Απόδειξη της σχέσης «απόσταση σημείου από επίπεδο»

Έστω ένα σημείο A με συντεταγμένες (x_A, y_A, z_A) και ένα επίπεδο Π το οποίο δεν διέρχεται από το σημείο A και έχει εξίσωση Ax + By + Γz + Δ = 0.

Έστω ε η κάθετη ευθεία στο επίπεδο Π η οποία διέρχεται από το σημείο A. Η διανυσματική εξίσωση της ευθείας αυτής είναι

$$\bar{r} : \Re \to \Re^3 : t \to \bar{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) = (x_A, y_A, z_A) + t(A, B, \Gamma)$$

Έστω A΄ το σημείο τομής της καθέτου ευθείας με το επίπεδο Π. το σημείο A΄ είναι η προβολή του σημείου A στο επίπεδο Π και έχει συντεταγμένες ($x_{A΄}$, $y_{A΄}$, $z_{A΄}$). Το σημείο A΄ ανήκει στην κάθετο ευθεία επομένως υπάρχει τιμή t_0 της παραμέτρου t για την οποία θα ισχύει ότι

$$(x_{A'}, y_{A'}, z_{A'}) = (x_A, y_A, z_A) + t_0(A, B, \Gamma)$$

Όμως το σημείο A΄ ανήκει και στο επίπεδο Π άρα θα ισχύει και

$$Ax_{A'} + By_{A'} + \Gamma z_{A'} + \Delta = 0 \Rightarrow A(x_A + t_0 A) + B(y_A + t_0 B) + \Gamma(z_A + t_0 \Gamma) + \Delta = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow Ax_A + A^2 t_0 + By_A + B^2 t_0 + \Gamma z_A + \Gamma^2 t_0 + \Delta = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (Ax_A + By_A + \Gamma z_A + \Delta) + (A^2 + B^2 + \Gamma^2)t_0 = 0 \Rightarrow t_0 = -\frac{Ax_A + By_A + \Gamma z_A + \Delta}{A^2 + B^2 + \Gamma^2}$$

Άρα οι συντεταγμένες του σημείου A΄ που είναι η προβολή του σημείου A έχει συντεταγμένες

$$(x_{A'}, y_{A'}, z_{A'}) = (x_A, y_A, z_A) + t_0(A, B, \Gamma) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x_{A'}, y_{A'}, z_{A'}) = (x_A, y_A, z_A) - \frac{Ax_A + By_A + \Gamma z_A + \Delta}{\sqrt{A^2 + B^2 + \Gamma^2}} \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + \Gamma^2}}(A, B, \Gamma)$$

Το διάνυσμα

$$\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + \Gamma^2}}(A, B, \Gamma)$$

είναι μοναδιαίο συνεπώς η απόλυτη τιμή της παραμέτρου t στην παραπάνω σχέση είναι το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος AA΄. Αλλά το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος AA΄ είναι η απόσταση του σημείου A από το επίπεδο Π άρα αν συμβολίσουμε την απόσταση αυτή με d(A, Π) έχουμε ότι

$$d(A, \Pi) = \frac{|Ax_A + By_A + \Gamma z_A + \Delta|}{\sqrt{A^2 + B^2 + \Gamma^2}}$$

Σχόλιο: Όταν βρήκαμε την τιμή t_0 της παραμέτρου t μπορούσαμε να συνεχίσουμε ως εξής

Το διάνυσμα ΑΑ΄ ισούται με

$$\overline{AA'} = (x_{A'} - x_A, y_{A'} - y_A, z_{A'} - z_A)$$

Αλλά από την εξίσωση της κάθετης ευθείας έχουμε ότι

$$(x_{A'}, y_{A'}, z_{A'}) = (x_A, y_A, z_A) + t_0(A, B, \Gamma) \Rightarrow (x_{A'} - x_A, y_{A'} - y_A, z_{A'} - z_A) = t_0(A, B, \Gamma) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \overline{AA'} = -\frac{Ax_A + By_A + \Gamma z_A + \Delta}{\sqrt{A^2 + B^2 + \Gamma^2}}(A, B, \Gamma)$$

Άρα

$$\left\|\overline{AA'}\right\| = \left|-\frac{Ax_A + By_A + \Gamma z_A + \Delta}{A^2 + B^2 + \Gamma^2}\right| \left\|(A, B, \Gamma)\right\| = \frac{\left|Ax_A + By_A + \Gamma z_A + \Delta\right|}{A^2 + B^2 + \Gamma^2}\sqrt{A^2 + B^2 + \Gamma^2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left\|\overline{AA'}\right\| = \frac{\left|Ax_A + By_A + \Gamma z_A + \Delta\right|}{\sqrt{A^2 + B^2 + \Gamma^2}} \Rightarrow d(A, \Pi) = \frac{\left|Ax_A + By_A + \Gamma z_A + \Delta\right|}{\sqrt{A^2 + B^2 + \Gamma^2}}$$

……………………………