ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY OF ATHENS
SCHOOL OF APPLIED MATHEMATICAL AND PHYSICAL SCIENCES

Γραμμική Άλγεβρα
1γ. Πίνακες και Βασικές Πράξεις (συνέχεια)

Κάλλια Παυλοπούλου

2023-2024

Ο αντίστροφος πίνακας ενός τετραγωνικού

Ένας τετραγωνικός πίνακας $A \in \Pi_\nu$ ονομάζεται **αντιστρέψιμος** (non-singular ή invertible) αν υπάρχει πίνακας $B \in \Pi_\nu$ τέτοιος ώστε:

$$A \cdot B = B \cdot A = I_\nu$$

και ο B είναι ο **αντίστροφος** (inverse) πίνακας του A.

Γράφουμε $B = A^{-1}$.

<u>Σημείωση</u>: Μιλάμε για αντίστροφο μόνο τετραγωνικού πίνακα!

Πρόταση: μοναδικότητα αντιστρόφου

Αν ο $B \in \Pi_\nu$ ικανοποιεί τη σχέση $A \cdot B = B \cdot A = I_\nu$ τότε είναι μοναδικός!

<u>Απόδειξη</u>

Υποθέτουμε ότι υπάρχουν δύο διαφορετικοί αντίστροφοι πίνακες του Α, ο B και ο Γ τέτοιοι ώστε

$$A \cdot B = B \cdot A = I_\nu$$

και $A \cdot \Gamma = \Gamma \cdot A = I_\nu$.

Τότε

$B \cdot (A \cdot \Gamma) = B \cdot I_\nu = B$ και $(B \cdot A) \cdot \Gamma = I_\nu \cdot \Gamma = \Gamma.$

Λόγω της προσεταιριστικής έχουμε $\boxed{B = \Gamma.}$

Πρόταση:

Αν οι $A, B \in \Pi_\nu$ είναι αντιστρέψιμοι, τότε ισχύουν:

α) $\boxed{(A^{-1})^{-1} = A}$ β) $\boxed{(AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}}$

Ο αντίστροφος του πίνακα AB είναι ο πίνακας $B^{-1} \cdot A^{-1}$. Άρα ο πίνακας αυτός επί τον αντίστροφό του θα μας δώσει τον μοναδιαίο.

Απόδειξη:

α) Προφανώς από ορισμό

β) $(A \cdot B) \cdot (B^{-1} \cdot A^{-1}) =$

$A \cdot (B \cdot B^{-1}) \cdot A^{-1} =$

$A \cdot I_\nu \cdot A^{-1} = A \cdot A^{-1} = I_\nu$.

Και ομοίως αποδεικνύεται ότι $(B^{-1} \cdot A^{-1}) \cdot (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}) = I_\nu$.

Προσοχή!

- ΔΕΝ έχουν όλοι οι τετραγωνικοί πίνακες αντίστροφο!
- Ισχύει στον πολλαπλασιασμό η σχέση:

$$\boldsymbol{(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}}$$

- Αλλά δεν ισχύει και για την πρόσθεση, δηλαδή

$$\boldsymbol{(A + B)^{-1} \neq B^{-1} + A^{-1}}$$

Μπορεί να υπάρχει ο αντίστροφος του $\boldsymbol{A}$ και ο αντίστροφος του B, αλλά να μην υπάρχει του $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{A}} + \underbrace{\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{B}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathrm{A} + \mathrm{B}}$$

$\boldsymbol{detA \neq 0}$ → **Υπάρχει ο αντίστροφος**

$\boldsymbol{detB \neq 0}$ → **Υπάρχει ο αντίστροφος**

$\boldsymbol{det(A+B) = 0}$ → **Δεν υπάρχει ο αντίστροφος**

<u>Σημείωση</u>: Θα δούμε σε επόμενο κεφάλαιο πως ένας πίνακας είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν η ορίζουσά του είναι διάφορη του μηδενός. Υπενθυμίζεται πως για πίνακα 2×2 η ορίζουσά του δίνεται από τον τύπο $det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Τύπος υπολογισμού αντιστρόφου πίνακα 2×2

Αν είναι $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ και $B = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$ είναι ο ζητούμενος αντίστροφος πίνακας του A, τότε από ισότητες $A \cdot B = B \cdot A = I_2$ και με τη βοήθεια επίλυσης γραμμικού συστήματος 4 εξισώσεων με 4 αγνώστους, προκύπτει:

- Αν $det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0,$

τότε ο αντίστροφος του A είναι ο

$$\boxed{A^{-1} = B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}}$$

Παράδειγμα αντιστρόφου 2×2

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{detA = 4 - 1 = 3 \neq 0}$

$\boldsymbol{detA \neq 0}$ → **Υπάρχει ο αντίστροφος**

$$\boxed{A^{-1} = B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \cdot \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}}$$

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}}$$

Σχέση αντίστροφου πίνακα και ανάστροφου

Έστω τετραγωνικός πίνακας $A \in \Pi_\nu$. Ο πίνακας είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν ο πίνακας A^T είναι αντιστρέψιμος. Και ισχύει:

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T .$$

<u>Απόδειξη:</u>

Αν ο Α είναι αντιστρέψιμος, τότε:

$$A \cdot A^{-1} = I_\nu \Leftrightarrow (A \cdot A^{-1})^T = (I_\nu)^T \Leftrightarrow (A^{-1})^T \cdot (A)^T = I_\nu .$$

Από την τελευταία σχέση συμπεραίνουμε πως ο A^T είναι αντιστρέψιμος και ο αντίστροφός του είναι ο $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

Ομοίως αποδεικνύουμε και το αντίστροφο:

Αν ο A^T είναι αντιστρέψιμος, τότε επειδή $A = (A^T)^T$, λόγω του τελευταίου προηγούμενου βήματος.

Οι δυνάμεις ενός νxν πίνακα

Για κάθε τετραγωνικό πίνακα A τύπου $\nu \times \nu$ ορίζουμε τις δυνάμεις του $\boldsymbol{A}$ ως εξής:

- $A^0 = I_\nu$,
- $A^1 = A$ και
- $A^n = A^{n-1} \cdot A = A \cdot A \cdot \cdots \cdot A\,, \forall n \in N^*, \mu\varepsilon\; n \geq 2.$
- Αν ο πίνακας είναι αντιστρέψιμος ορίζουμε

$$A^{-n} = (A^{-1})^n, \forall n \in N^*$$

Ιδιότητες

1) $\boldsymbol{A^m \cdot A^n = A \cdot A \cdot \cdots \cdot A \cdot A \cdot A \cdot \ldots \cdot A \cdot A = A^n \cdot A^m = A^{m+n}}, \forall \boldsymbol{m, n} \in \boldsymbol{Z}$.

2) $(\boldsymbol{A^m})^n = \boldsymbol{A^{m \cdot n}}, \forall\ \boldsymbol{m, n} \in \boldsymbol{Z}$.

3) $(\boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{A})^n = \lambda^n \cdot A^n, \forall\ \boldsymbol{n} \in \mathbf{Z}, \boldsymbol{\lambda} \neq \mathbf{0}$.

4) $(\boldsymbol{A^n})^{-\mathbf{1}} = \left(\boldsymbol{A^{-1}}\right)^{\boldsymbol{n}}, \forall\ \boldsymbol{n} \in \boldsymbol{Z}$.

5) $\boldsymbol{(A+B)^2 = (A+B) \cdot (A+B) = A^2 + AB + BA + B^2}$

Παράδειγμα:

- $A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{bmatrix}$

Επειδή γενικά ισχύει ότι $A \cdot B \neq B \cdot A$, εν γένει αληθεύει:

$\boldsymbol{(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2}$ και $\boldsymbol{(A-B)^2 \neq A^2 - 2AB + B^2}$

Άρα αν γνωρίζουμε πως A, B αντιμεταθετικοί $(A \cdot B = B \cdot A)$

τότε ισχύουν:

$$(A \pm B)^2 = A^2 \pm 2AB + B^2$$

$$(A \pm B)^3 = A^3 \pm 3A^2B + 3AB^2 \pm B^3$$

$$(A + B) \cdot (A - B) = A^2 - B^2$$