



Γραμμική Άλγεβρα

Ασκήσεις

8α. Επίλυση Γραμμικού Συστήματος

Κάλλια Παυλοπούλου

2023-2024

Άσκηση 1: μη ομογενές σύστημα 3×4

$$\begin{cases} 2x_2 + 12x_3 + 11x_4 = -20 \\ 2x_1 + 8x_2 + 26x_3 = 12 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 = -1 \end{cases}$$

Επαυξημένος Πίνακας

$$[A|b] = \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 2 & 12 & 11 & -20 \\ 2 & 8 & 26 & 0 & 12 \\ 1 & 3 & 2 & 3 & -1 \end{array} \right]$$

Γραμμοϊσοδύναμος ανηγμένος κλιμακωτός

$$[A_R|b_R] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -40,7 & 83,4 \\ 0 & 1 & 0 & 15,7 & -30,4 \\ 0 & 0 & 1 & -1,7 & 3,4 \end{array} \right]$$

$rank(A) = 3$
 $rank[A|b] = 3$

Αφού $rank(A) = rank[A|b]$
το σύστημα είναι συμβιβαστό!

Ας δούμε τώρα τη μορφή των λύσεων.

Άσκηση 1: (μη ομογενές σύστημα 3×4) - Μορφή των λύσεων

Γραμμοϊσοδύναμος ανηγμένος κλιμακωτός

$$[A_R | b_R] = \begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \\ \hline 1 & 0 & 0 & -40,7 & 83,4 \\ 0 & 1 & 0 & 15,7 & -30,4 \\ 0 & 0 & 1 & -1,7 & 3,4 \end{array} \begin{array}{l} \longrightarrow \\ \longrightarrow \\ \longrightarrow \end{array} \left. \begin{array}{l} x_1 = 83,4 + 40,7 \cdot x_4 \\ x_2 = -30,4 - 15,7 \cdot x_4 \\ x_3 = 3,4 + 1,7 \cdot x_4 \end{array} \right\}$$

3 pivots:
βασικοί άγνωστοι
(x_1, x_2, x_3)

$n - \text{rank}A = 4 - 3 = 1$, μία ελεύθερη μεταβλητή, η οποία είναι η x_4 .

Άσκηση 1: (μη ομογενές σύστημα 3×4) - Σύνολο λύσεων

Λύσεις του συστήματος αποτελούν όλα τα διανύσματα που μπορούν να γραφτούν στη μορφή:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 83,4 + 40,7 \cdot x_4 \\ -30,4 - 15,7 \cdot x_4 \\ 3,4 + 1,7 \cdot x_4 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 83,4 \\ -30,4 \\ 3,4 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 40,7 \cdot x_4 \\ -15,7 \cdot x_4 \\ 1,7 \cdot x_4 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 83,4 \\ -30,4 \\ 3,4 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \cdot \begin{bmatrix} 40,7 \\ -15,7 \\ 1,7 \\ 1 \end{bmatrix}, x_4 \in \mathbb{R}$$

Σύνολο λύσεων του συστήματος:

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 : \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 83,4 \\ -30,4 \\ 3,4 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda \cdot \begin{bmatrix} 40,7 \\ -15,7 \\ 1,7 \\ 1 \end{bmatrix}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

Άσκηση 1: Μετατροπή σε ανηγμένο κλιμακωτό του επαυξημένου 3×5

$$[A|b] = \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 2 & 12 & 11 & -20 \\ 2 & 8 & 26 & 0 & 12 \\ 1 & 3 & 2 & 3 & -1 \end{array} \right] \xrightarrow{L_3 \leftrightarrow L_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 8 & 26 & 0 & 12 \\ 0 & 2 & 12 & 11 & -20 \end{array} \right] \xrightarrow{L_2 \rightarrow L_2 - 2L_1}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 22 & -6 & 14 \\ 0 & 2 & 12 & 11 & -20 \end{array} \right] \xrightarrow{L_3 \rightarrow L_3 - L_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 22 & -6 & 14 \\ 0 & 0 & -10 & 17 & -34 \end{array} \right] \xrightarrow{L_2 \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)L_2}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 11 & -3 & 7 \\ 0 & 0 & -10 & 17 & -34 \end{array} \right] \xrightarrow{L_3 \rightarrow \left(\frac{-1}{10}\right)L_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 11 & -3 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -17/10 & 34/10 \end{array} \right] \xrightarrow{L_2 \rightarrow -11 \cdot L_2}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 157/10 & -304/10 \\ 0 & 0 & 1 & -17/10 & 34/10 \end{array} \right] \xrightarrow{L_1 \rightarrow -2 \cdot L_3}$$

Άσκηση 1: Μετατροπή σε ανηγμένο κλιμακωτό του επαυξημένου 3×5

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 157/10 & -304/10 \\ 0 & 0 & 1 & -17/10 & 34/10 \end{array} \right] \xrightarrow{L_1 \rightarrow -2 \cdot L_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 64/10 & -78/10 \\ 0 & 1 & 0 & 157/10 & -304/10 \\ 0 & 0 & 1 & -17/10 & 34/10 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{L_1 \rightarrow -3 \cdot L_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -407/10 & 834/10 \\ 0 & 1 & 0 & 157/10 & -304/10 \\ 0 & 0 & 1 & -17/10 & 34/10 \end{array} \right] = [A_R | b_R]$$

Άσκηση 2: μη ομογενές σύστημα 4×3

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 = -5 \\ 4x_1 + 9x_2 + x_3 = -2 \\ -6x_2 + 2x_3 = 24 \\ 5x_1 + 9x_2 = 5 \end{cases}$$

Επαυξημένος
Πίνακας

$$[A|b] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & -5 \\ 4 & 9 & 1 & -2 \\ 0 & -6 & 2 & 24 \\ 5 & 9 & 0 & 5 \end{array} \right]$$

Γραμμοϊσοδύναμος
ανηγμένος κλιμακωτός

$$[A_R|b_R] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 31/4 \\ 0 & 1 & 0 & -15/4 \\ 0 & 0 & 1 & 3/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$\text{rank}(A) = 3$$

$$\text{rank}[A|b] = 3$$

rank

Αφού $\text{rank}(A) = \text{rank}[A|b]$ το
σύστημα είναι συμβιβαστό!

Ας δούμε τώρα τη μορφή των λύσεων.

Άσκηση 2: (μη ομογενές σύστημα 4×3) - Μορφή των λύσεων

Γραμμοϊσοδύναμος ανηγμένος κλιμακωτός

$$[A_R | b_R] = \begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ \hline 1 & 0 & 0 & 31/4 \\ 0 & 1 & 0 & -15/4 \\ 0 & 0 & 1 & 3/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \begin{array}{l} \longrightarrow \\ \longrightarrow \\ \longrightarrow \\ \longrightarrow \end{array} \begin{array}{l} x_1 = 31/4 \\ x_2 = -15/4 \\ x_3 = 3/4 \\ 0 = 0 \end{array}$$

3 pivots: 3 βασικοί άγνωστοι
(οι x_1, x_2, x_3)

Άρα το σύστημα έχει μία και μοναδική λύση στο \mathbb{R}^3 , την:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 31/4 \\ -15/4 \\ 3/4 \end{bmatrix}$$

Σύνολο λύσεων του συστήματος:

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 31/4 \\ -15/4 \\ 3/4 \end{bmatrix} \right\}$$

Άσκηση 3: μη ομογενές σύστημα 3×5

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 10 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 - x_5 = -1 \\ x_1 - 4x_2 + 4x_3 - x_4 + 4x_5 = 1 \end{cases}$$

Επαυξημένος Πίνακας

$$[A|b] = \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 10 \\ 2 & 1 & -1 & -2 & -1 & -1 \\ 1 & -4 & 4 & -1 & 4 & 1 \end{array} \right]$$

Γραμμοϊσοδύναμος
ανηγμένος κλιμακωτός

$$[A_R|b_R] = \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$rank(A) = 2$ $rank[A|b] = 3$

rank

Αφού $rank(A) \neq rank[A|b]$ το σύστημα είναι ασυμβίβαστο!

Το σύνολο λύσεων του συστήματος είναι το $S = \emptyset$

Άσκηση 4: ομογενές σύστημα 4×5

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_5 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 - 5x_5 = 0 \\ -2x_1 + 4x_2 - 3x_3 + x_4 - 2x_5 = 0 \\ 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0 \end{cases}$$

Επαυξημένος
Πίνακας

$$[A|b] = \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & -5 & 0 \\ -2 & 4 & -3 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & -6 & 4 & -2 & 2 & 0 \end{array} \right]$$

Γραμμοϊσοδύναμος
ανηγμένος κλιμακωτός

$$[A_R|b_R] = \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$rank(A) = 3$
 $rank[A|b] = 3$

rank

Αφού $rank(A) = rank[A|b]$ το
σύστημα είναι συμβαστό!

Ας δούμε τώρα τη μορφή των λύσεων.

Άσκηση 4: (ομογενές σύστημα 4×5) - Μορφή των λύσεων

Γραμμοϊσοδύναμος ανηγμένος κλιμακωτός

$$(A_R | b_R) = \begin{array}{ccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \\ \hline 1 & -2 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \begin{array}{l} \longrightarrow \\ \longrightarrow \\ \longrightarrow \\ \longrightarrow \end{array} \begin{array}{l} x_1 = 2x_2 - 4x_5 \\ x_3 = x_5 \\ x_4 = -3x_5 \\ 0 = 0 \end{array}$$

3 pivots: 3 βασικοί άγνωστοι (x_1, x_3, x_4)

$n - \text{rank}A = 5 - 3 = 2$, δύο ελεύθερες μεταβλητές, η οποία είναι οι x_2 και x_5 .

Άσκηση 4: (μη ομογενές σύστημα 4×5) - Σύνολο λύσεων

Λύσεις του συστήματος αποτελούν όλα τα διανύσματα που μπορούν να γραφτούν στη μορφή:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_2 - 4x_5 \\ x_2 \\ x_5 \\ -3x_5 \\ x_5 \end{bmatrix} = x_2 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_5 \cdot \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Σύνολο λύσεων
του συστήματος:

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^5 : \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \lambda \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \mu \cdot \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}, \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

Και λέμε πως λύση αποτελούν όλοι οι γραμμικοί συνδυασμοί των διανυσμάτων $[2 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ και $[-4 \ 0 \ 1 \ -3 \ 1]^T$.

Άσκηση 5: μη ομογενές σύστημα 3×3 με παράμετρο

$$\begin{cases} x + y - 6z = \lambda \\ 2x + y - 2z = 8 \\ 2x + 3y - 22z = 5 \end{cases}$$

Επαυξημένος Πίνακας

$$[A|b] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -6 & \lambda \\ 2 & 1 & -2 & 8 \\ 2 & 3 & -22 & 5 \end{array} \right]$$

Γραμμοϊσοδύναμος ανηγμένος κλιμακωτός

$[A_R|b_R]$

$$= \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4 & 8 - \lambda \\ 0 & 1 & -10 & -8 + 2\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 13 - 4\lambda \end{array} \right]$$

$rank(A) = 2$ $rank[A|b] = ?$

rank

$rank(A) \neq rank[A|b] ?$

$rank(A) = rank[A|b] ?$

Διακρίνουμε περιπτώσεις

Άσκηση 5: μη ομογενές σύστημα 3×3 με παράμετρο

1) Αν $rank(A) \neq rank[A|b] \Leftrightarrow 13 - 4\lambda \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq \frac{13}{4}$, τότε το σύστημα είναι ασυμβίβαστο, άρα $S = \emptyset$

2) Αν $rank(A) = rank[A|b] \Leftrightarrow 13 - 4\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{13}{4}$, τότε το σύστημα είναι συμβιβαστό και οι λύσεις έχουν τη μορφή:

$$[A_R | b_R] = \begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ \hline 1 & 0 & 4 & 8 - 13/4 \\ 0 & 1 & -10 & -8 + 2 \cdot 13/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \begin{array}{l} \Rightarrow \\ \Rightarrow \end{array} \left. \begin{array}{l} x = \frac{19}{4} - 4z \\ y = -\frac{3}{2} + 10z \end{array} \right\}$$

2 pivots: 2 βασικοί άγνωστοι (x, y)

$n - rank A = 3 - 2 = 1$, μία ελεύθερη μεταβλητή, η οποία είναι η z .

Άσκηση 5: (μη ομογενές σύστημα 3×3 με παράμετρο) - Σύνολο λύσεων

Λύσεις του συστήματος αποτελούν όλα τα διανύσματα που μπορούν να γραφτούν στη μορφή:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{19}{4} - 4z \\ 3 \\ -\frac{1}{2} + 10z \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{19}{4} \\ 3 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} + z \cdot \begin{bmatrix} -4 \\ 10 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Σύνολο λύσεων του συστήματος:

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{19}{4} \\ 3 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} + \mu \cdot \begin{bmatrix} -4 \\ 10 \\ 1 \end{bmatrix}, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

Άλυτες Ασκήσεις για εξάσκηση

1) Να λυθεί το σύστημα $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$, με $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ και $\vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Υπόδειξη: Δημιουργούμε τον επαυξημένο $[A|\vec{b}]$ διάστασης 2×5 . Εφαρμόζοντας στοιχειώδεις γραμμοπράξεις φέρνουμε τον πίνακα $[A|\vec{b}]$ σε μορφή ανηγμένου κλιμακωτού και καταλήγουμε ότι το σύστημα έχει άπειρες λύσεις με 2 ελεύθερες

μεταβλητές τις x_1 και x_4 . Το σύνολο λύσεων είναι $S = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 : \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ 3 - x_4 \\ -1 - x_4 \\ x_4 \end{bmatrix}, x_1, x_4 \in \mathbb{R} \right\}$.

2) Δίνεται το σύστημα $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$. Αν η ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του επαυξημένου πίνακα του συστήματος είναι η ακόλουθη, ποιες είναι οι λύσεις του συστήματος;

$$[A_R | b_R] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Υπόδειξη: Επισημαίνουμε τα 2 ηγετικά στοιχεία, ορίζουμε βασικούς αγνώστους και ελεύθερους αγνώστους.

Άλυτες Ασκήσεις για εξάσκηση

3) Να λυθεί το σύστημα
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 1 \\ x_2 + 3x_3 + 5x_4 = -3 \\ 2x_1 + x_2 + 8x_3 - 4x_4 = 4 \end{cases} .$$

Υπόδειξη: Εφαρμόζοντας στοιχειώδεις γραμμοπράξεις στον επαυξημένο καταλήγουμε στον γραμμοϊσοδύναμό του

$$[A_R|b_R] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -87 & 46 \\ 0 & 1 & 0 & -94 & 48 \\ 0 & 0 & 1 & 33 & -17 \end{bmatrix}$$
 από όπου συμπεραίνουμε ότι το σύστημα έχει άπειρες λύσεις (ελ.μετ. x_4).

4) Να λυθεί το σύστημα
$$\begin{cases} 2x_2 + 12x_3 + 11x_4 = -20 \\ 2x_1 + 8x_2 + 16x_3 = 12 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 = -1 \end{cases} .$$

Υπόδειξη: Εφαρμόζοντας στοιχειώδεις γραμμοπράξεις στον επαυξημένο καταλήγουμε στον γραμμοϊσοδύναμό του

$$[A_R|b_R] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -16 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 6 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$
 από όπου συμπεραίνουμε ότι το σύστημα έχει άπειρες λύσεις (ελ.μετ. x_3).