Μαθηματική Ανάλυση και Γραμμική Άλγεβρα

Ασκήσεις στην Ανάλυση

**Χειμερινό Εξάμηνο 2023-2024**

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Σχολή Πολιτικών Μηχανικών

# 1ο Φυλλάδιο

Διδάσκοντες:
Β. Γρηγοριάδης
Κ. Παυλοπούλου
Γ. Μανουσάκης

**Άσκηση 1.** Δείξτε ότι:

(i) $2n^2 > 2n + 1$ για κάθε φυσικό αριθμό $n \geq 2$.

(ii) $3^n > n^2$ για κάθε φυσικό αριθμό $n \geq 2$.

*Σχόλιο:* Παρατηρούμε ότι για $n = 0, 1$ η (i) **δεν** ισχύει. Από την άλλη η (ii) ισχύει για $n = 0, 1$. Παρ' όλα αυτά στην (ii) ξεκινάμε την επαγωγή από το $n = 2$. Αυτό το κάνουμε γιατί θα χρησιμοποιήσουμε την (i) που ισχύει για $n \geq 2$.

**Άσκηση 2.** Δείξτε ότι ο αριθμός $(2n+1)^2 - 1$ είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του 8 για κάθε φυσικό αριθμό $n \geq 1$.

**Άσκηση 3.** Δείξτε ότι:

(i) $2 + 5 + \cdots + (3n - 1) = \dfrac{n(3n + 1)}{2}$ για κάθε $n \geq 1$.

(Όταν $n = 1$ θεωρούμε ότι το αριστερό σκέλος είναι ίσο με 2, δηλαδή σε αυτή την περίπτωση το άθροισμα αποτελείται μόνο από τον πρώτο όρο του.)

(ii) $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n + 1)(2n + 1)}{6}$ για κάθε $n \geq 1$.

(Όπως πιο πάνω όταν $n = 1$ θεωρούμε ότι το αριστερό σκέλος είναι ίσο με $1^2 = 1$.)

**Άσκηση 4.** Δείξτε ότι το σύνολο $A = \{n \in \mathbb{N} \mid (n - 3) \cdot (n + 2) \cdot (n + 4) > 0\}$ είναι μη κενό και βρείτε το ελάχιστο στοιχείο του.

**Άσκηση 5.** Να βρείτε το minimum/maximum των ακόλουθων συνόλων εφόσον αυτά υπάρχουν (με πλήρη αιτιολόγηση):

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid 3 < x^2 - 1 \leq 15\}$$
$$B = (1, 2]$$
$$C = \{x \in \mathbb{Q} \mid 0 < x \leq 1\}$$
$$D = \{n^2 + 3 \mid n \in \mathbb{N}\}$$

**Υπόδειξη.** Για να δείξουμε ότι ένα μη κενό σύνολο $X \subseteq \mathbb{R}$ δεν έχει minimum θεωρούμε ένα $x \in X$ και δείχνουμε ότι υπάρχει $y \in X$ που είναι μικρότερο του $x$.

**Άσκηση 6** (Διωνυμικό Ανάπτυγμα).

(i) Δείξτε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και κάθε $n \geq 1$ έχουμε

$$(1+x)^n = 1 + \binom{n}{1} \cdot x + \cdots + \binom{n}{n-1} \cdot x^{n-1} + x^n$$

(ii) Υπολογίστε τον αριθμό

$$a = 1 + \binom{5}{1} \cdot (-2) + \binom{5}{2} \cdot (-2)^2 + \cdots + \binom{5}{4} \cdot (-2)^4 + (-2)^5.$$

(iii) Δείξτε ότι για κάθε $x > -1$ ισχύει

$$1 + \binom{7}{1} \cdot x + \binom{7}{2} \cdot x^2 + \cdots + \binom{7}{6} \cdot x^6 + x^7 \geq 7x + 1.$$

**Υπόδειξη για το (iii).** Χρησιμοποιήστε την ανισότητα Bernoulli.

Οι επόμενες δύο ασκήσεις δείχνουν ότι η Αρχή του Ελαχίστου και η Αρχή της Επαγωγής είναι ισοδύναμες προτάσεις.

**Άσκηση 7** (Απαιτητική). Αποδείξτε την Αρχή της Επαγωγής με τη βοήθεια της Αρχής του Ελαχίστου.

**Υπόδειξη.** Θεωρήστε μια ιδιότητα $P$ που ικανοποιεί τις υποθέσεις της Αρχής της Επαγωγής και υποθέστε προς άτοπο ότι το σύνολο

$$A = \{n \in \mathbb{N} \mid \text{το } n \text{ δεν έχει την ιδιότητα } P\}$$

είναι μη κενό.

**Άσκηση 8** (Απαιτητική). Αποδείξτε την Αρχή του Ελαχίστου με τη βοήθεια της Αρχής της Επαγωγής.

**Υπόδειξη.** Θεωρήστε ένα σύνολο $A \subseteq \mathbb{N}$ που δεν έχει minimum και εφαρμόστε την Αρχή της Επαγωγής παίρνοντας για ιδιότητα $P$ το εξής:

$$\text{το } n \in \mathbb{N} \text{ έχει την ιδιότητα } P \text{ αν για κάθε φυσικό } k \leq n \text{ έχουμε } k \notin A.$$

Συμπεράνετε ότι ένα $A \subseteq \mathbb{N}$ που δεν έχει minimum πρέπει να είναι το κενό σύνολο.