμε ειδικότερα ότι το n δεν είναι στοιχείο του A. Από τον ορισμό του τελευταίου συνόλου προκύπτει ότι το n έχει την ιδιότητα P. Όμως τότε από την ιδιότητα (β) πιο πάνω θα έχουμε ότι και το $n+1 = n_0$ έχει την ιδιότητα P. Αυτό σημαίνει ότι το n_0 δεν ανήκει στο A που είναι άτοπο.

Άσκηση 8 (Απαιτητική). Αποδείξτε την Αρχή του Ελαχίστου με τη βοήθεια της Αρχής της Επαγωγής.

Υπόδειξη. Θεωρήστε ένα σύνολο $A \subseteq \mathbb{N}$ που δεν έχει minimum και εφαρμόστε την Αρχή της Επαγωγής παίρνοντας για ιδιότητα P το εξής:

το $n \in \mathbb{N}$ έχει την ιδιότητα P αν για κάθε φυσικό $k \leq n$ έχουμε $k \notin A$.

Συμπεράνετε ότι ένα $A \subseteq \mathbb{N}$ που δεν έχει minimum πρέπει να είναι το κενό σύνολο.

Λύση.

Θεωρούμε ένα σύνολο $A \subseteq \mathbb{N}$ που δεν έχει minimum και δείχνουμε με επαγωγή ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει το εξής: για κάθε φυσικό $k \leq n$ έχουμε $k \notin A$.

Για $n = 0$: θεωρούμε έναν φυσικό $k \leq 0$, τότε $k = 0$. Αν είχαμε $k \in A$, δηλαδή $0 \in A$, τότε 0 θα ήταν το minimum του $A \subseteq \mathbb{N}$, ενάντια στην υπόθεσή μας. Άρα $k \notin A$.

Υποθέτουμε ότι για κάποιο n ισχύει το εξής: για κάθε φυσικό $k \leq n$ έχουμε $k \notin A$. (Επαγωγική Υπόθεση)

Δείχνουμε ότι ισχύει η ίδια ιδιότητα για το $n+1$, δηλαδή ότι για κάθε $k \leq n+1$ ισχύει $k \notin A$.

Αν $k \leq n$ τότε $k \notin A$ από την Επαγωγική Υπόθεση. Επομένως θεωρούμε $k = n+1$. Αν είχαμε $k \in A$ δηλαδή $n+1 \in A$, αφού $k' \notin A$ για κάθε $k' \leq n$ τότε το $n+1$ θα ήταν το minimum του A, άτοπο γιατί υποθέσαμε ότι το A δεν έχει minimum. Άρα $k \notin A$ για κάθε $k \leq n+1$.

Από την Αρχή της Επαγωγής για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει: για κάθε $k \leq n$ έχουμε $k \notin A$, ειδικότερα για $k = n$ έχουμε $n \notin A$. Επομένως για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $n \notin A$, ισοδύναμα $A = \emptyset$.

Με άλλα λόγια αν το $A \subseteq \mathbb{N}$ δεν έχει minimum τότε θα είναι το κενό σύνολο, ισοδύναμα αν το $A \subseteq \mathbb{N}$ δεν είναι κενό τότε αναγκαστικά θα έχει minimum.