

# Θεμελιώδη Θέματα Επιστήμης Υπολογιστών

ΣΗΜΜΥ – ΣΕΜΦΕ ΕΜΠ

---

3<sup>η</sup> ενότητα:

Αλγόριθμοι γράφων και δικτύων

Επιμέλεια διαφανειών:

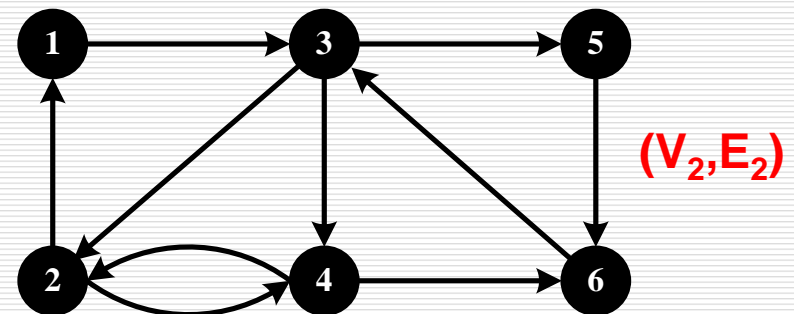
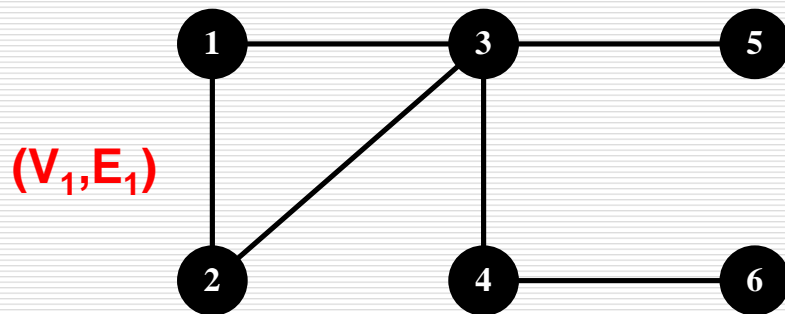
Στάθης Ζάχος, Άρης Παγουρτζής, Δημήτρης Φωτάκης

Ευχαριστίες: μέρος των διαφανειών προέρχεται από διαφάνειες του συναδέλφου Σταύρου Νικολόπουλου (Παν. Ιωαννίνων)



Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών  
Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

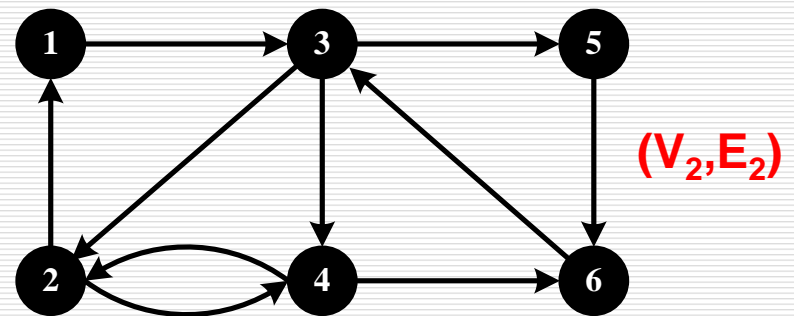
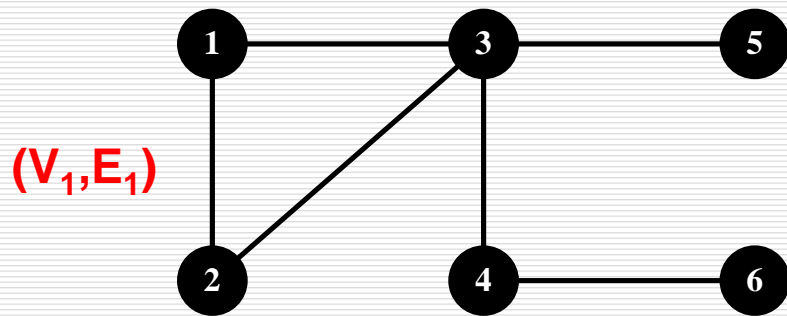
# Γράφοι (επανάληψη)



- **Γράφος (ή γράφημα):** ζεύγος  $(V, E)$ ,  $V$  ένα μη κενό σύνολο,  $E$  διμελής σχέση πάνω στο  $V$
- **Μη κατευθυνόμενος γράφος:** σχέση  $E$  συμμετρική
- $V$ : κορυφές (vertices), κόμβοι (nodes)
- $E$ : ακμές (edges)
  - $E_1 = \{\{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{3,4\}, \{3,5\}, \{4,6\}\}$
  - $E_2 = \{(1,3), (2,1), (2,4), (3,2), (3,4), (3,5), (4,2), (4,6), (5,6), (6,3)\}$

# Γράφοι (επανάληψη): ορολογία

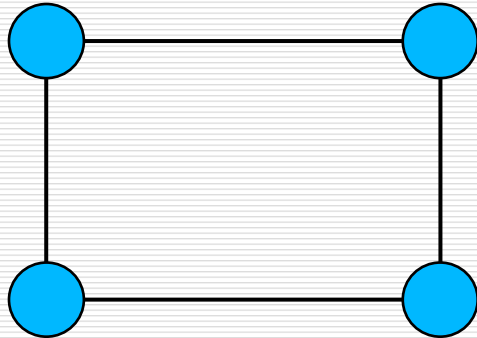
---



- **Γειτονικές (adjacent) κορυφές:** συνδέονται με ακμή, π.χ. 4 και 6
- **Άκρα (endpoints) ακμής**
- **Προσπίπτουσα (incident) ακμή (σε κόμβο)**
- **Γειτονικές ακμές**

# Γράφοι (επανάληψη): ορολογία

---

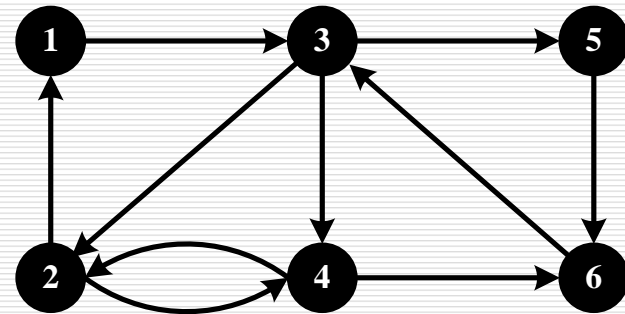
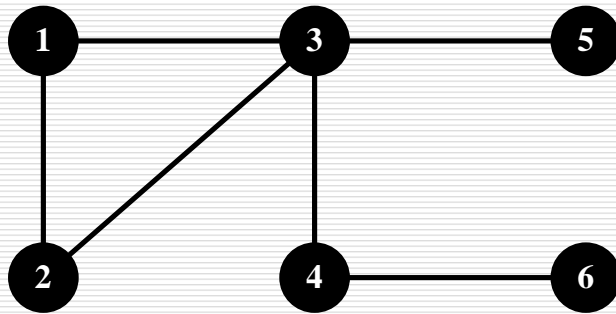


2-κανονικός γράφος

- **Βαθμός (degree, valence) κορυφής  $v$ :** ο αριθμός των ακμών που προσπίπτουν στην  $v$ ,  $\text{deg}(v)$
- Ένας (μη κατευθυνόμενος) γράφος όπου  $\text{deg}(v)=k$  για κάθε κορυφή  $v$ , λέγεται  **$k$ -κανονικός ( $k$ -regular)**
- Σημαντική ιδιότητα:  $\sum \text{deg}(v) = 2|E|$
- Σε κατευθυνόμενο γράφο:  **$\text{in-deg}(v)$ ,  $\text{out-deg}(v)$**

# Γράφοι (επανάληψη): διαδρομές

---

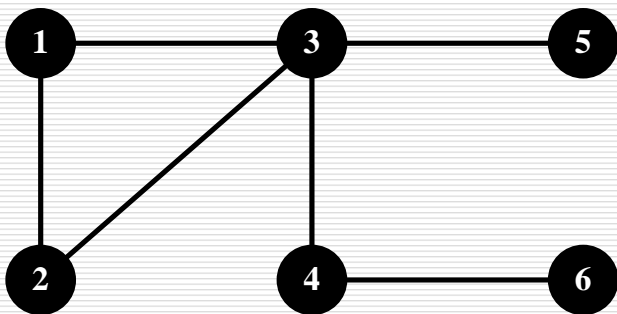


- **Δρόμος:** έγκυρη ακολουθία από κορυφές-ακμές
- **Μονοπάτι:** δρόμος χωρίς επαναλήψεις ακμών
  - **Απλό μονοπάτι:** μονοπάτι χωρίς επαναλήψεις κορυφών
- **Κύκλος:** κλειστό μονοπάτι
  - **Απλός κύκλος:** απλό κλειστό μονοπάτι
- **Μήκος δρόμου:** το πλήθος των ακμών του

# Γράφοι (επανάληψη): αναπαράσταση

□ ... με πίνακα γειτνίασης:  $A[i, j] = \begin{cases} 1 & (v_i, v_j) \in E \\ 0 & (v_i, v_j) \notin E \end{cases}$

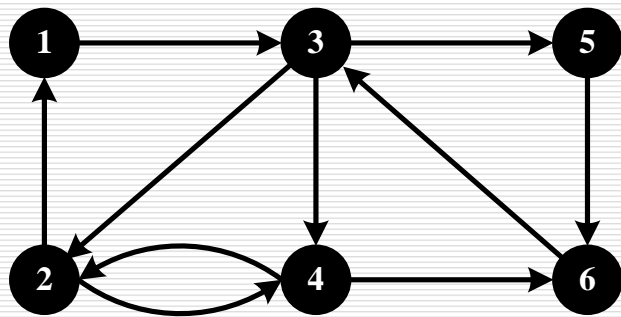
- Αν έχουμε βάρη,  $A[i, j] = w(v_i, v_j)$
- Μη-κατευθυνόμενος: **συμμετρικός** πίνακας
- Χώρος:  $\Theta(n^2)$
- Προσπέλαση γειτόνων:  $\Theta(n)$
- Άμεσος έλεγχος ύπαρξης ακμής:  $O(1)$



	1	2	3	4	5	6
1	0	1	1	0	0	0
2	1	0	1	0	0	0
3	1	1	0	1	1	0
4	0	0	1	0	0	1
5	0	0	1	0	0	0
6	0	0	0	1	0	0

# Γράφοι (επανάληψη): αναπαράσταση

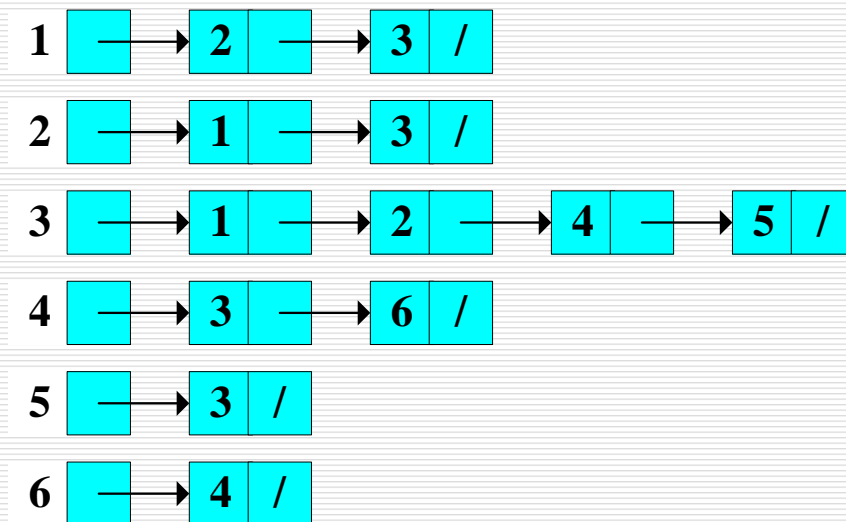
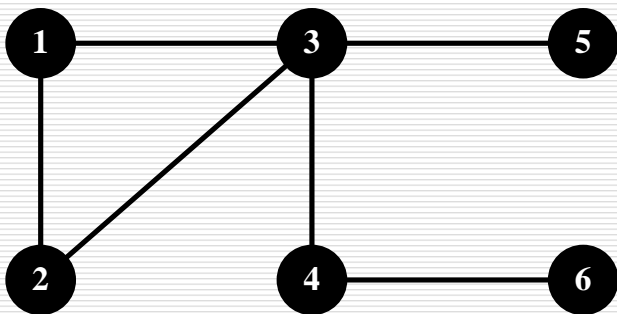
- ... με πίνακα γειτνίασης:  $A[i, j] = \begin{cases} 1 & (v_i, v_j) \in E \\ 0 & (v_i, v_j) \notin E \end{cases}$
- Αν έχουμε βάρη,  $A[i, j] = w(v_i, v_j)$
- Κατευθυνόμενος: μη-συμμετρικός πίνακας
- Χώρος:  $\Theta(n^2)$
- Προσπέλαση γειτόνων:  $\Theta(n)$
- Άμεσος έλεγχος ύπαρξης ακμής:  $O(1)$



	1	2	3	4	5	6
1	0	0	1	0	0	0
2	1	0	0	1	0	0
3	0	1	0	1	1	0
4	0	1	0	0	0	1
5	0	0	0	0	0	1
6	0	0	1	0	0	0

# Γράφοι (επανάληψη): αναπαράσταση

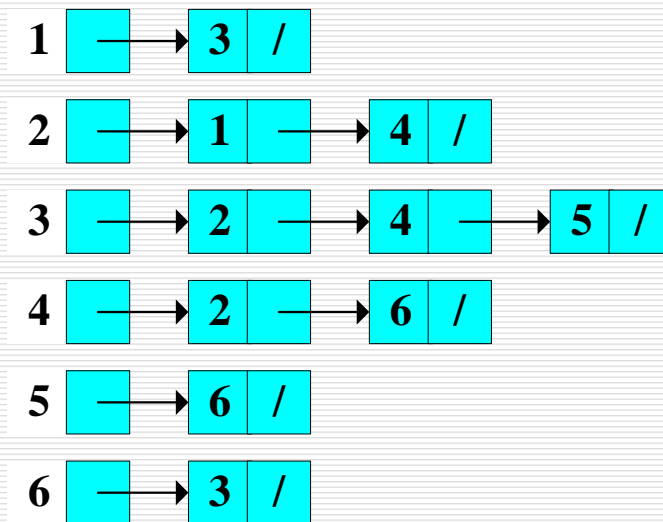
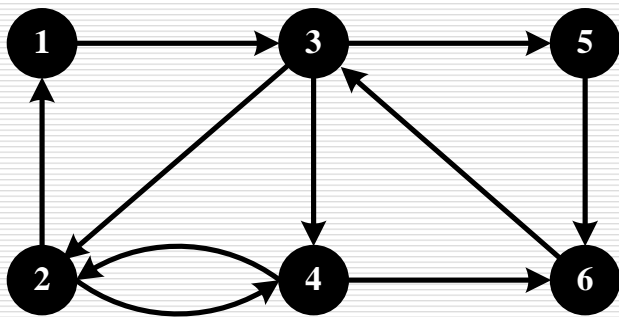
- ... με **λίστες γειτνίασης**: **γειτονικές** κορυφές **σε λίστες**
  - Αν έχουμε βάρη, τα αποθηκεύουμε στους κόμβους
  - Χώρος:  $\Theta(m)$
  - Προσπέλαση γειτόνων:  $\Theta(\text{deg}(u))$
  - Έλεγχος ύπαρξης ακμής:  $O(\text{deg}(u))$





# Γράφοι (επανάληψη): αναπαράσταση

- ... με **λίστες γειτνίασης**: **γειτονικές** κορυφές **σε λίστες**
  - Αν έχουμε βάρη, τα αποθηκεύουμε στους κόμβους
  - Χώρος:  $\Theta(m)$
  - Προσπέλαση γειτόνων:  $\Theta(\text{deg}(u))$
  - Έλεγχος ύπαρξης ακμής:  $O(\text{deg}(u))$



# Γράφοι (επανάληψη): συνεκτικότητα

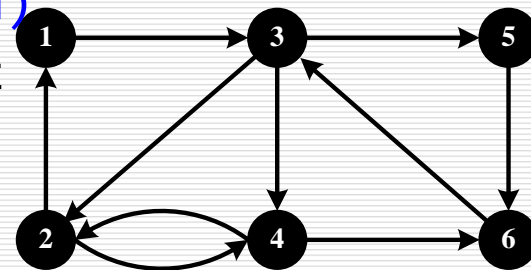
- Ένας μη κατευθυνόμενος γράφος λέγεται **συνεκτικός (connected)** αν υπάρχει δρόμος μεταξύ οποιωνδήποτε δύο κορυφών του

Σε συνεκτικό γράφο ισχύει:  $n - 1 \leq e \leq \frac{n(n-1)}{2}$ ,  $n = |V|, e = |E|$ .

- Ένας κατευθυνόμενος γράφος λέγεται

- **ισχυρά συνεκτικός (strongly connected)**

αν υπάρχει δρόμος μεταξύ οποιωνδήποτε δύο κορυφών του ακολουθώντας τις κατευθύνσεις των ακμών



- **ασθενώς συνεκτικός (weakly connected)**

αν υπάρχει δρόμος μεταξύ οποιωνδήποτε δύο κορυφών του αγνοώντας τις κατευθύνσεις των ακμών

# Πρόβλημα συντομότερων διαδρομών

---

- ❑ Σε γράφο με βάρη αναζητούμε τις **διαδρομές ελαχίστου βάρους (shortest paths)** από έναν κόμβο-αφετηρία  $s$  προς όλους τους άλλους
- ❑ Τα βάρη είναι μη αρνητικοί αριθμοί (π.χ. αποστάσεις)

# Πρόβλημα συντομότερων διαδρομών

---

- ❑ Σε γράφο με βάρη αναζητούμε τις **διαδρομές ελαχίστου βάρους (shortest paths)** από έναν κόμβο-αφετηρία  $s$  προς όλους τους άλλους
- ❑ Τα βάρη είναι μη αρνητικοί αριθμοί (π.χ. αποστάσεις)
- ❑ Εφαρμογές: μικρότερες διαδρομές σε πόλεις, φτηνότερες διαδρομές, ταχύτερες διαδρομές, και πάρα πολλές άλλες.

# Πρόβλημα συντομότερων διαδρομών

---

- ❑ Σε γράφο με βάρη αναζητούμε τις **διαδρομές ελαχίστου βάρους (shortest paths)** από έναν κόμβο-αφετηρία  $s$  προς όλους τους άλλους
- ❑ Τα βάρη είναι μη αρνητικοί αριθμοί (π.χ. αποστάσεις)
- ❑ Εφαρμογές: μικρότερες διαδρομές σε πόλεις, φτηνότερες διαδρομές, ταχύτερες διαδρομές, και πάρα πολλές άλλες.
- ❑ **Αλγοριθμικές ιδέες:**
  - ❑ Αν όλα τα βάρη είναι ίδια; (π.χ. = 1)

# Πρόβλημα συντομότερων διαδρομών

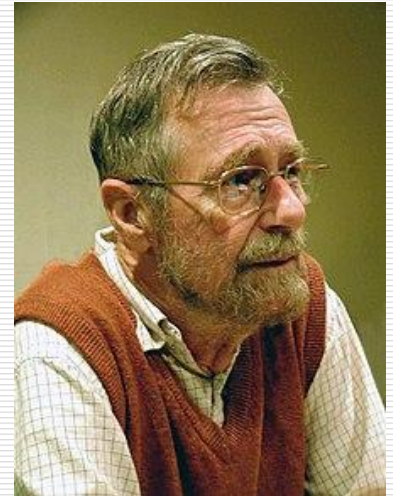
---

- ❑ Σε γράφο με βάρη αναζητούμε τις **διαδρομές ελαχίστου βάρους (shortest paths)** από έναν κόμβο-αφετηρία  $s$  προς όλους τους άλλους
- ❑ Τα βάρη είναι μη αρνητικοί αριθμοί (π.χ. αποστάσεις)
- ❑ Εφαρμογές: μικρότερες διαδρομές σε πόλεις, φτηνότερες διαδρομές, ταχύτερες διαδρομές, και πάρα πολλές άλλες.
- ❑ **Αλγοριθμικές ιδέες:**
  - ❑ Αν όλα τα βάρη είναι ίδια; (π.χ. = 1)
  - ❑ Τροποποίηση BFS για ακέραια βάρη;

# Αλγόριθμος Dijkstra (ιδέα)

---

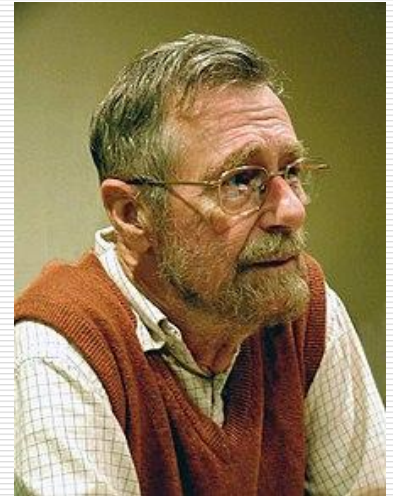
- ❑ **Ιδέα Dijkstra (διαίσθηση)**
  - ❑ ξεκινώντας από τον κόμβο-αφετηρία  $s$  μπορούμε εύκολα να βρούμε τον κόμβο  $u$  που είναι πλησιέστερα στον  $s$
  - ❑ ο δεύτερος πλησιέστερος (στον  $s$ ) θα είναι γείτονας του  $s$  ή του  $u$  (γιατί;)
  - ❑ πώς τον βρίσκουμε;
  - ❑ πώς συνεχίζουμε;



# Αλγόριθμος Dijkstra (ιδέα)

---

- ❑ **Ιδέα Dijkstra (υλοποίηση)**
  - ❑ διατηρούμε προσωρινές ετικέτες απόστασης από  $s$
  - ❑ για κόμβο  $u$  με ελάχιστη ετικέτα η διαδρομή ελαχίστου βάρους έχει βρεθεί!
  - ❑ μονιμοποίηση ετικέτας του  $u$
  - ❑ ενημέρωση ετικετών γειτόνων του  $u$
  - ❑ επαναλαμβάνουμε τα 3 παραπάνω βήματα στους γείτονες των 'μόνιμων' κόμβων





# Αλγόριθμος Dijkstra

---

$S := \{s\}; D(s) := 0 ; P(s) := \text{NIL}$

**for each**  $v: (s,v) \in E$  **do**  $D(v) := \text{cost}(s,v); P(v) := s$

**for each**  $v: (s,v) \notin E$  **do**  $D(v) := \infty; P(v) := \text{NIL}$

**repeat**  $n$  times

    select  $u$  from  $V \setminus S$  with minimum  $D(u)$

$S := S \cup \{u\}$

**for all**  $v$  in  $V \setminus S: (u,v) \in E$  **do**

**if**  $D(u) + \text{cost}(u,v) < D(v)$  **then**

$D(v) := D(u) + \text{cost}(u,v)$

$P(v) := u$

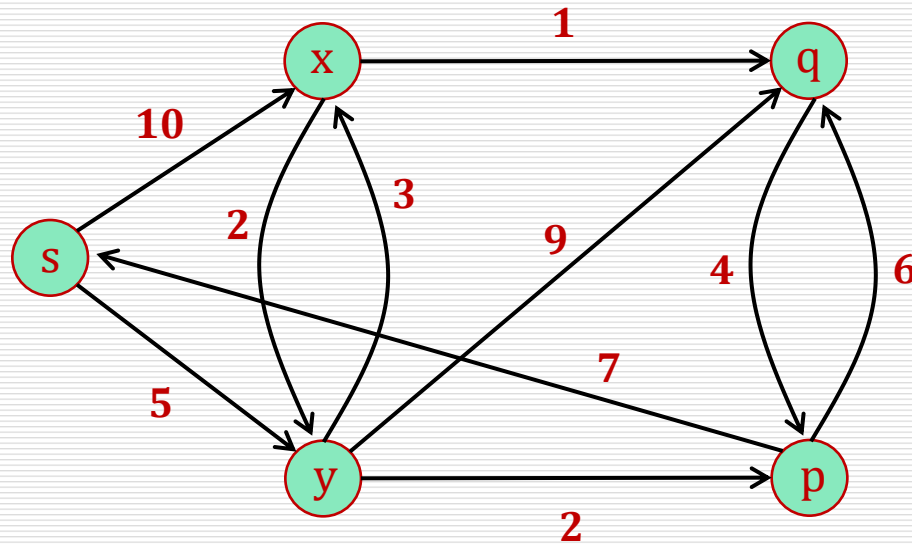
Πολυπλ/τα  
 $O(|V|^2)$ :  
σε κάθε  
επανάληψη  
 $O(|V|)$  για  
εύρεση  
ελαχίστου,  
 $O(|V|)$  για  
ενημέρωση  
αποστάσεων



# 2ο παράδειγμα Dijkstra

▣ Παράδειγμα

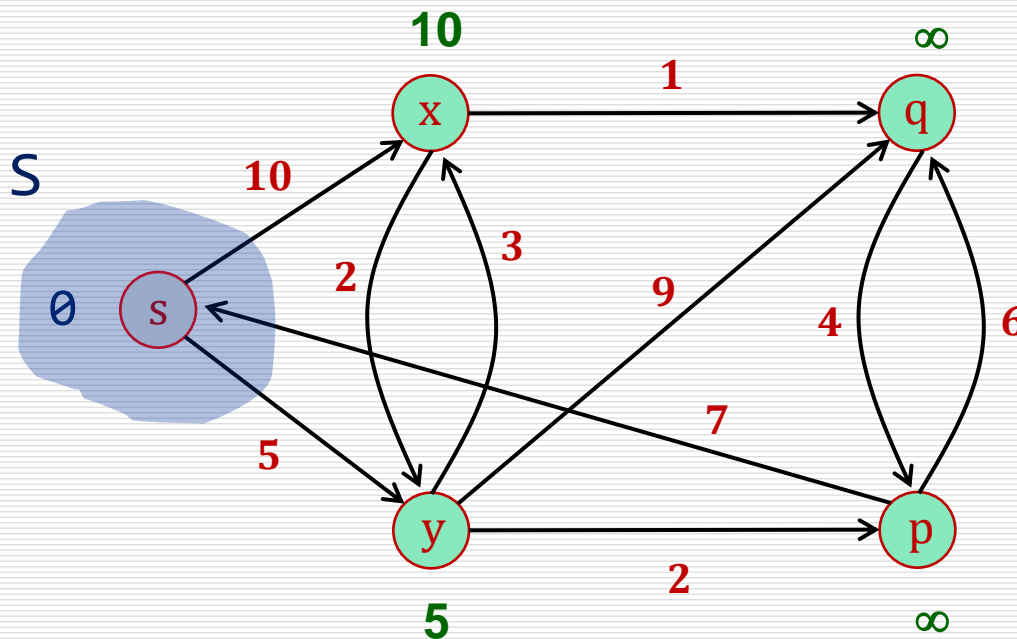
Είσοδος Αλγόριθμου



# 2ο παράδειγμα Dijkstra

$$V \setminus S = \{y, x, q, p\}$$

## Παράδειγμα



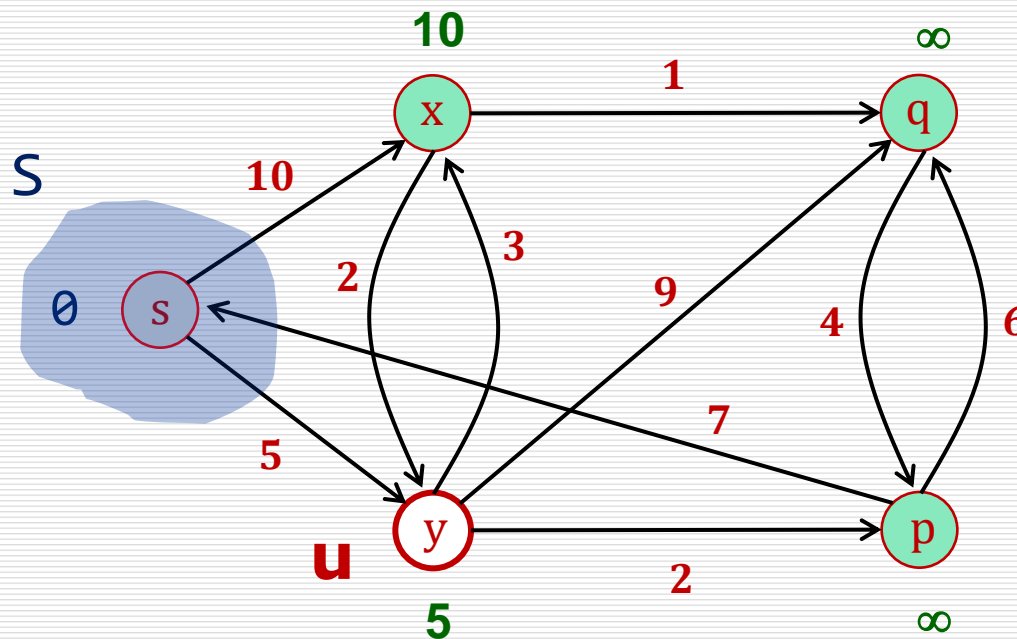
---

$d(s)=0$	$d(x)=10$	$d(y)=5$	$d(p)=\infty$	$d(q)=\infty$
$prev(s)=NIL$	$prev(x)=s$	$prev(y)=s$	$prev(p)=NIL$	$prev(q)=NIL$

# 2ο παράδειγμα Dijkstra

$$V \setminus S = \{y, x, q, p\}$$

## Παράδειγμα



$$u \leftarrow \min_{D(u)}(V \setminus S)$$
$$S \leftarrow S \cup \{u\}$$

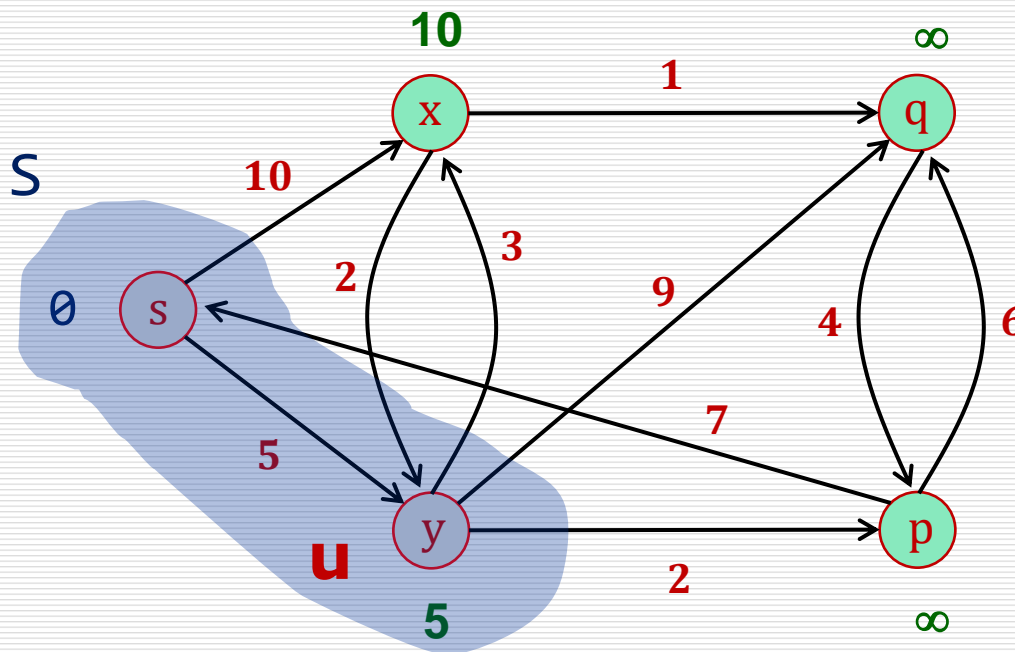
---

$d(s)=0$	$d(x)=10$	$d(y)=5$	$d(p)=\infty$	$d(q)=\infty$
$prev(s)=NIL$	$prev(x)=s$	$prev(y)=s$	$prev(p)=NIL$	$prev(q)=NIL$

# 2ο παράδειγμα Dijkstra

$$V \setminus S = \{x, q, p\}$$

▣ Παράδειγμα



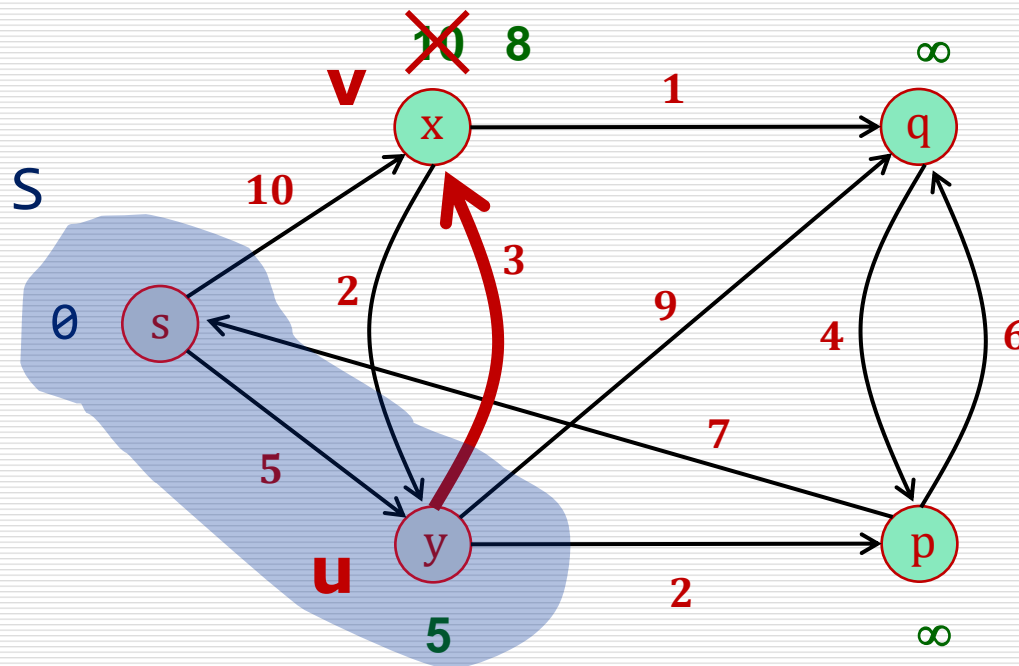
---

$d(s)=0$	$d(x)=10$	$d(y)=5$	$d(p)=\infty$	$d(q)=\infty$
$prev(s)=NIL$	$prev(x)=s$	$prev(y)=s$	$prev(p)=NIL$	$prev(q)=NIL$

# 2ο παράδειγμα Dijkstra

$$V \setminus S = \{x, q, p\}$$

▣ Παράδειγμα



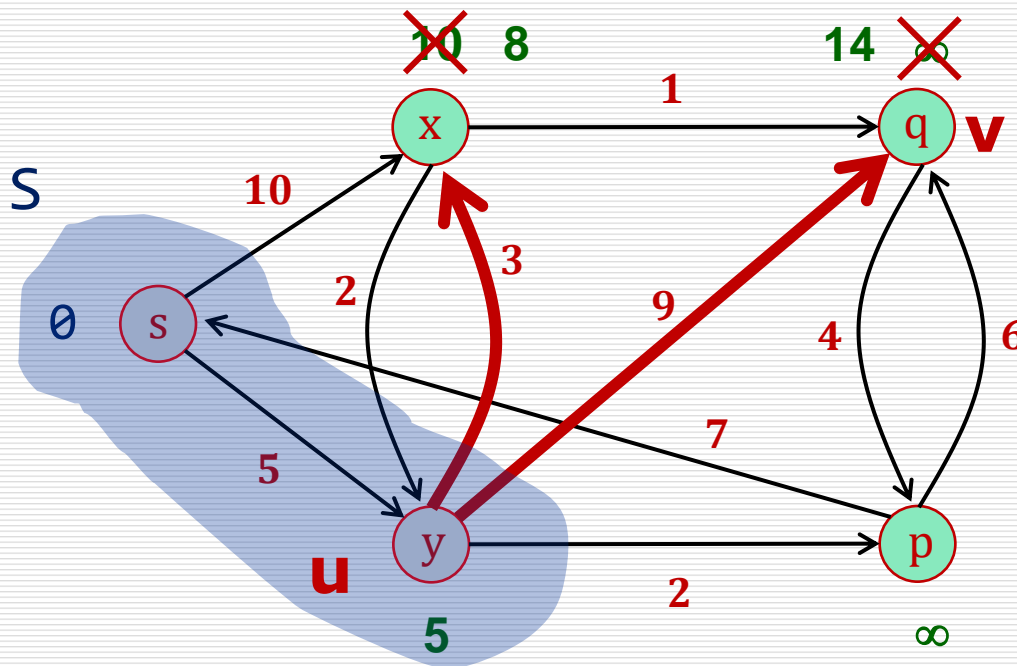
---

$d(s) = 0$	$d(x) = 8$	$d(y) = 5$	$d(p) = \infty$	$d(q) = \infty$
$prev(s) = NIL$	$prev(x) = y$	$prev(y) = s$	$prev(p) = NIL$	$prev(q) = NIL$

# 2ο παράδειγμα Dijkstra

$$V \setminus S = \{x, q, p\}$$

## Παράδειγμα



---

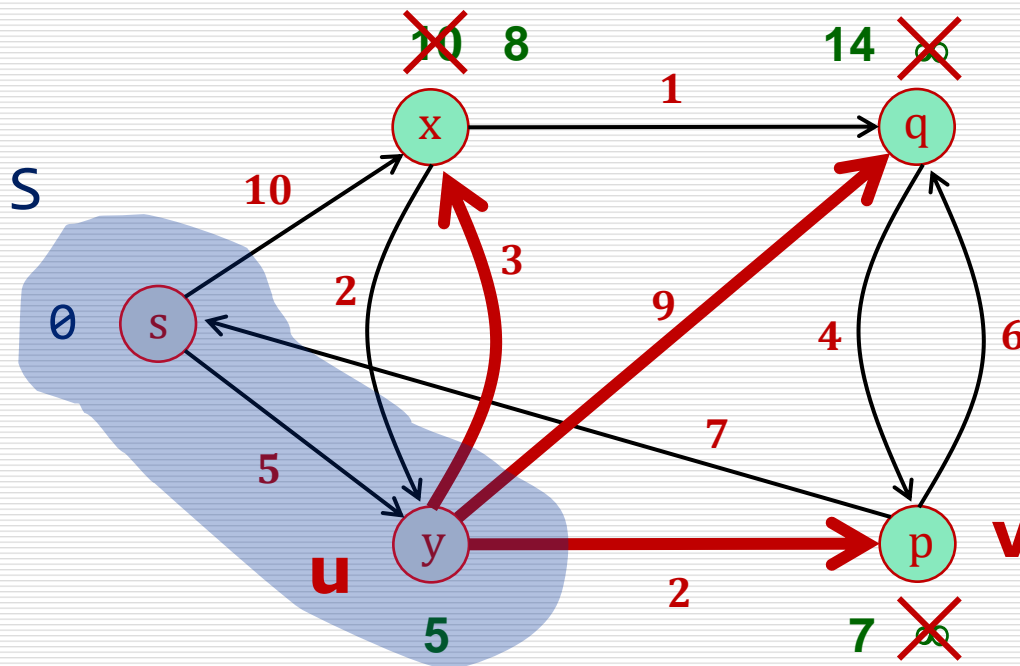
$d(s)=0$	$d(x)=8$	$d(y)=5$	$d(p)=\infty$	$d(q)=14$
$prev(s)=NIL$	$prev(x)=y$	$prev(y)=s$	$prev(p)=NIL$	$prev(q)=y$



# 2ο παράδειγμα Dijkstra

$$V \setminus S = \{p, x, q\}$$

## Παράδειγμα



$d(s)=0$   
 $prev(s)=NIL$

$d(x)=8$   
 $prev(x)=y$

$d(y)=5$   
 $prev(y)=s$

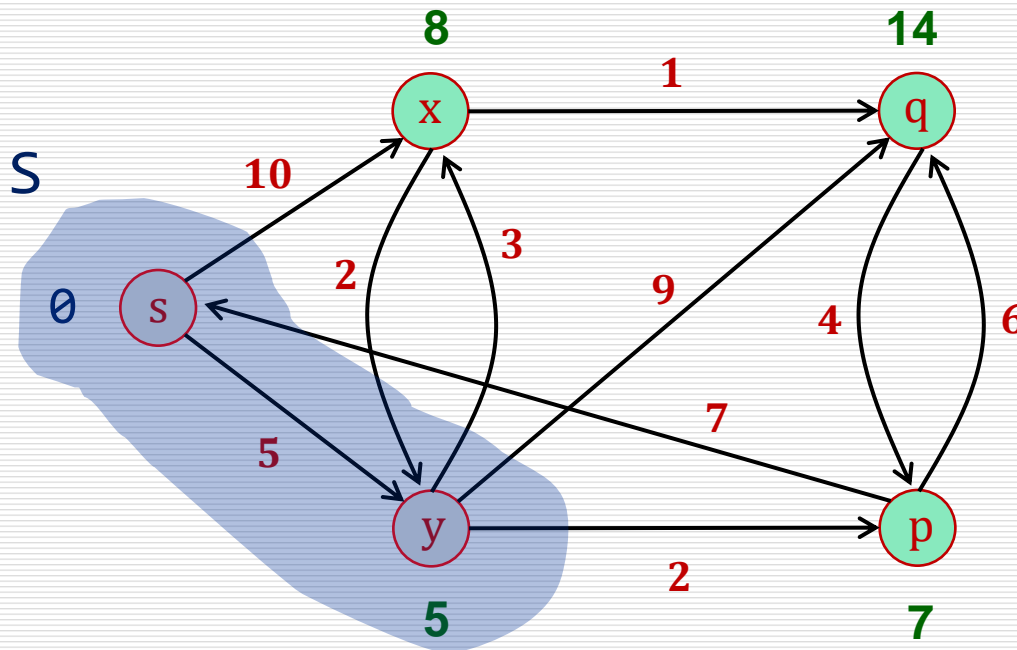
$d(p)=7$   
 $prev(p)=y$

$d(q)=13$   
 $prev(q)=y$

# 2ο παράδειγμα Dijkstra

$$V \setminus S = \{p, x, q\}$$

## Παράδειγμα



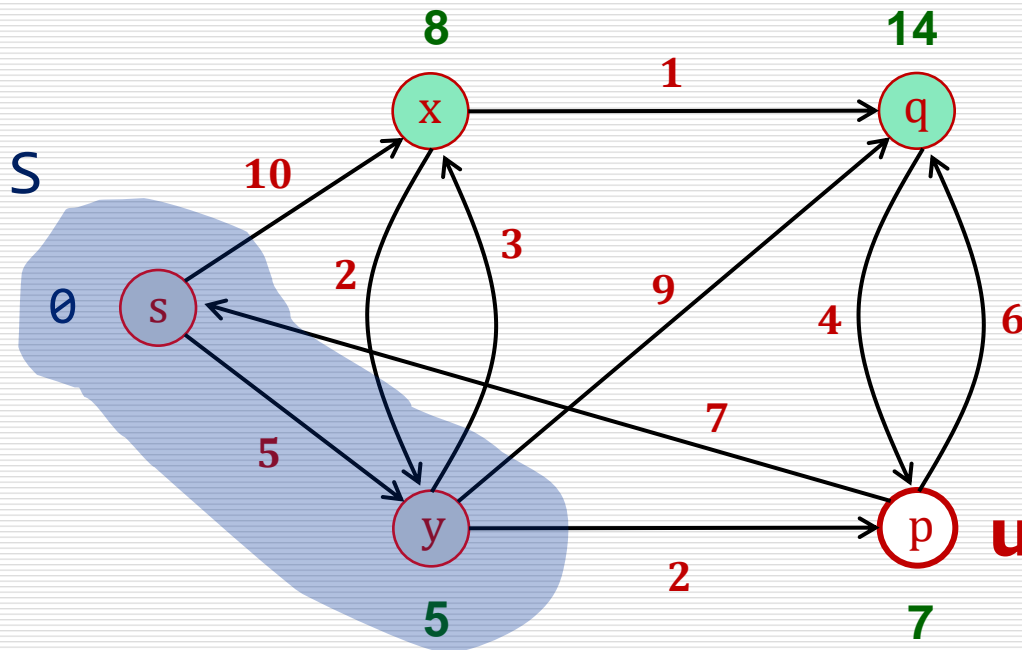
---

$d(s)=0$	$d(x)=8$	$d(y)=5$	$d(p)=7$	$d(q)=13$
$prev(s)=NIL$	$prev(x)=y$	$prev(y)=s$	$prev(p)=y$	$prev(q)=y$

# 2ο παράδειγμα Dijkstra

$$V \setminus S = \{p, x, q\}$$

## Παράδειγμα



$$u \leftarrow \min_{D(u)}(V \setminus S)$$
$$S \leftarrow S \cup \{u\}$$

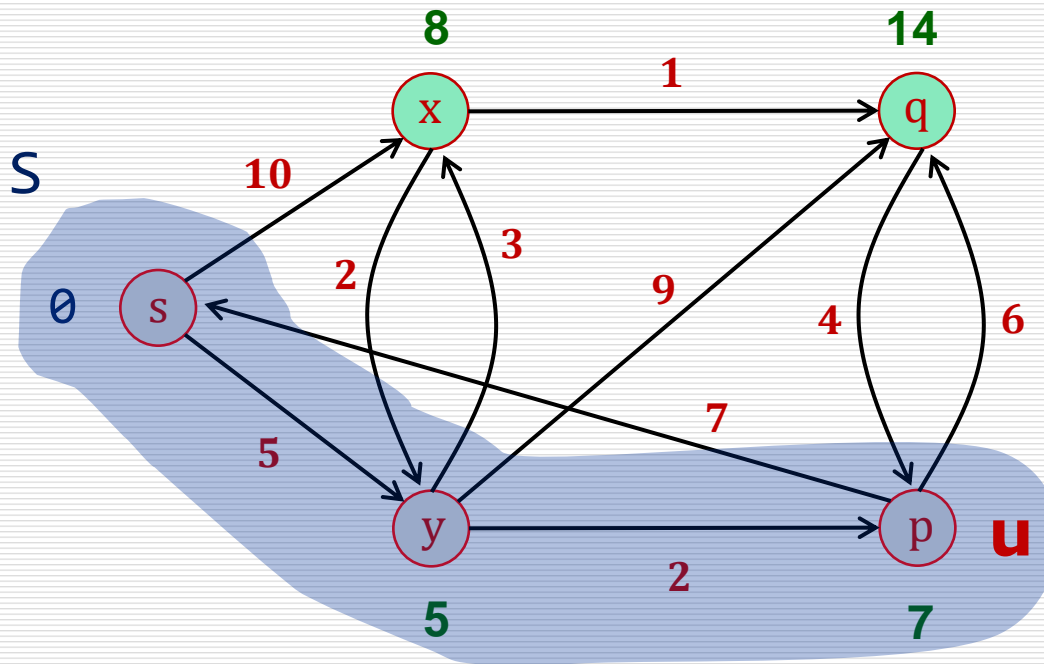
---

$d(s)=0$	$d(x)=8$	$d(y)=5$	$d(p)=7$	$d(q)=13$
$prev(s)=NIL$	$prev(x)=y$	$prev(y)=s$	$prev(p)=y$	$prev(q)=y$

# 2ο παράδειγμα Dijkstra

$$V \setminus S = \{x, q\}$$

## Παράδειγμα



$d(s) = 0$   
 $prev(s) = NIL$

$d(x) = 8$   
 $prev(x) = y$

$d(y) = 5$   
 $prev(y) = s$

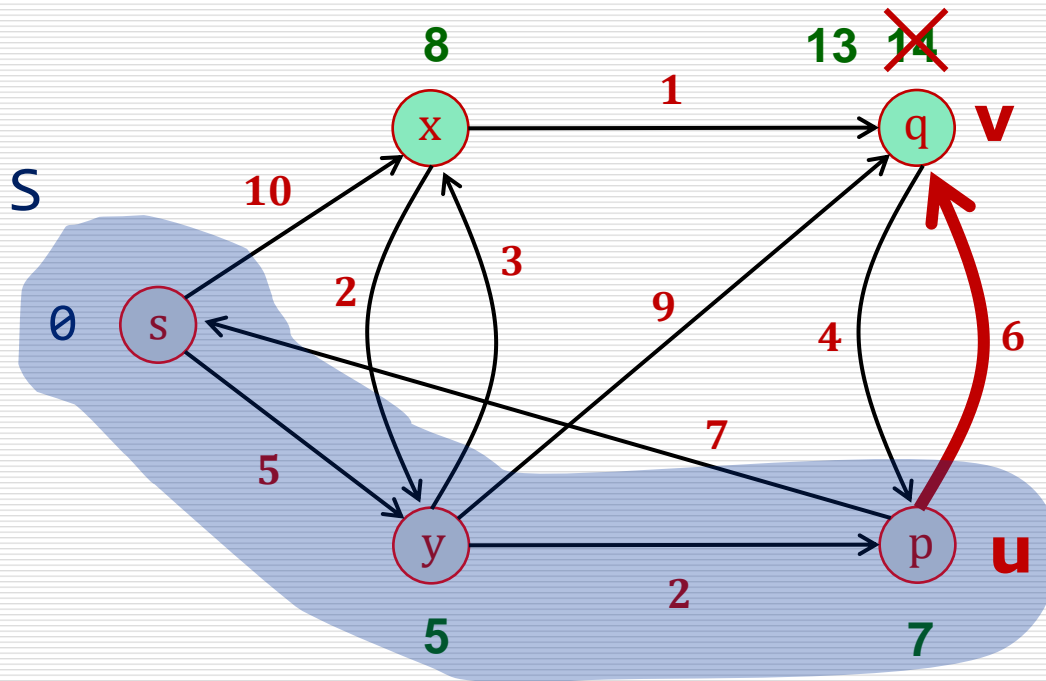
$d(p) = 7$   
 $prev(p) = y$

$d(q) = 13$   
 $prev(q) = y$

# 2ο παράδειγμα Dijkstra

$$V \setminus S = \{x, q\}$$

## Παράδειγμα

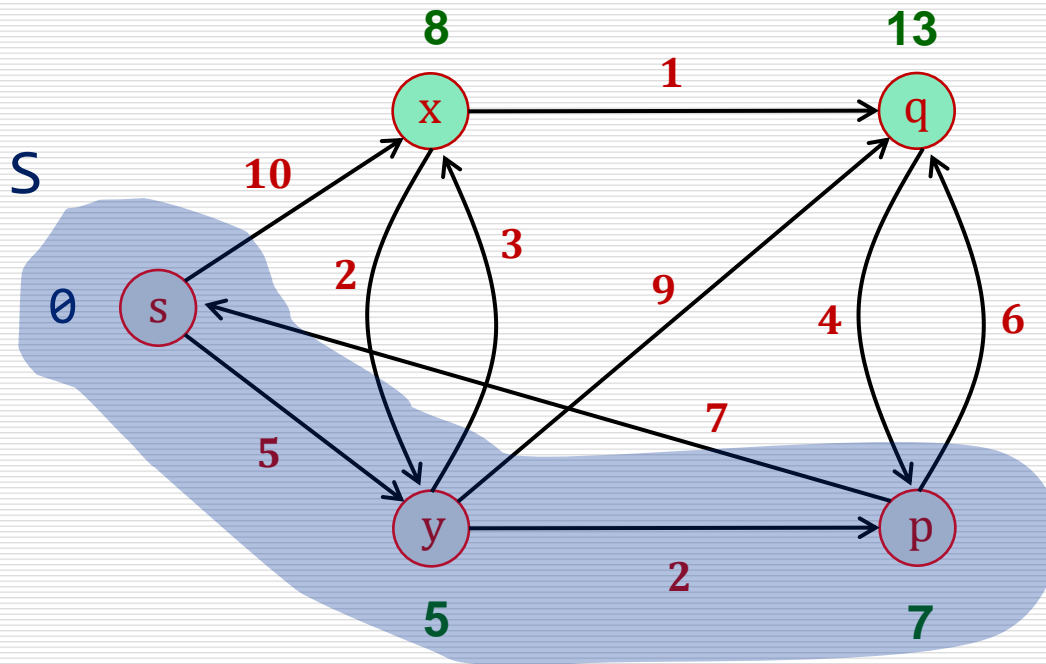


$d(s)=0$	$d(x)=8$	$d(y)=5$	$d(p)=7$	$d(q)=13$
$prev(s)=NIL$	$prev(x)=y$	$prev(y)=s$	$prev(p)=y$	$prev(q)=y$

# 2ο παράδειγμα Dijkstra

$$V \setminus S = \{x, q\}$$

## Παράδειγμα



$d(s)=0$   
 $prev(s)=NIL$

$d(x)=8$   
 $prev(x)=y$

$d(y)=5$   
 $prev(y)=s$

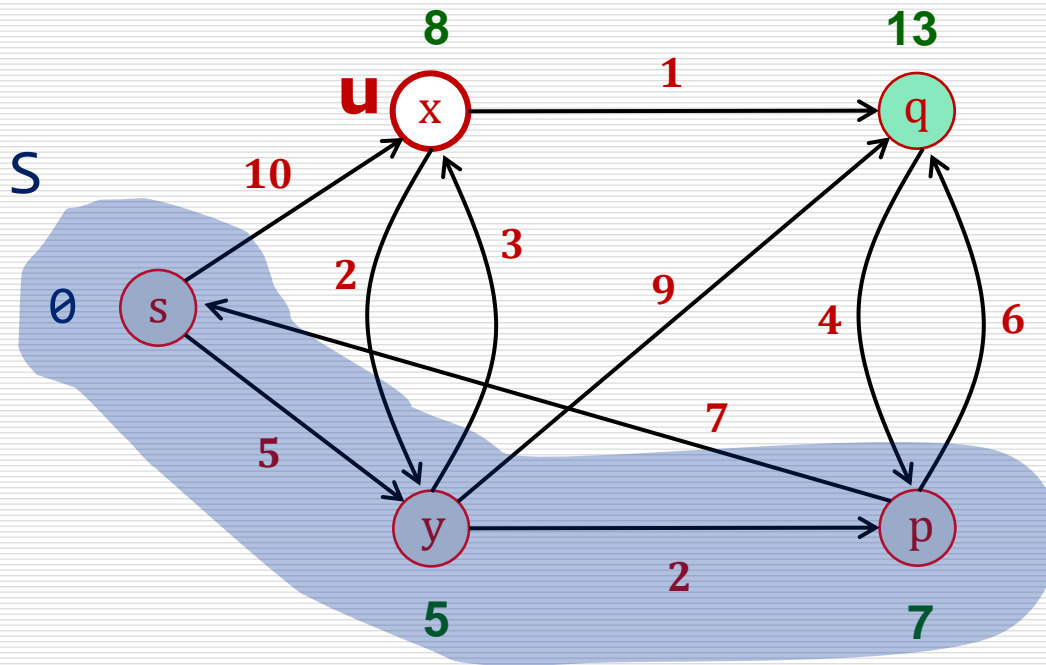
$d(p)=7$   
 $prev(p)=y$

$d(q)=13$   
 $prev(q)=y$

# 2ο παράδειγμα Dijkstra

$$V \setminus S = \{x, q\}$$

## Παράδειγμα



$$u \leftarrow \min_{D(u)}(V \setminus S)$$
$$S \leftarrow S \cup \{u\}$$

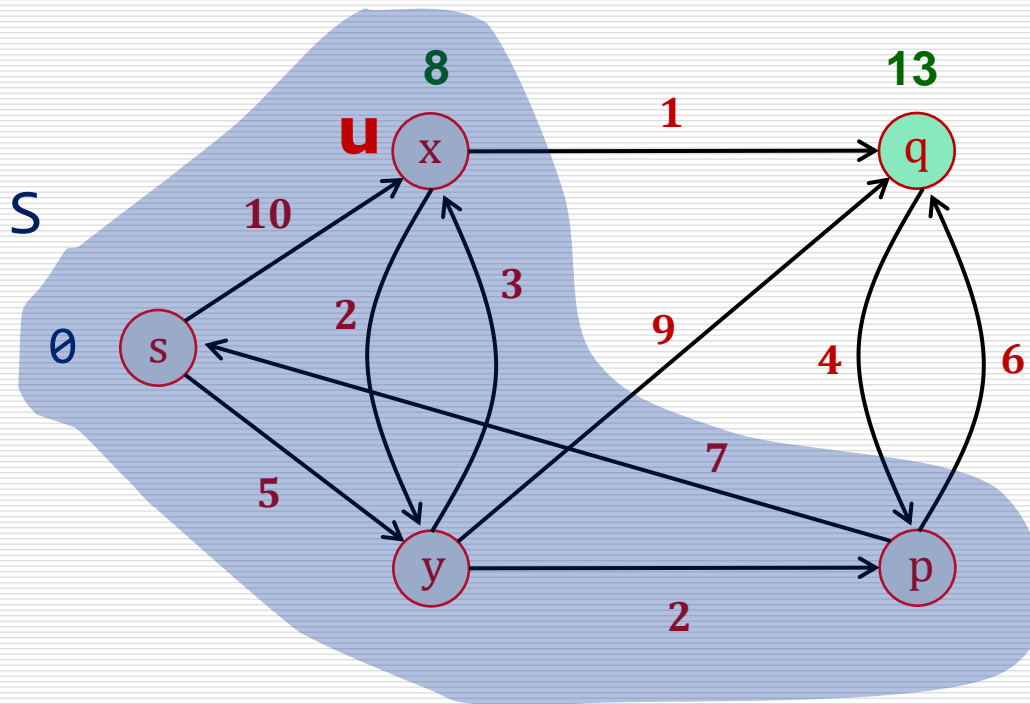
---

$d(s)=0$	$d(x)=8$	$d(y)=5$	$d(p)=7$	$d(q)=13$
$\text{prev}(s)=\text{NIL}$	$\text{prev}(x)=y$	$\text{prev}(y)=s$	$\text{prev}(p)=y$	$\text{prev}(q)=y$

# 2ο παράδειγμα Dijkstra

$$V \setminus S = \{q\}$$

## Παράδειγμα



$d(s)=0$   
 $prev(s)=NIL$

$d(x)=8$   
 $prev(x)=y$

$d(y)=5$   
 $prev(y)=s$

$d(p)=7$   
 $prev(p)=y$

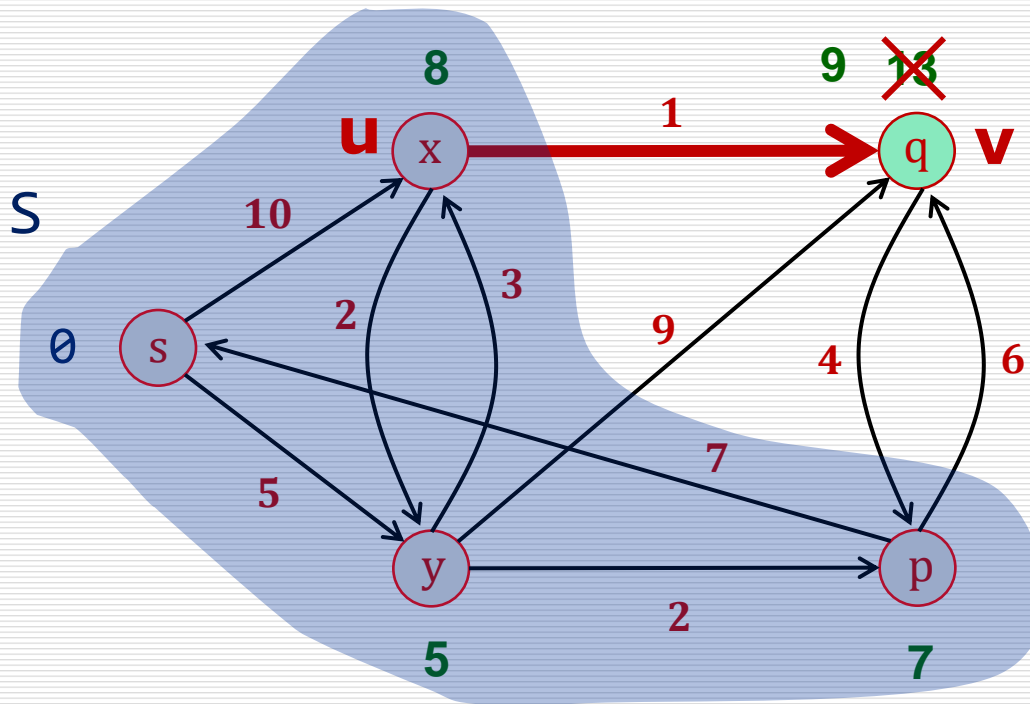
$d(q)=13$   
 $prev(q)=y$



# 2ο παράδειγμα Dijkstra

$$V \setminus S = \{q\}$$

## Παράδειγμα



$$d(s)=0$$

$$\text{prev}(s)=\text{NIL}$$

$$d(x)=8$$

$$\text{prev}(x)=y$$

$$d(y)=5$$

$$\text{prev}(y)=s$$

$$d(p)=7$$

$$\text{prev}(p)=y$$

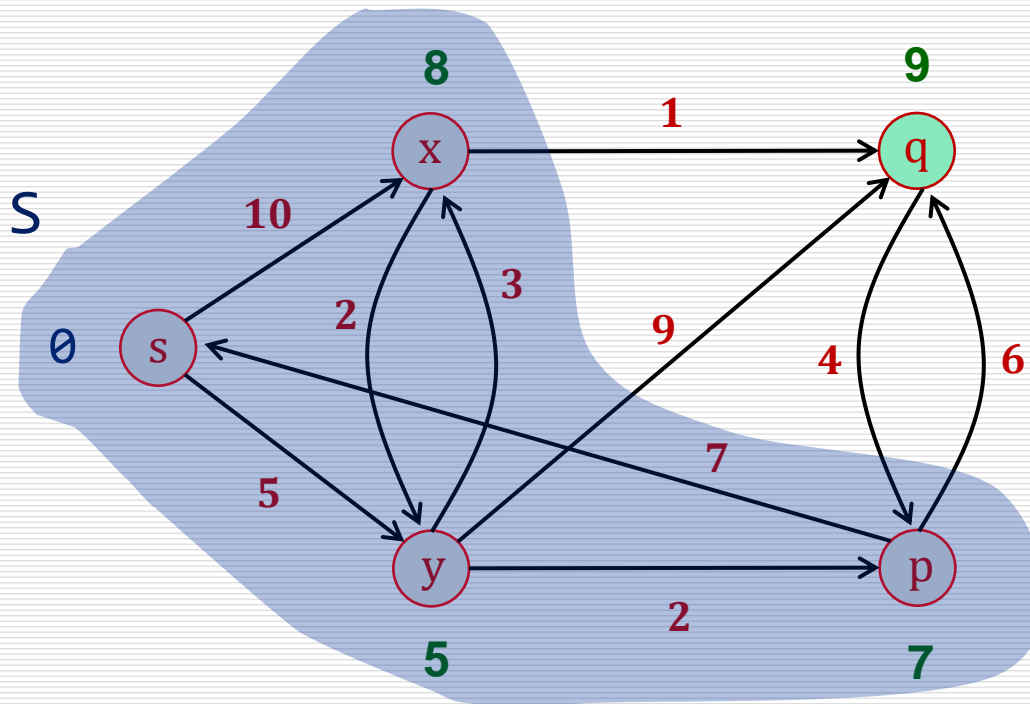
$$d(q)=9$$

$$\text{prev}(q)=x$$

# 2ο παράδειγμα Dijkstra

$$V \setminus S = \{q\}$$

## Παράδειγμα



$$d(s)=0$$

$$prev(s)=NIL$$

$$d(x)=8$$

$$prev(x)=y$$

$$d(y)=5$$

$$prev(y)=s$$

$$d(p)=7$$

$$prev(p)=y$$

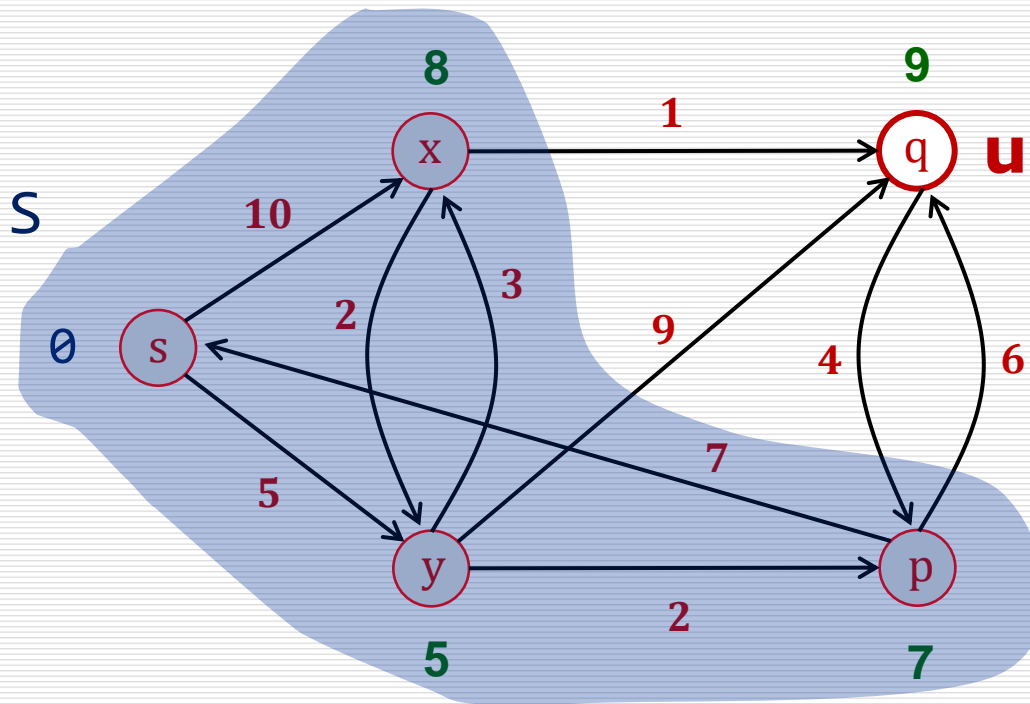
$$d(q)=9$$

$$prev(q)=x$$

# 2ο παράδειγμα Dijkstra

$$V \setminus S = \{q\}$$

## Παράδειγμα



$$u \leftarrow \min_{D(u)}(V \setminus S)$$
$$S \leftarrow S \cup \{u\}$$

$$d(s)=0$$

$$d(x)=8$$

$$d(y)=5$$

$$d(p)=7$$

$$d(q)=9$$

$$\text{prev}(s)=\text{NIL}$$

$$\text{prev}(x)=y$$

$$\text{prev}(y)=s$$

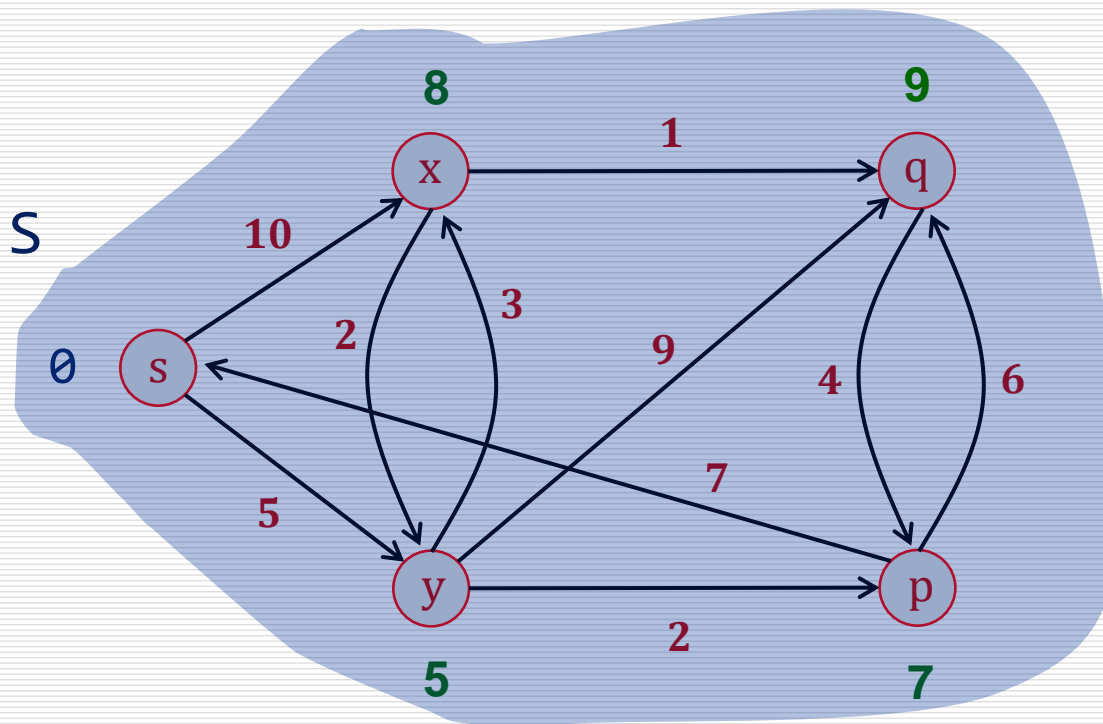
$$\text{prev}(p)=y$$

$$\text{prev}(q)=x$$

# 2ο παράδειγμα Dijkstra

$$V \setminus S = \{\}$$

## Παράδειγμα



---

$$d(s)=0$$
$$\text{prev}(s)=\text{NIL}$$

$$d(x)=8$$
$$\text{prev}(x)=y$$

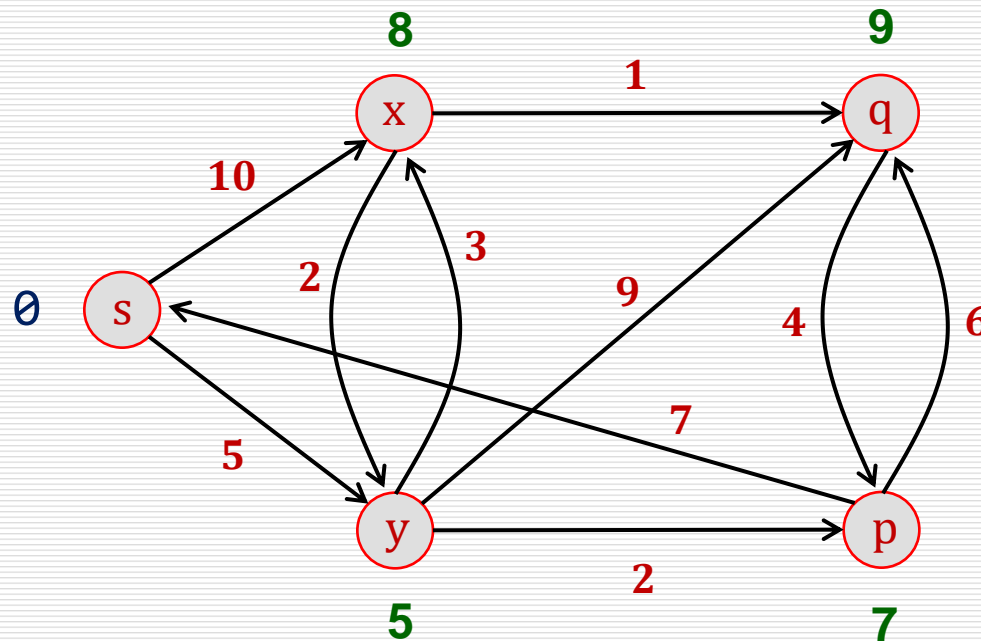
$$d(y)=5$$
$$\text{prev}(y)=s$$

$$d(p)=7$$
$$\text{prev}(p)=y$$

$$d(q)=9$$
$$\text{prev}(q)=x$$

# 2ο παράδειγμα Dijkstra

## Παράδειγμα



$$d(s)=0$$

$$\text{prev}(s)=\text{NIL}$$

$$d(x)=8$$

$$\text{prev}(x)=y$$

$$d(y)=5$$

$$\text{prev}(y)=s$$

$$d(p)=7$$

$$\text{prev}(p)=y$$

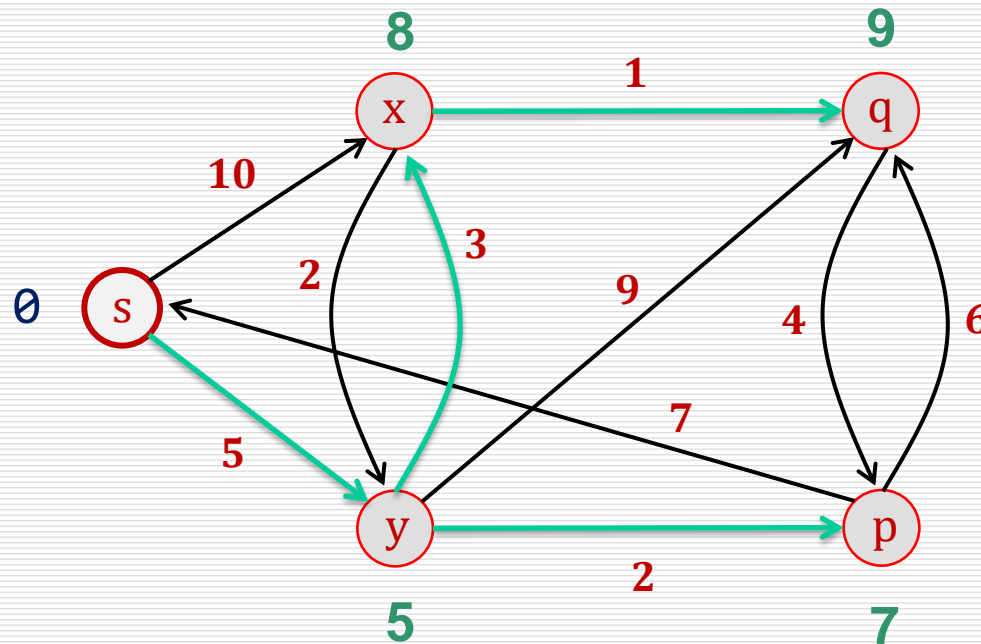
$$d(q)=9$$

$$\text{prev}(q)=x$$

# 2ο παράδειγμα Dijkstra

Παράδειγμα

Έξοδος Αλγόριθμου



**Κόστος**  
συντομότερων  
διαδρομών

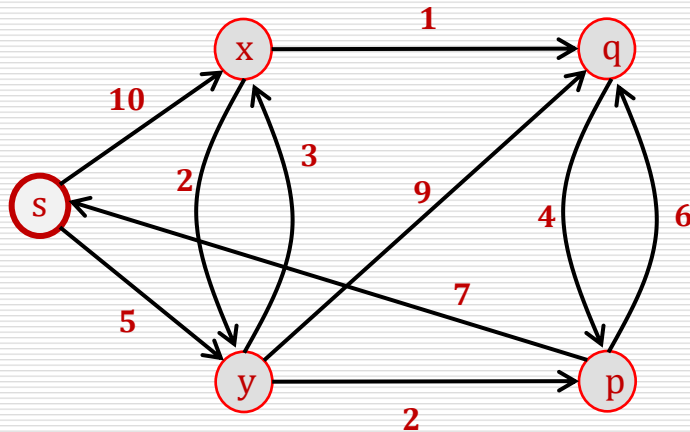
**Προηγούμενοι**  
κόμβοι στις  
ελάχιστες  
διαδρομές =>

**Δέντρο**  
ελαχίστων  
διαδρομών

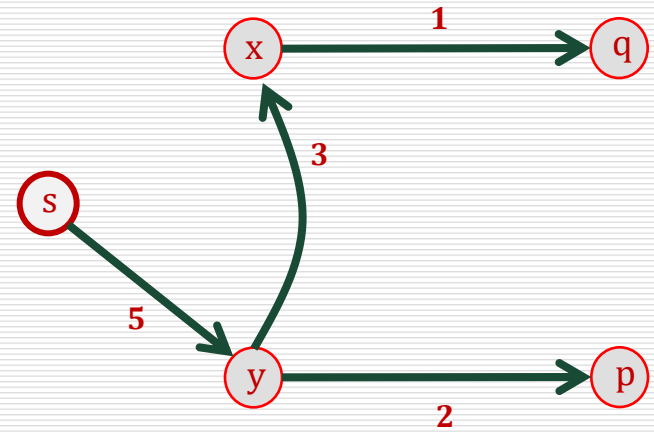
$d(s)=0$	$d(x)=8$	$d(y)=5$	$d(p)=7$	$d(q)=9$
$prev(s)=NIL$	$prev(x)=y$	$prev(y)=s$	$prev(p)=y$	$prev(q)=x$

# 2ο παράδειγμα Dijkstra

## Παράδειγμα

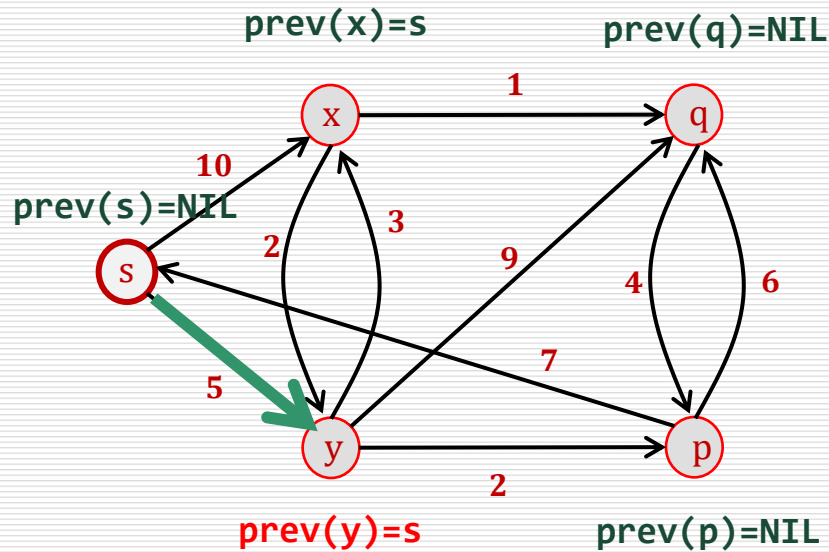


## Δέντρο Ελάχιστων Διαδρομών

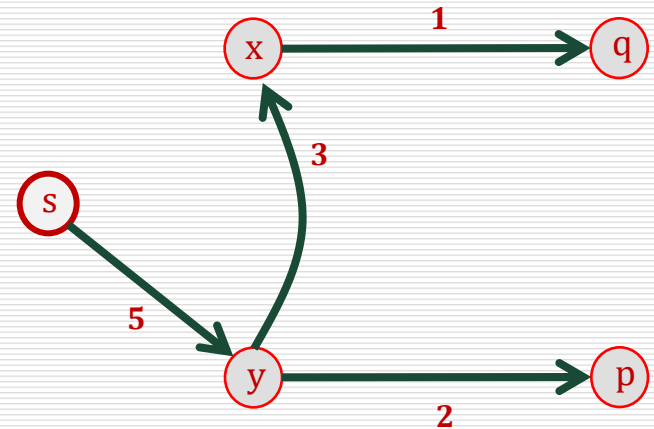


# 2ο παράδειγμα Dijkstra

## Παράδειγμα



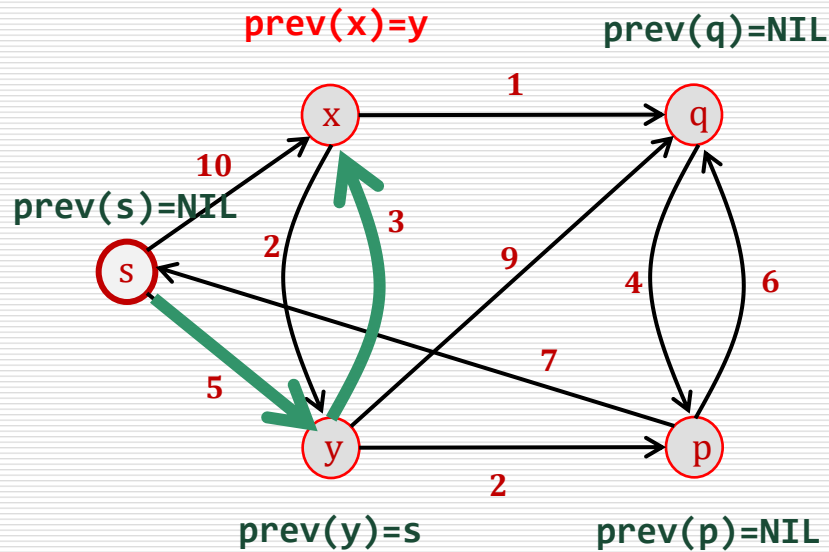
## Δένδρο Ελάχιστων Διαδρομών ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ



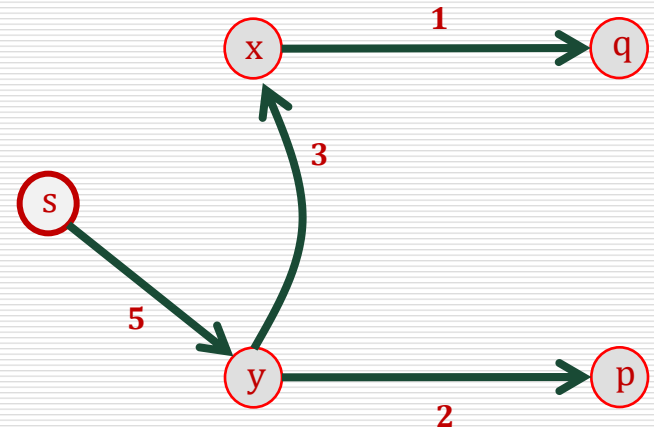


# 2ο παράδειγμα Dijkstra

## Παράδειγμα

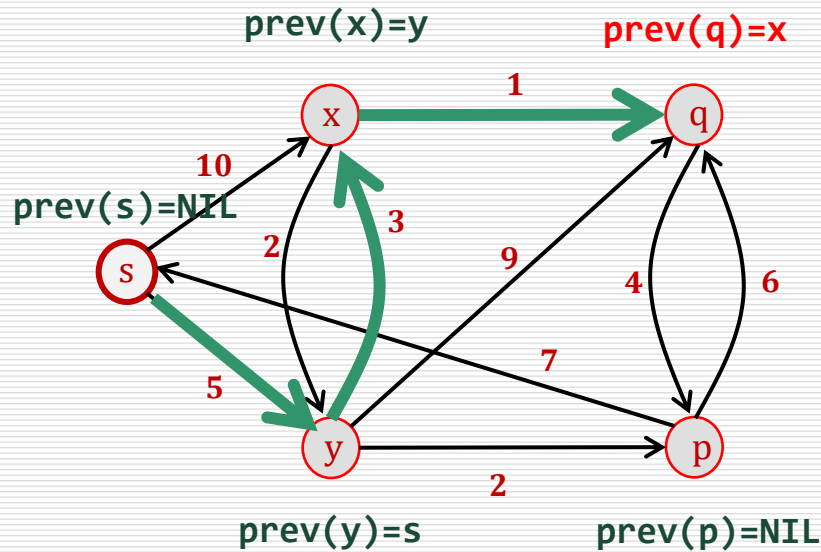


## Δένδρο Ελάχιστων Διαδρομών ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ

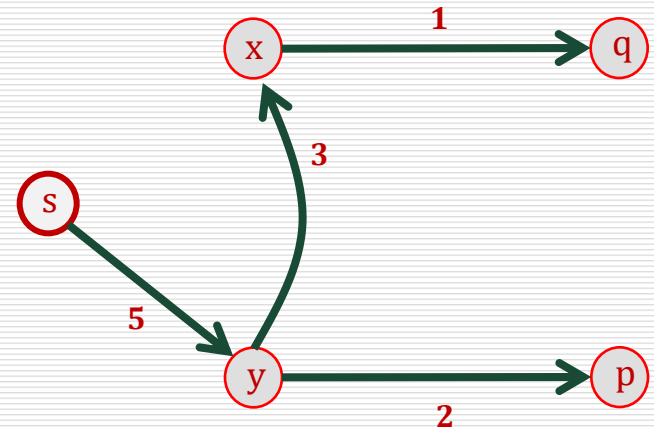


# 2ο παράδειγμα Dijkstra

## Παράδειγμα

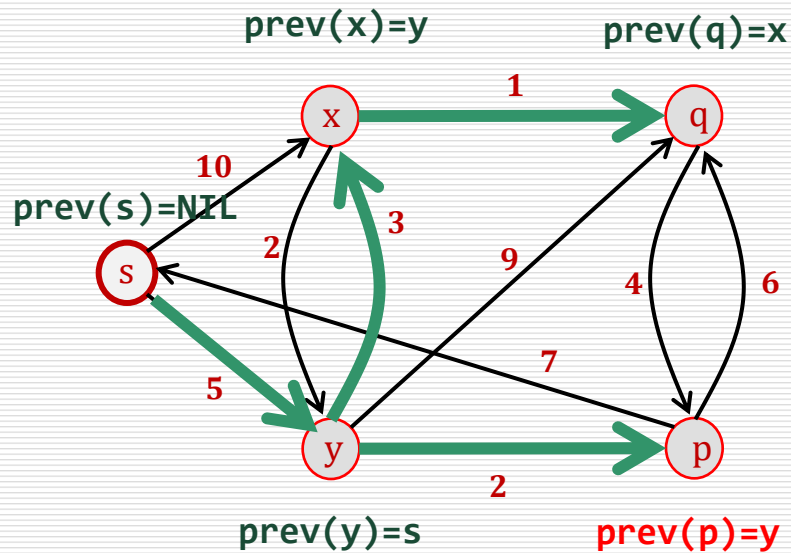


## Δένδρο Ελάχιστων Διαδρομών ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ

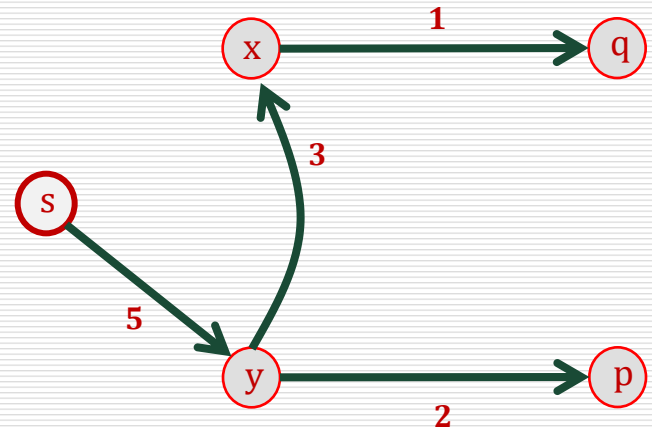


# 2ο παράδειγμα Dijkstra

## Παράδειγμα

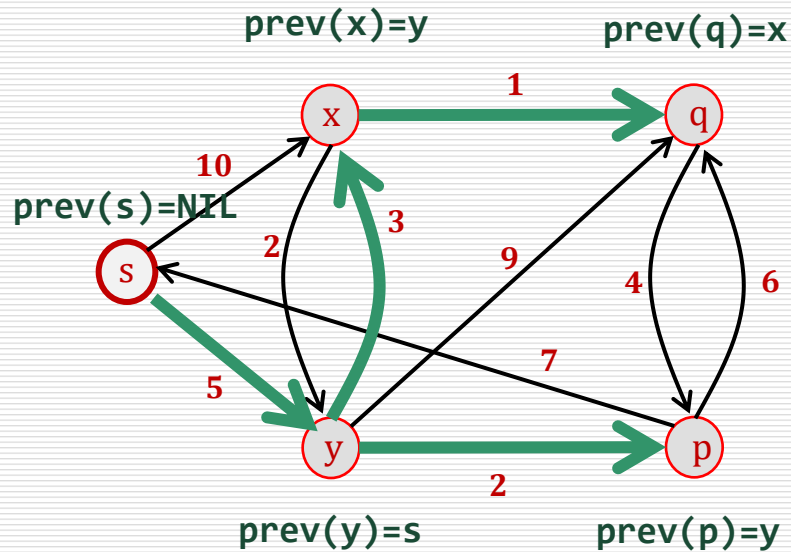


## Δένδρο Ελάχιστων Διαδρομών ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ

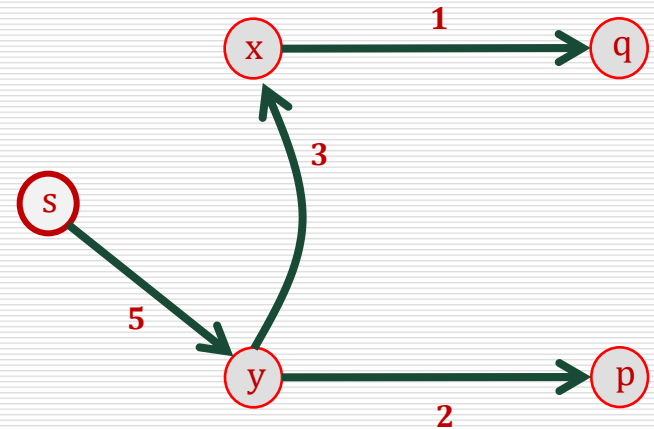


# 2ο παράδειγμα Dijkstra

## Παράδειγμα

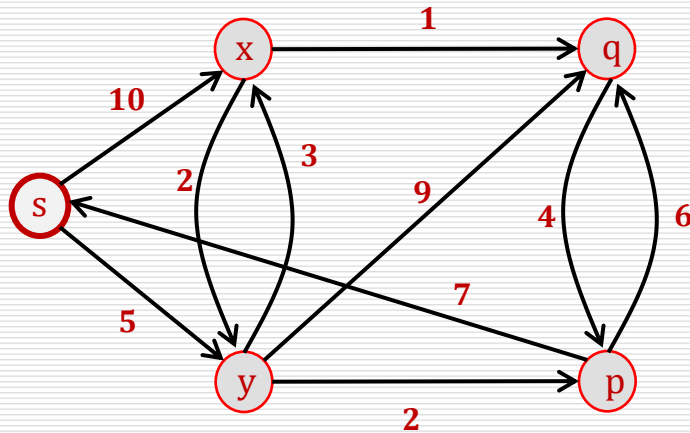


## Δένδρο Ελάχιστων Διαδρομών ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ

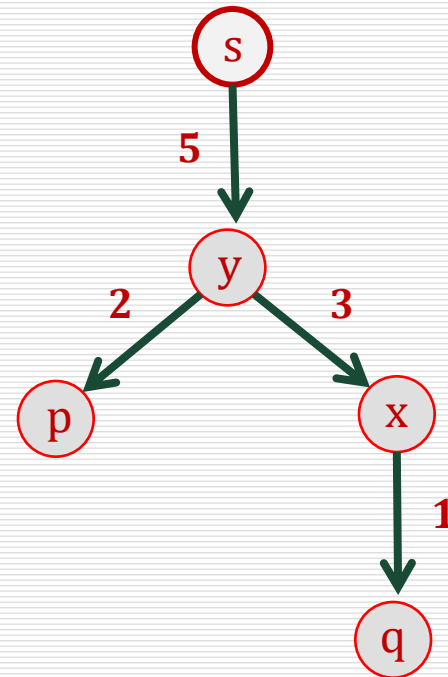


# 2ο παράδειγμα Dijkstra

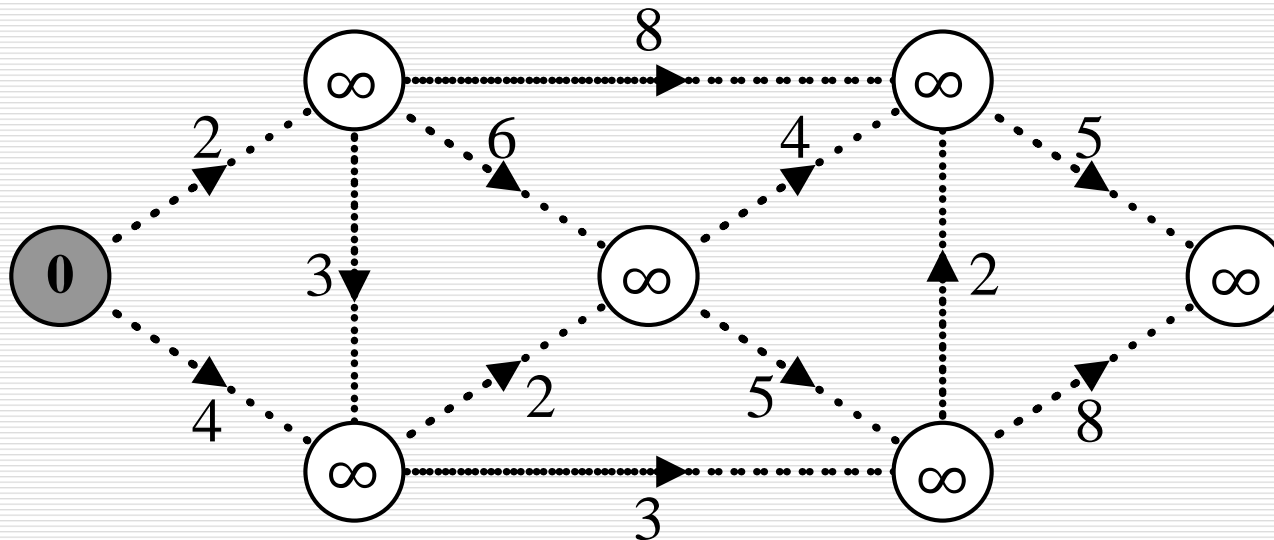
## Παράδειγμα



Δένδρο Ελάχιστων Διαδρομών  
ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ

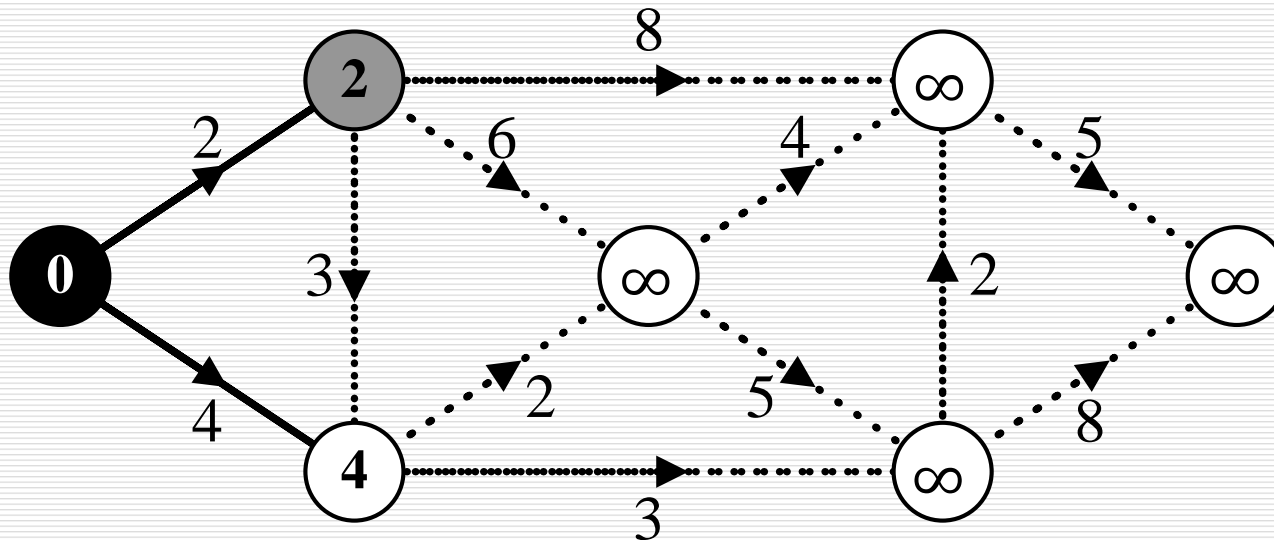


# 3ο παράδειγμα Dijkstra



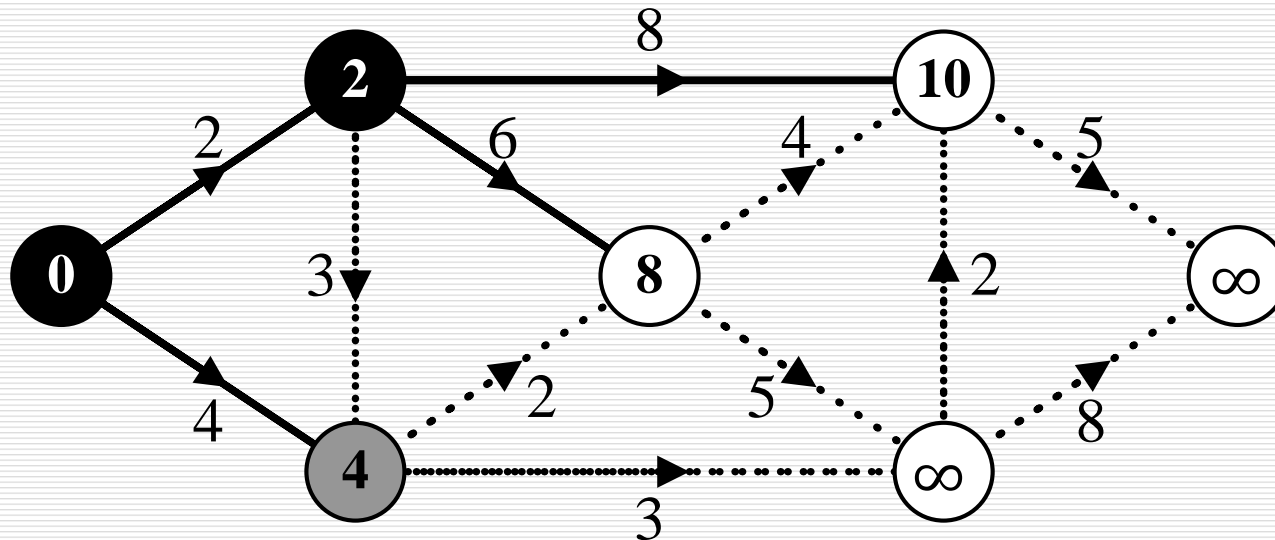
Οι ετικέτες των κόμβων δείχνουν την μέχρι στιγμής ελάχιστη απόσταση από τον αρχικό κόμβο (πίνακας D).

# 3ο παράδειγμα Dijkstra



Οι ετικέτες των κόμβων δείχνουν την μέχρι στιγμής ελάχιστη απόσταση από τον αρχικό κόμβο (πίνακας D), οι συνεχείς ακμές δείχνουν ποιος είναι ο αντίστοιχος προηγούμενος κόμβος (πίνακας P).

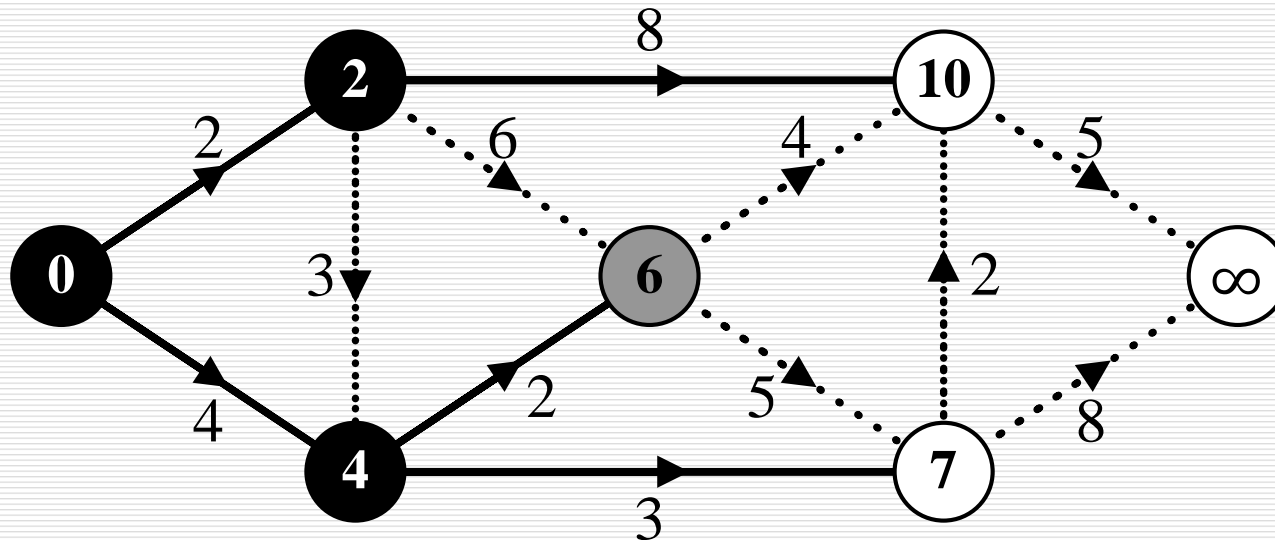
# 3ο παράδειγμα Dijkstra



Οι ετικέτες των κόμβων δείχνουν την μέχρι στιγμής ελάχιστη απόσταση από τον αρχικό κόμβο (πίνακας D), οι συνεχείς ακμές δείχνουν ποιος είναι ο αντίστοιχος προηγούμενος κόμβος (πίνακας P).



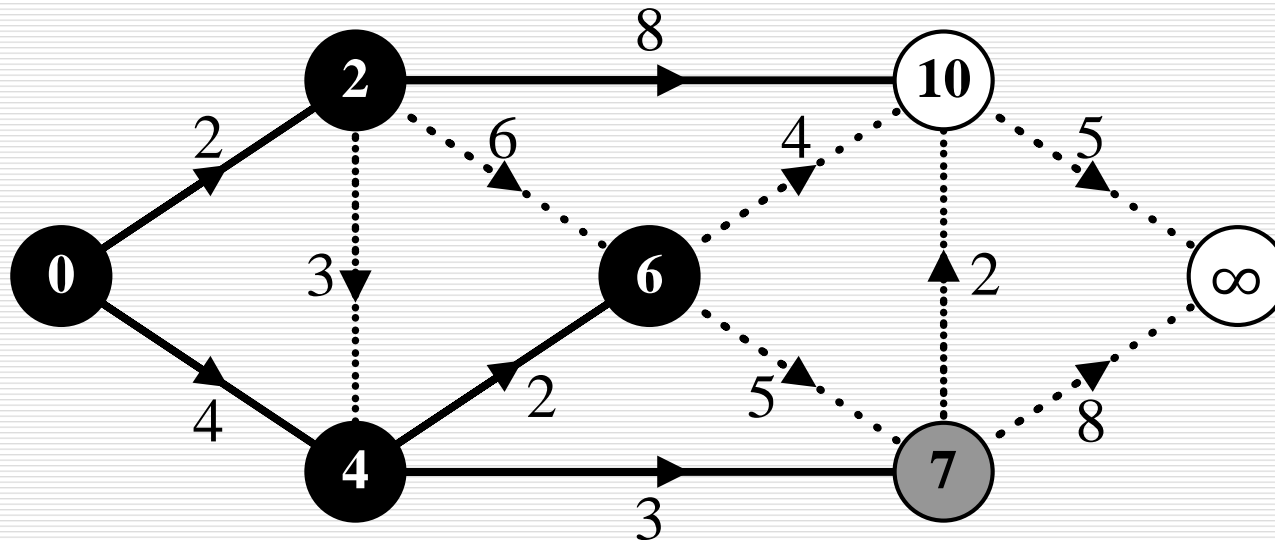
# 3ο παράδειγμα Dijkstra



Οι ετικέτες των κόμβων δείχνουν την μέχρι στιγμής ελάχιστη απόσταση από τον αρχικό κόμβο (πίνακας D), οι συνεχείς ακμές δείχνουν ποιος είναι ο αντίστοιχος προηγούμενος κόμβος (πίνακας P).

# 3ο παράδειγμα Dijkstra

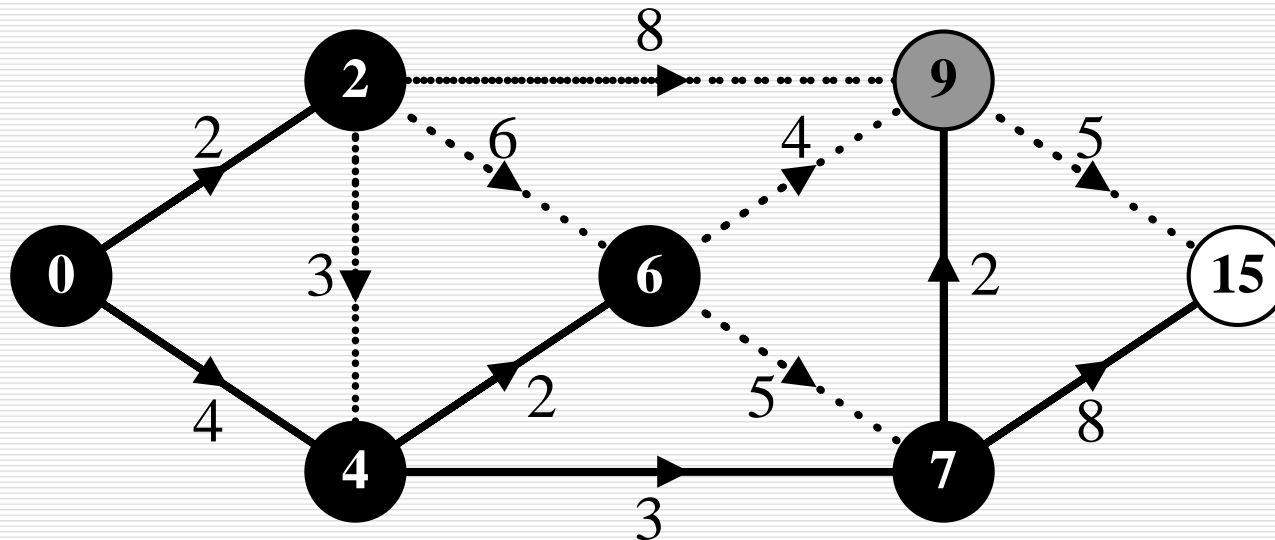
---



Οι ετικέτες των κόμβων δείχνουν την μέχρι στιγμής ελάχιστη απόσταση από τον αρχικό κόμβο (πίνακας D), οι συνεχείς ακμές δείχνουν ποιος είναι ο αντίστοιχος προηγούμενος κόμβος (πίνακας P).

# 3ο παράδειγμα Dijkstra

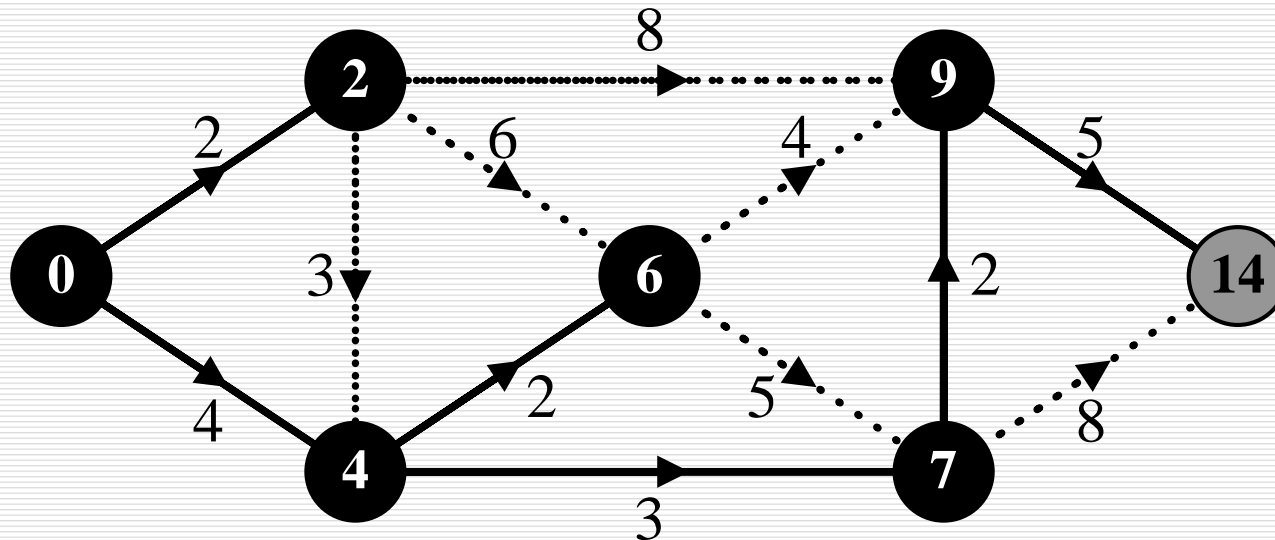
---



Οι ετικέτες των κόμβων δείχνουν την μέχρι στιγμής ελάχιστη απόσταση από τον αρχικό κόμβο (πίνακας D), οι συνεχείς ακμές δείχνουν ποιος είναι ο αντίστοιχος προηγούμενος κόμβος (πίνακας P).

# 3ο παράδειγμα Dijkstra

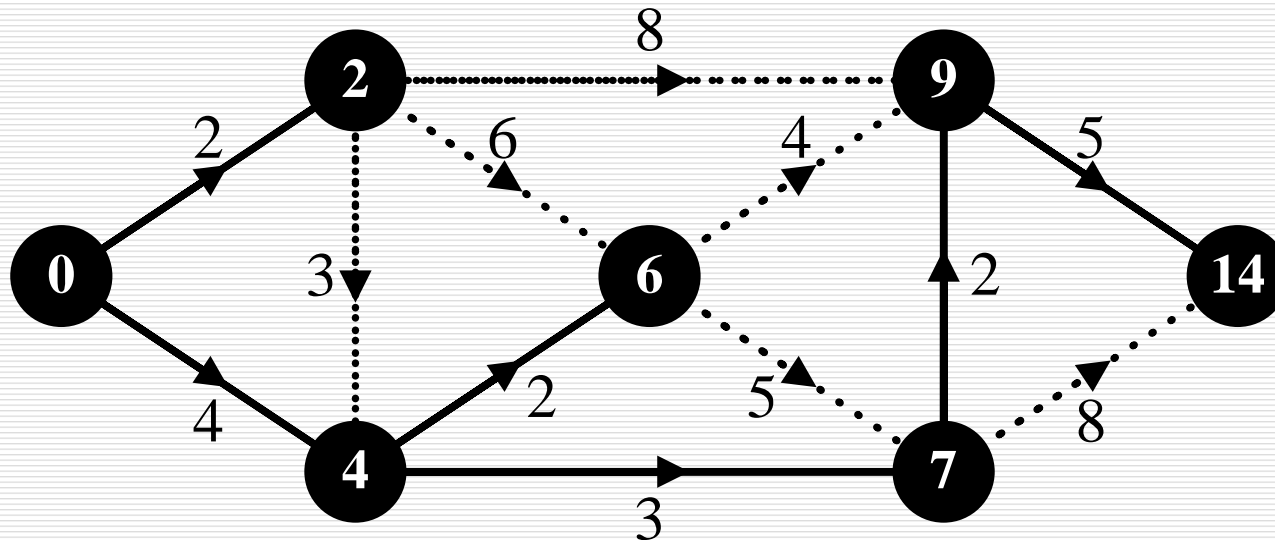
---



Οι ετικέτες των κόμβων δείχνουν την μέχρι στιγμής ελάχιστη απόσταση από τον αρχικό κόμβο (πίνακας D), οι συνεχείς ακμές δείχνουν ποιος είναι ο αντίστοιχος προηγούμενος κόμβος (πίνακας P).

# 3ο παράδειγμα Dijkstra

---



Οι ετικέτες των κόμβων δείχνουν την μέχρι στιγμής ελάχιστη απόσταση από τον αρχικό κόμβο (πίνακας D), οι συνεχείς ακμές δείχνουν ποιος είναι ο αντίστοιχος προηγούμενος κόμβος (πίνακας P).

# Πολυπλοκότητα Dijkstra

---

- Ομοιότητες με αλγόριθμο BFS;
  - Πιο αργός από BFS (ουρά προτεραιότητας vs απλή ουρά)
  - Απαιτεί  $n = |V|$  λειτουργίες insert στην ουρά, και  $m = |E|$  λειτουργίες update:
    - $|V|$  insert / extract-min
    - $|E|$  update
  - Υλοποίηση ουράς με πίνακα  $\Rightarrow O(|V|^2)$
  - Υλοποίηση ουράς με δυαδικό σωρό  $\Rightarrow O(|E| \log |V|)$
  - Υλοποίηση ουράς με σωρό Fibonacci  $\Rightarrow O(|E| + |V| \log |V|)$
-

# Ορθότητα αλγορίθμου Dijkstra

---

- Ο αλγόριθμος δημιουργεί σταδιακά ένα **δένδρο συντομότερων διαδρομών**. Το δένδρο αρχικοποιείται με τον αρχικό κόμβο  $s$ .
- Σε κάθε επανάληψη επιλέγεται ο κόμβος  $w$  με την **ελάχιστη προσωρινή ετικέτα** (τρέχουσα απόσταση) **από τον  $s$** .
- Η απόδειξη στηρίζεται σε δύο αναλλοίωτες συνθήκες βρόχου.

# Ορθότητα αλγορίθμου Dijkstra

---

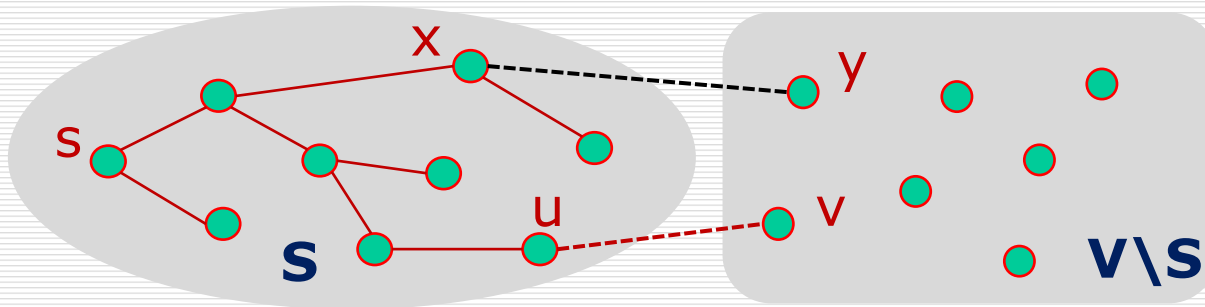
- **1η αναλλοίωτη βρόχου:** μετά από κάθε επανάληψη του εξωτερικού βρόχου, η **ετικέτα  $D(u)$**  κάθε κόμβου  $u$  του  $S$  ισούται με το **κόστος της συντομότερης διαδρομής από τον  $s$  προς τον  $u$** , και η **ετικέτα  $D(v)$**  κάθε κόμβου  $v$  του  $V \setminus S$  ισούται με το **κόστος της συντομότερης διαδρομής από τον  $s$  στον  $v$ , μεταξύ όλων των διαδρομών που περνούν μόνο από κόμβους του συνόλου  $S$ .**
- **2η αναλλοίωτη βρόχου:** μετά από κάθε επανάληψη του εξωτερικού βρόχου, για τον κόμβο  $w$  που ανήκει στο  $V \setminus S$  και έχει **ελάχιστη** (μεταξύ κόμβων του  $V \setminus S$ ) **ετικέτα  $D(w)$** , αυτή ισούται με το **κόστος της συντομότερης διαδρομής από τον  $s$  στον  $w$ .**
- Απόδειξη: με επαγωγή.



# Ορθότητα αλγορίθμου Dijkstra

**Λήμμα:** 1<sup>η</sup> αναλλοίωτη  $\Rightarrow$  2<sup>η</sup> αναλλοίωτη

Έστω  $G = (V, E)$  γράφος με μη-αρνητικά βάρη,  $S \in V$ , και  $(S, V \setminus S)$  μια διαμέριση του  $V$  τ.ώ.  $s \in S$  και  $\forall u \in S$  η ετικέτα του  $u$  ισούται με την ελάχιστη απόσταση  $D(s, u)$ .



Έστω  $v \in V \setminus S$  ο κόμβος με την ελάχιστη ετικέτα στο  $V \setminus S$ . Τότε υπάρχει ακμή  $(u, v)$  που ελαχιστοποιεί την ποσότητα

$$D(s, u) + c(u, v)$$

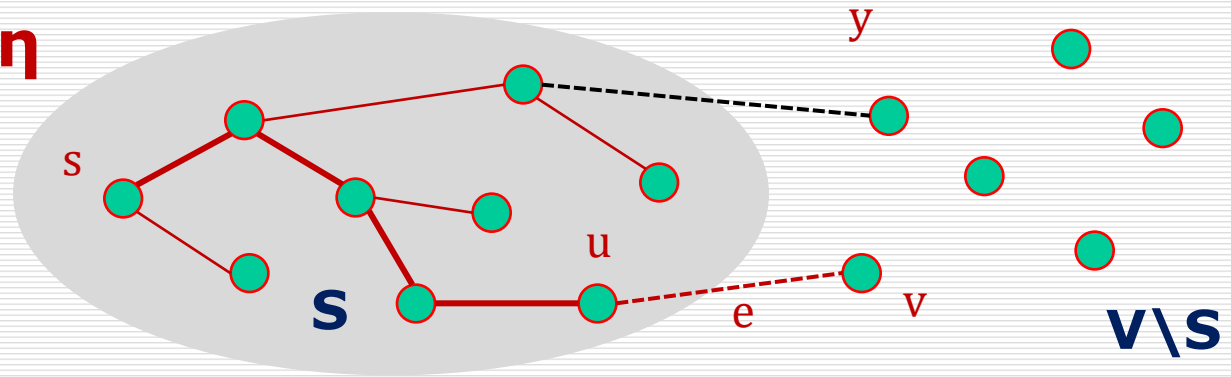
μεταξύ όλων των ακμών  $(x, y)$  με  $x \in S$  και  $y \in V \setminus S$ . Θ.δ.ό.

$P = (s, \dots, u, v)$  είναι σ.δ. από  $s$  σε  $v$ .

# Ορθότητα αλγορίθμου Dijkstra

---

## Απόδειξη



Έστω  $e = (u, v)$  και έστω  $(s, \dots, u)$  η ελάχιστη διαδρομή από τον  $s$  στον  $u$ .

Για την διαδρομή  $P = (s, \dots, u, v)$  από τον  $s$  στον  $v$  ισχύει :

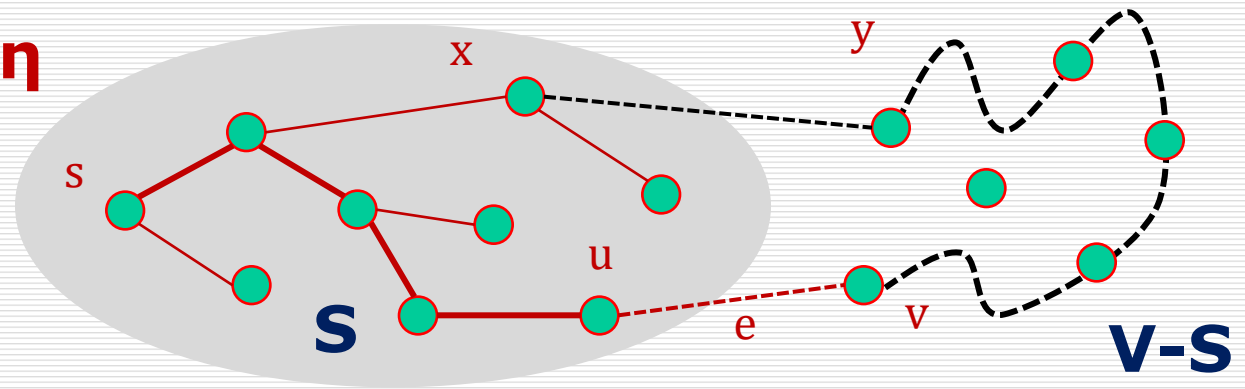
$$c(P) = D(s,u) + c(u,v) \quad (1)$$

---

# Ορθότητα αλγορίθμου Dijkstra

---

## Απόδειξη



Έστω  $Q = (s, \dots, x, y, \dots, v)$  μια ελάχιστη διαδρομή από τον  $s$  στον  $v$ , και

έστω  $y$  ο πρώτος κόμβος της διαδρομής  $Q : y \in V \setminus S$

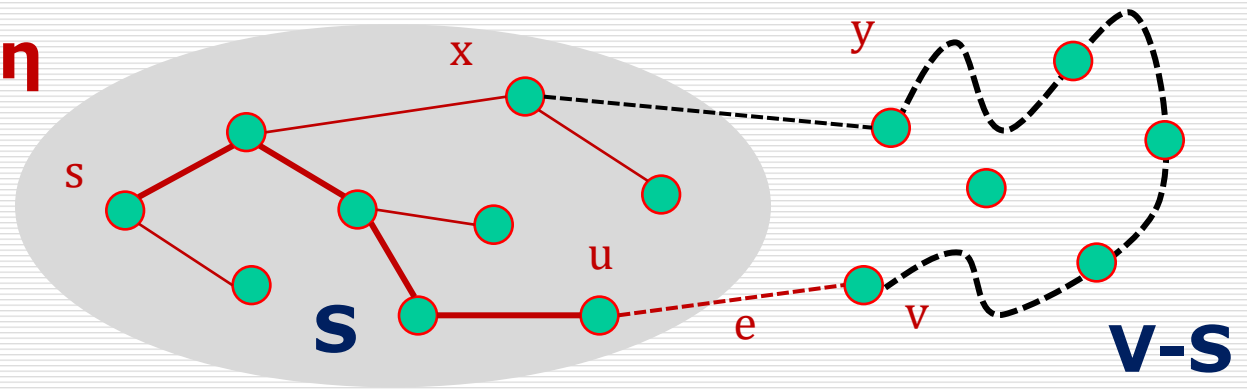
Θα δείξουμε ότι  $c(P) \leq c(Q)$

---

# Ορθότητα αλγορίθμου Dijkstra

---

## Απόδειξη



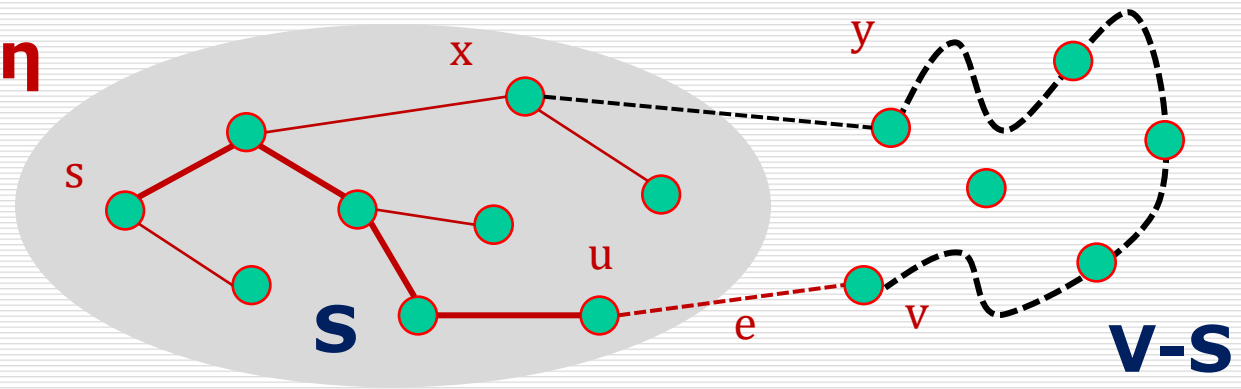
Από (1) και από επιλογή της ακμής  $e = (u, v)$ , έχουμε:

$$c(\mathbf{P}) = D(s, u) + c(u, v) \leq D(s, x) + c(x, y) \leq c(\mathbf{Q})$$

# Ορθότητα αλγορίθμου Dijkstra

---

## Απόδειξη



Από (1) και από επιλογή της ακμής  $e = (u, v)$ , έχουμε:

$$c(\mathbf{P}) = D(s, u) + c(u, v) \leq D(s, x) + c(x, y) \leq c(\mathbf{Q})$$

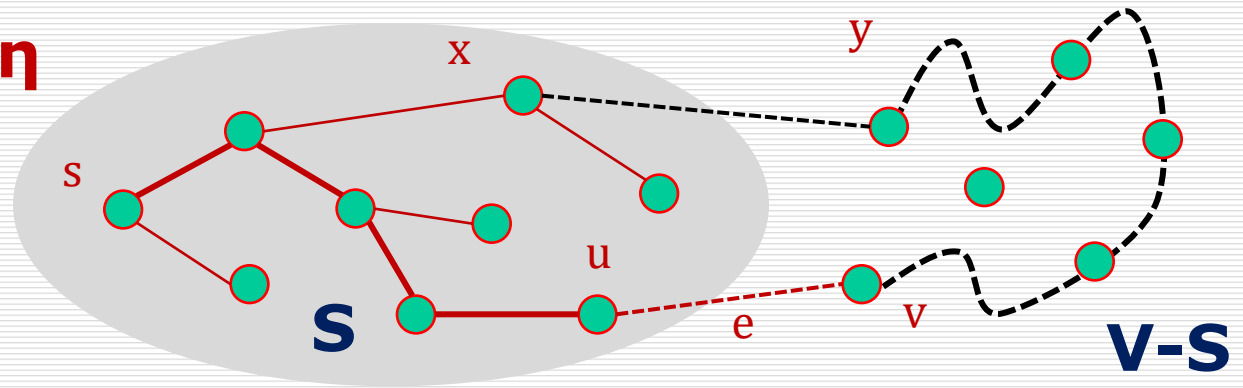
Άσκηση: συμπληρώστε την απόδειξη

---

# Ορθότητα αλγορίθμου Dijkstra

---

## Απόδειξη



Από (1) και από επιλογή της ακμής  $e = (u, v)$ , έχουμε:

$$c(\mathbf{P}) = D(s, u) + c(u, v) \leq D(s, x) + c(x, y) \leq c(\mathbf{Q})$$

Άσκηση: συμπληρώστε την απόδειξη

Ερώτηση: ισχύει το παραπάνω για αρνητικά βάρη;

---

# Ορθότητα αλγορίθμου Dijkstra

---

- Η ορθότητα ισχύει **μόνο** σε γράφους **χωρίς αρνητικά βάρη**
- *Άσκηση:* βρείτε αντιπαράδειγμα.

# Αλγόριθμος Bellman-Ford

---

$\text{dist}(s) := 0$  ;  $p(s) := \text{NIL}$

**for each**  $v \neq s$  **do**  $\text{dist}(v) := \infty$ ;  $p(v) := \text{NIL}$

**repeat**  $n-1$  **times**

**for each** edge  $e = (u,v)$  **do**

**if**  $\text{dist}(u) + \text{cost}(u,v) < \text{dist}(v)$  **then**

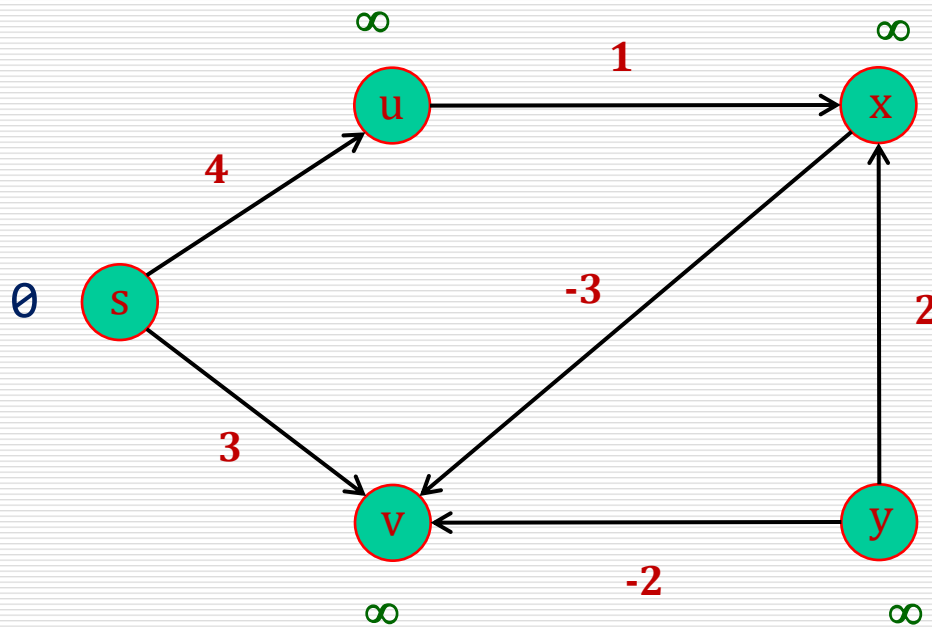
$\text{dist}(v) := \text{dist}(u) + \text{cost}(u,v)$

$p(v) := u$



# Αλγόριθμος Bellman-Ford

## Παραδείγματα



$$n = 5$$

$$m = 6$$

Update στις

6 ακμές

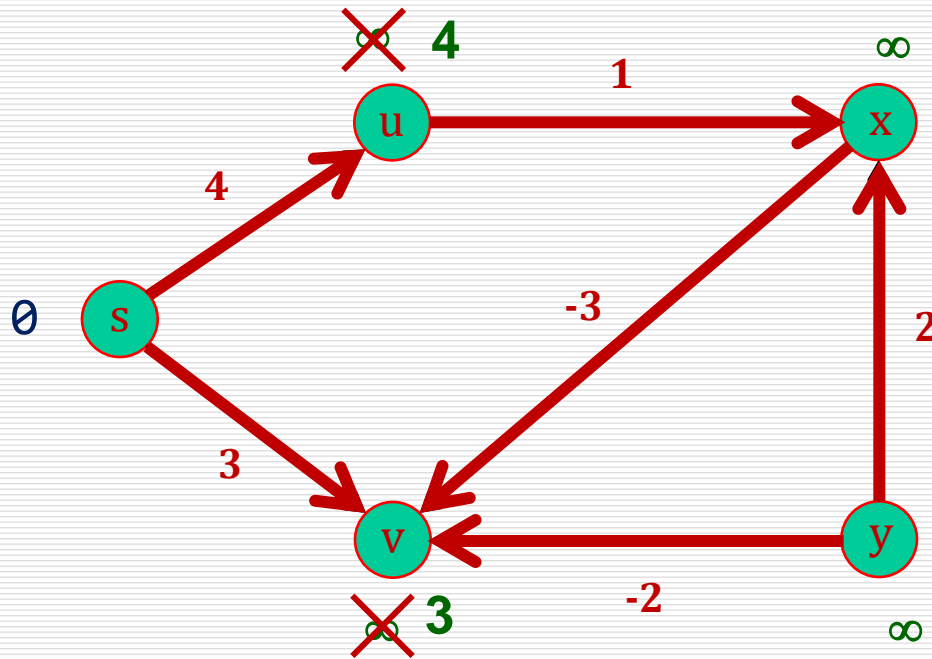
4 φορές

$$V = \{s, u, v, x, y\}$$

$$E = \{(y, x), (u, x), (y, v), (s, u), (x, v), (s, v)\}$$

# Αλγόριθμος Bellman-Ford

## Παράδειγμα 1



$n = 5$

$m = 6$

Update στις

6 ακμές

4 φορές

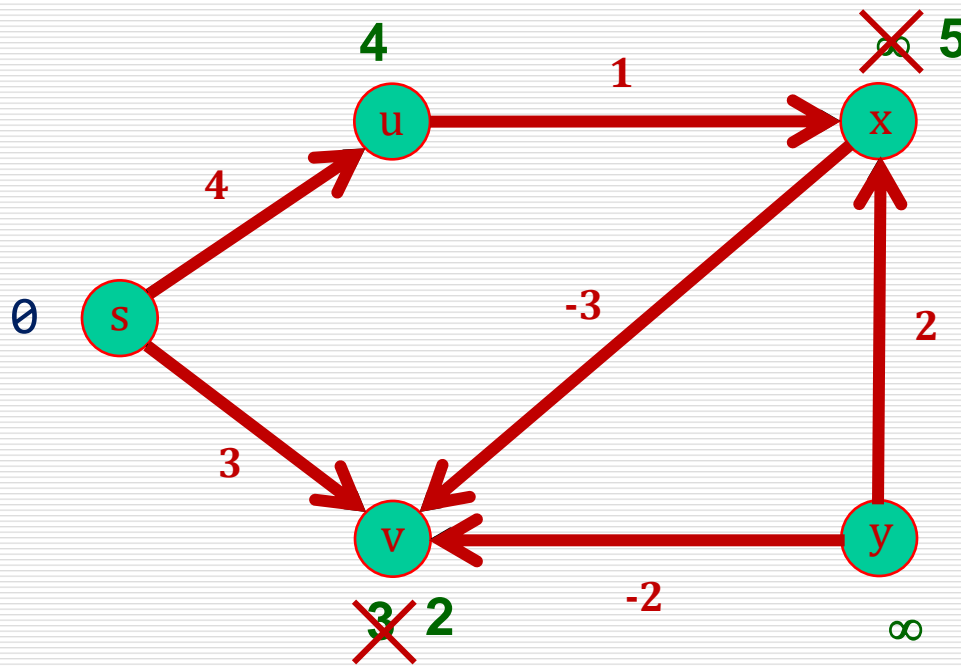
**1<sup>η</sup>** Επανάληψη

$S1: (y,x), (u,x), (y,v), (s,u), (x,v), (s,v)$



# Αλγόριθμος Bellman-Ford

## Παράδειγμα 1



$n = 5$

$m = 6$

Update στις

6 ακμές

4 φορές

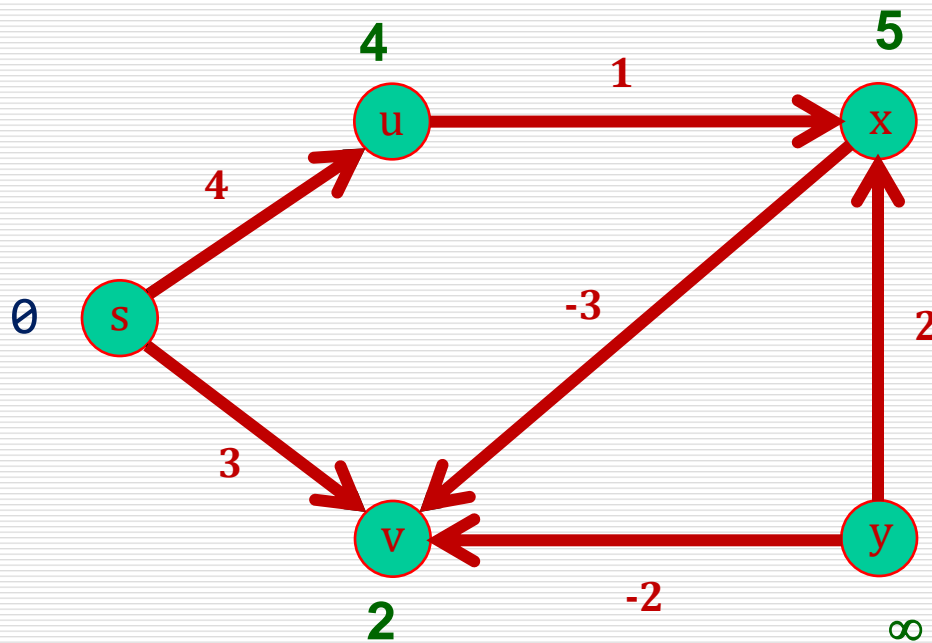
2<sup>η</sup> Επανάληψη

S1: (y,x), (u,x), (y,v), (s,u), (x,v), (s,v)



# Αλγόριθμος Bellman-Ford

## Παράδειγμα 1



$n = 5$

$m = 6$

Update στις  
6 ακμές  
4 φορές

3<sup>η</sup> Επανάληψη

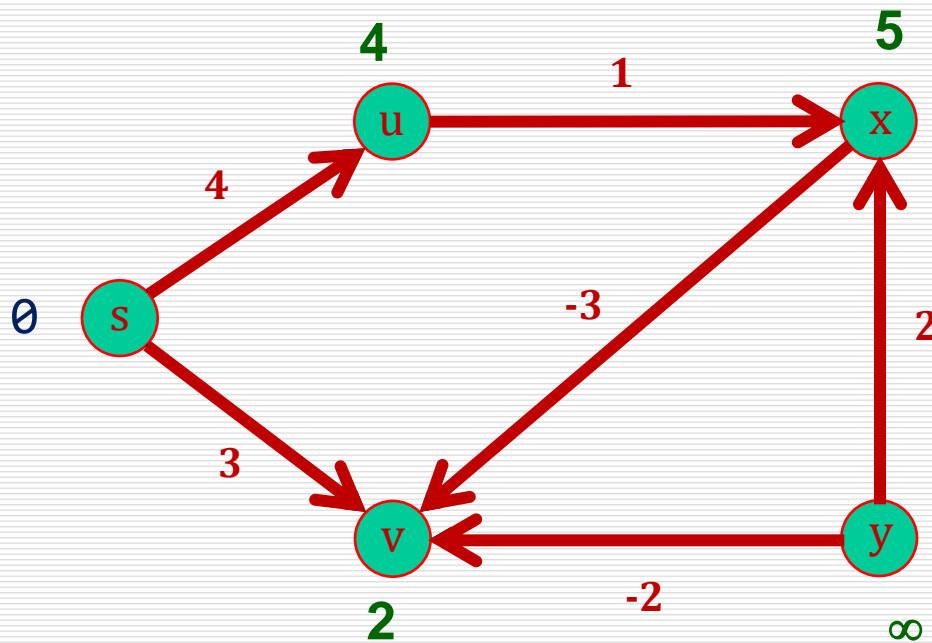
Καμία Αλλαγή  
Γιατί?

S1: (y,x), (u,x), (y,v), (s,u), (x,v), (s,v)



# Αλγόριθμος Bellman-Ford

## Παράδειγμα 1



$n = 5$

$m = 6$

Update στις  
6 ακμές  
4 φορές

4<sup>η</sup> Επανάληψη

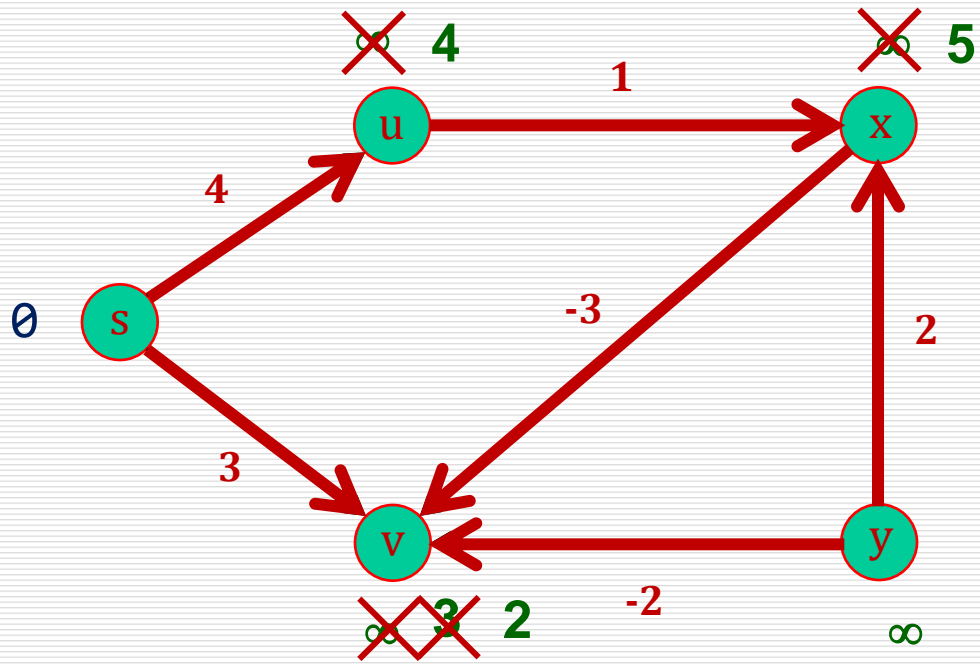
Καμία Αλλαγή

S1: (y,x), (u,x), (y,v), (s,u), (x,v), (s,v)



# Αλγόριθμος Bellman-Ford

Παράδειγμα 2 (διαφορετική σειρά ακμών!)



$n = 5$   
 $m = 6$

Update στις  
6 ακμές  
4 φορές

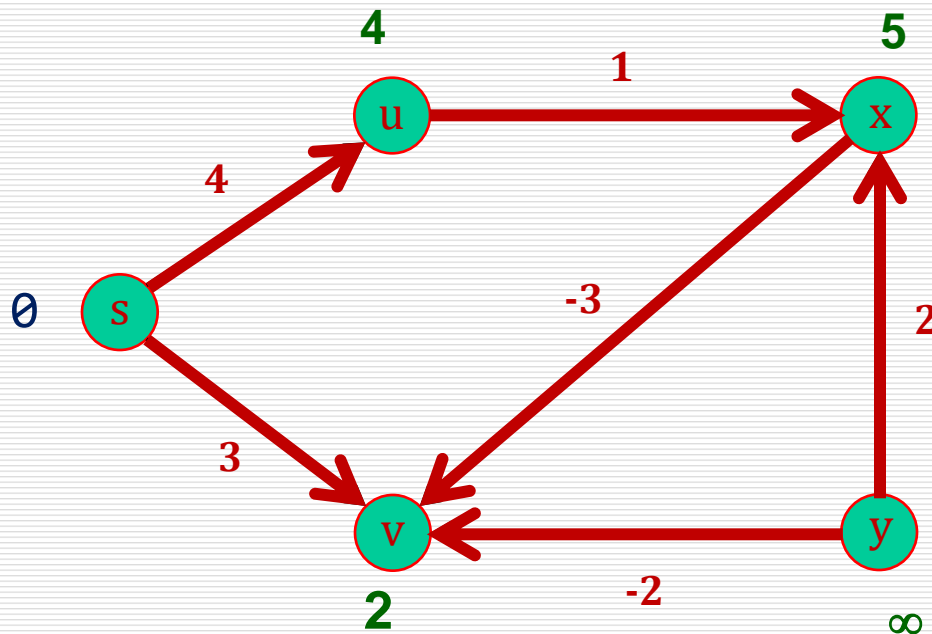
1<sup>η</sup> Επανάληψη

S2:  $(s,u), (u,x), (y,x), (s,v), (x,v), (y,v)$



# Αλγόριθμος Bellman-Ford

Παράδειγμα 2 (διαφορετική σειρά ακμών!)



$n = 5$

$m = 6$

Update στις  
6 ακμές  
4 φορές

2<sup>η</sup> Επανάληψη

Καμία Αλλαγή  
Γιατί?

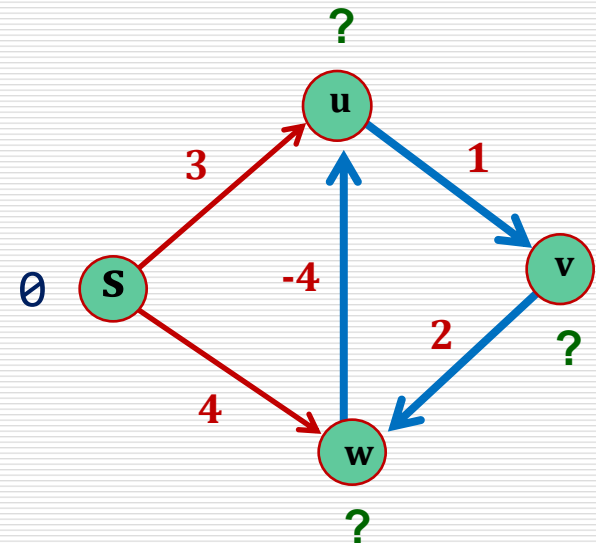
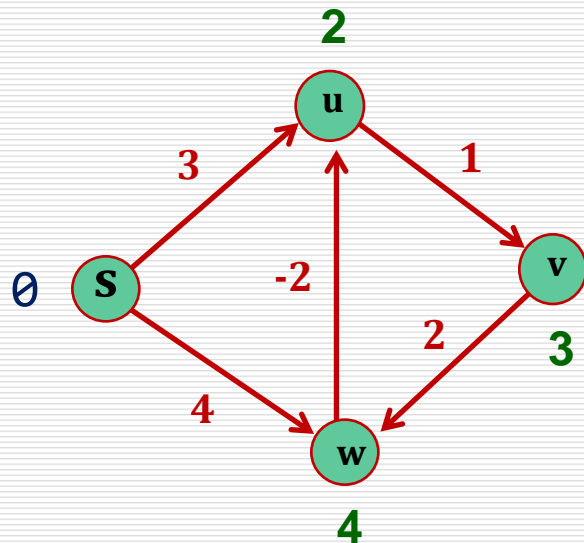
S2: (s,u), (u,x), (y,x), (s,v), (x,v), (y,v)



# Αλγόριθμος Bellman-Ford

---

## ● Αρνητικοί Κύκλοι



Εάν υπάρχει αρνητικός κύκλος δεν έχει νόημα να αναζητούμε ελάχιστες διαδρομές !!!

---



# Αλγόριθμος Bellman-Ford

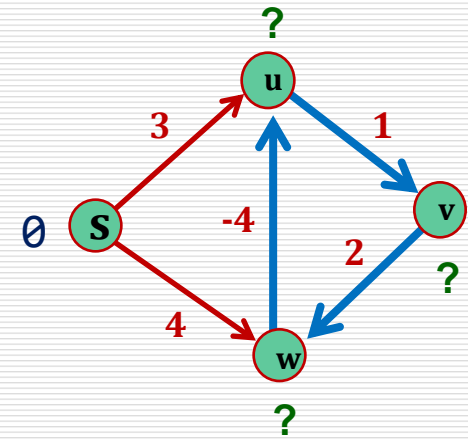
## Εντοπισμός αρνητικών κύκλων

Bellman-Ford-detection( $G, w, s$ )

1. initialize( $G, s$ )
2. επανάλαβε  $n-1$  φορές:  
για κάθε ακμή  $(u, v) \in E$ :  
Update( $u, v, c$ )

3. για κάθε ακμή  $(u, v) \in E$ :  
if  $d(v) > d(u) + c(u, v)$  then  
return FALSE

4. return  $d(\cdot)$



# Αλγόριθμος Bellman-Ford

---

- **Ορθότητα:** στο τέλος της  $k$ -οστής επανάληψης έχουν υπολογιστεί σωστά οι συντομότερες διαδρομές που αποτελούνται από το πολύ  $k$  ακμές (*άσκηση: αποδείξτε το*).
- **Πολυπλοκότητα:**  $O(|V||E|)$

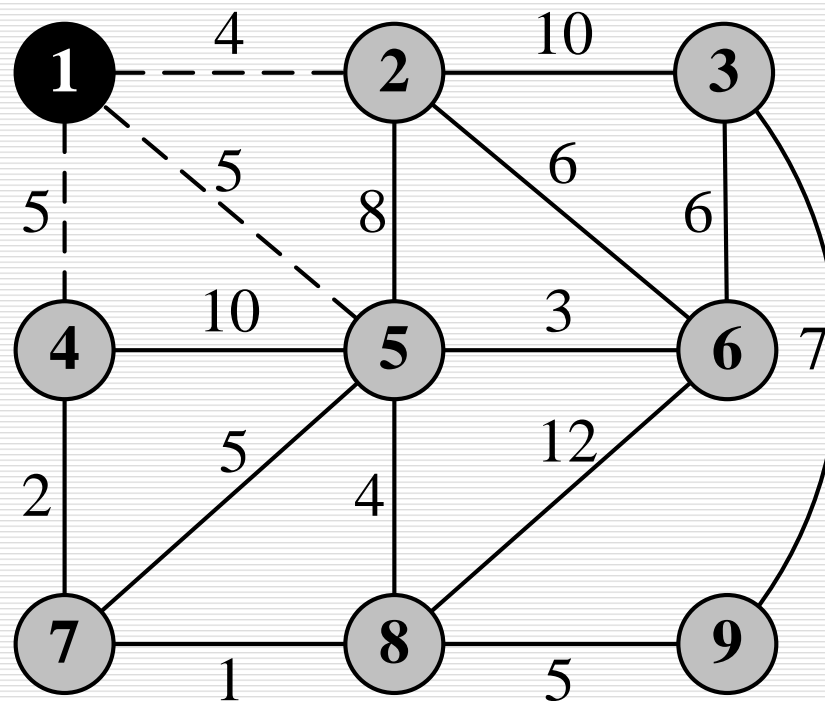
# Ελάχιστο Συνδετικό Δένδρο (MST)

---

- **Κριτήριο Prim:** Διαλέγουμε κάθε φορά την ακμή ελαχίστου κόστους έτσι ώστε ο νέος υπογράφος να παραμένει δένδρο (έναρξη από οποιονδήποτε κόμβο)
- **Κριτήριο Kruskal:** Διαλέγουμε κάθε φορά την ακμή ελαχίστου κόστους έτσι ώστε ο νέος υπογράφος να μην έχει κύκλους

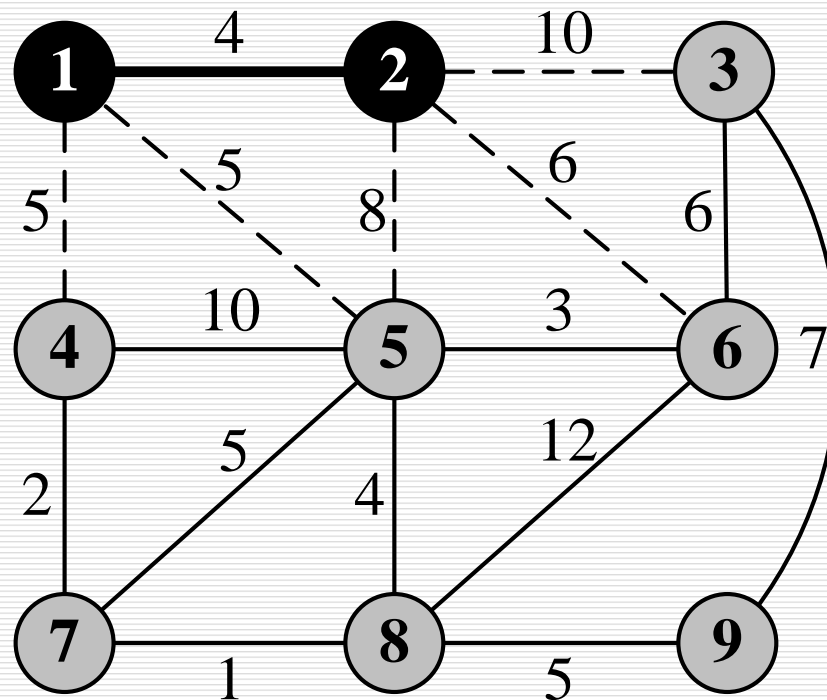
# Αλγόριθμος Prim: παράδειγμα

---



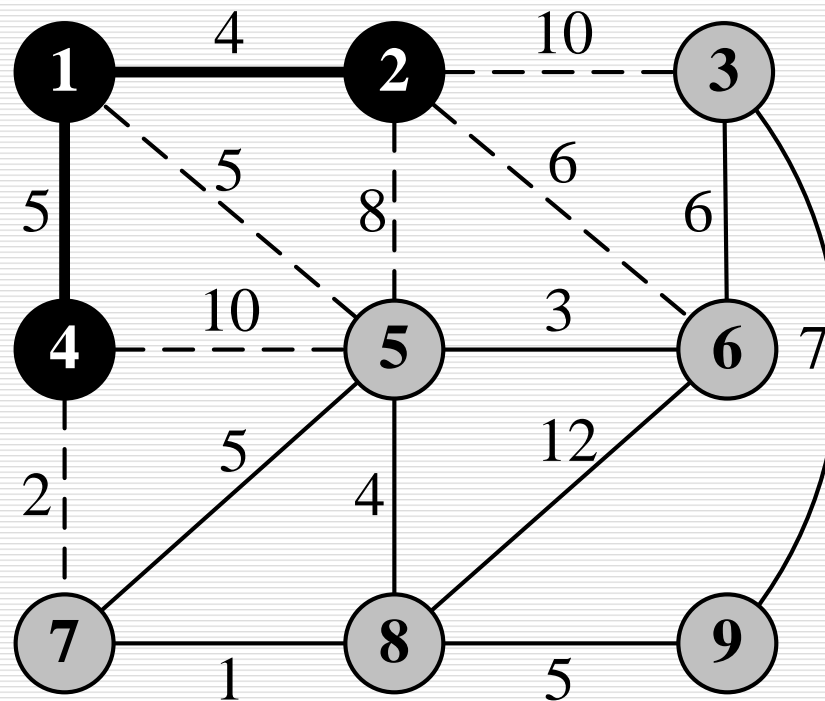
# Αλγόριθμος Prim: παράδειγμα

---



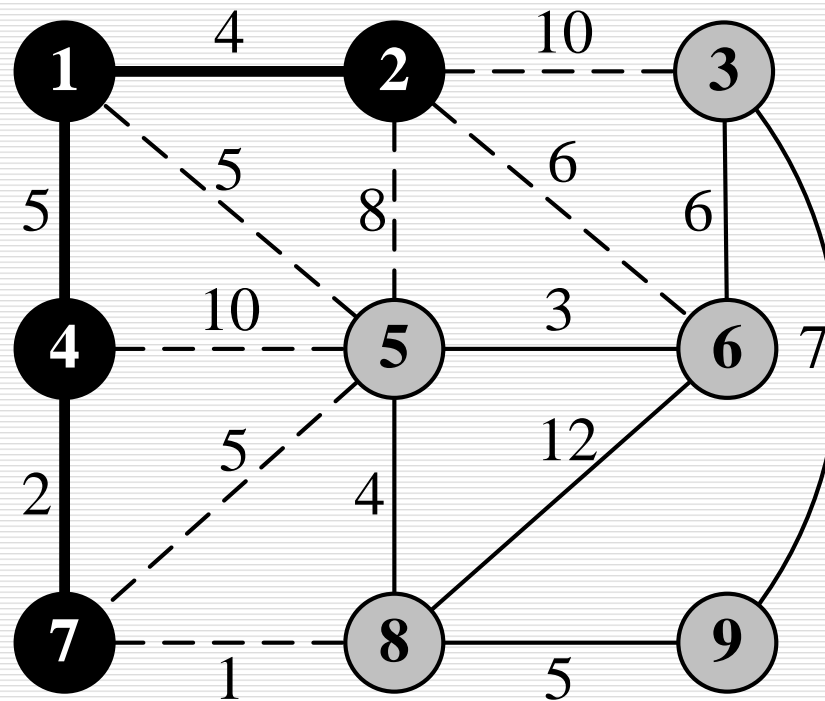
# Αλγόριθμος Prim: παράδειγμα

---



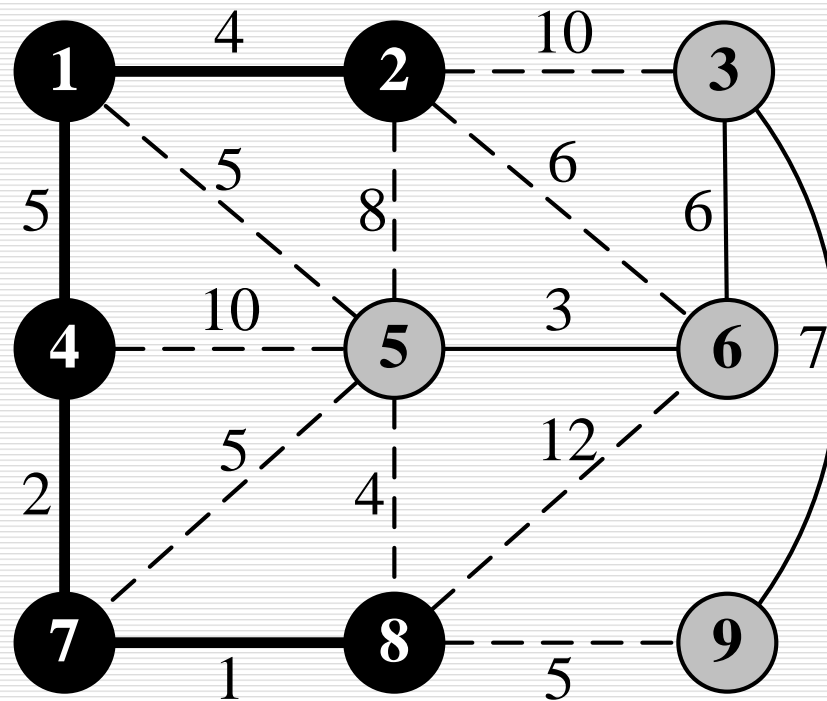
# Αλγόριθμος Prim: παράδειγμα

---



# Αλγόριθμος Prim: παράδειγμα

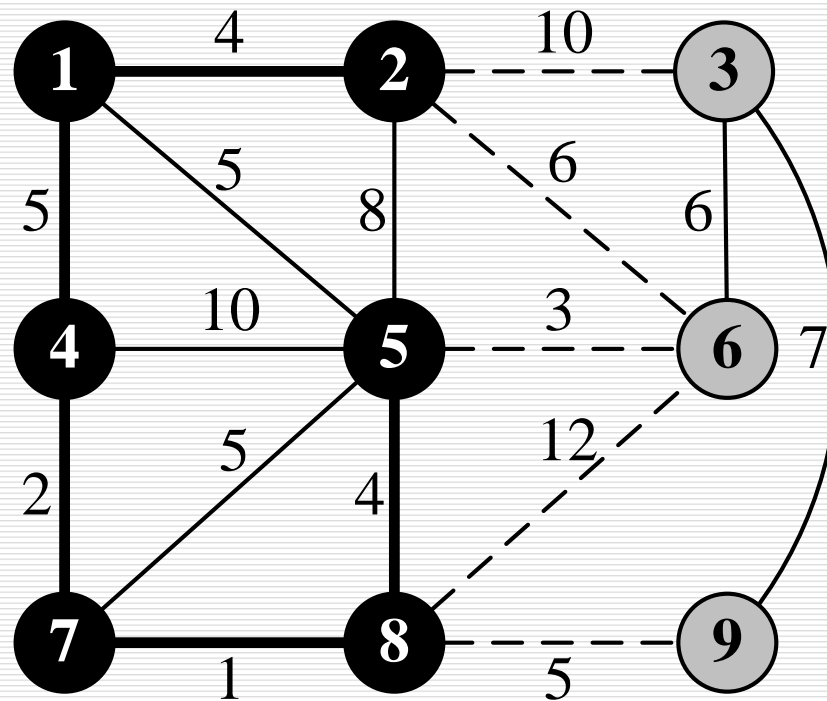
---





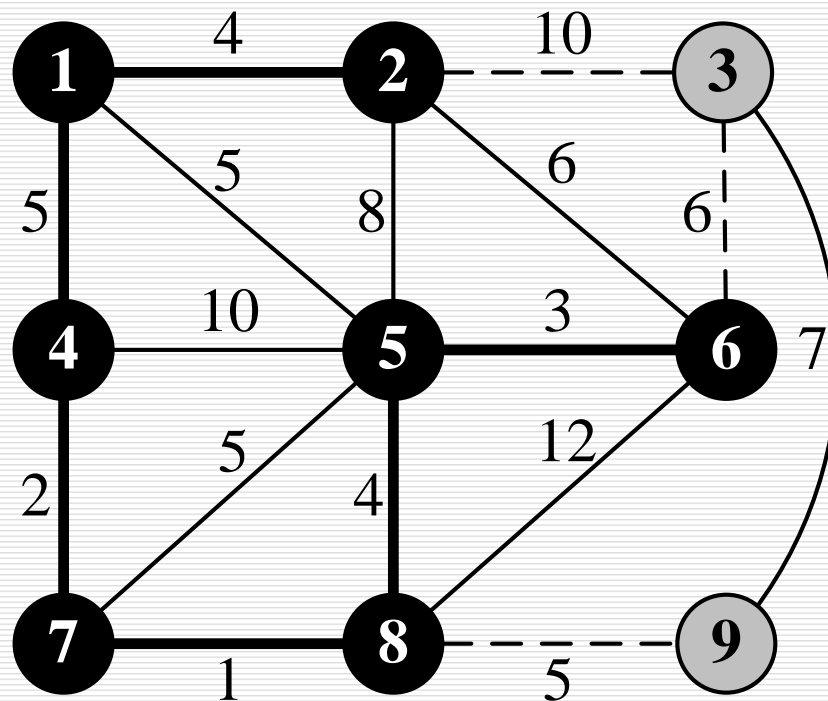
# Αλγόριθμος Prim: παράδειγμα

---



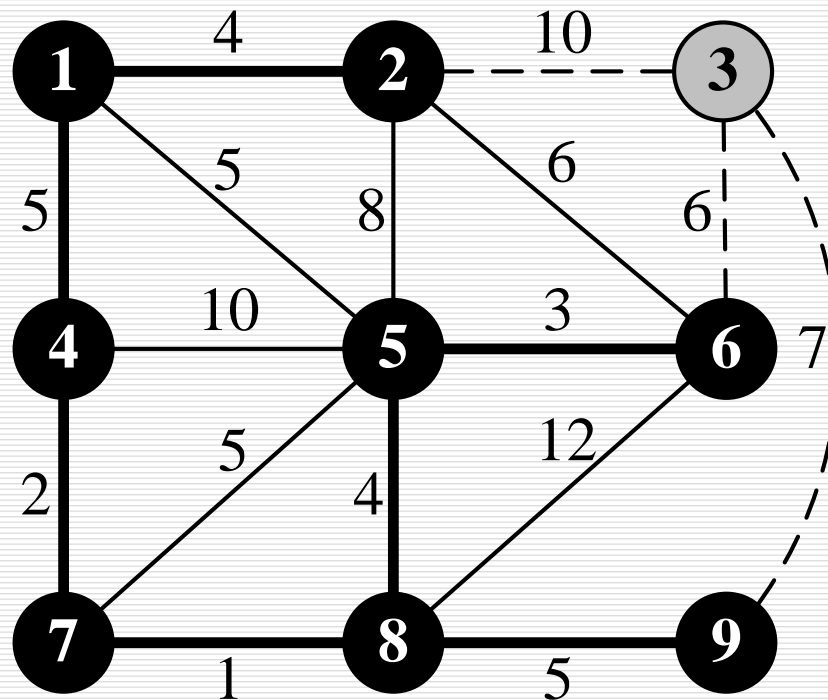
# Αλγόριθμος Prim: παράδειγμα

---



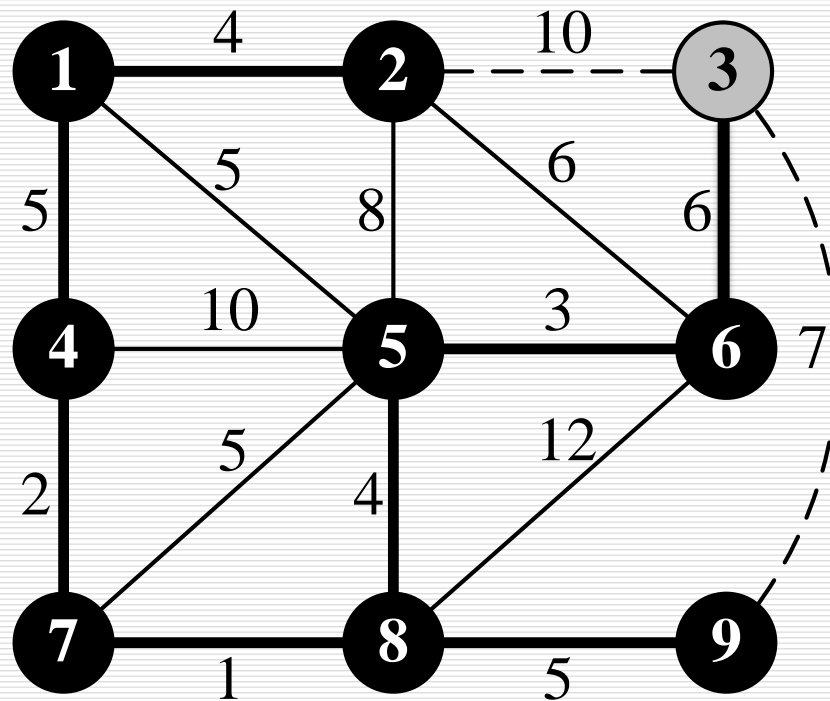
# Αλγόριθμος Prim: παράδειγμα

---



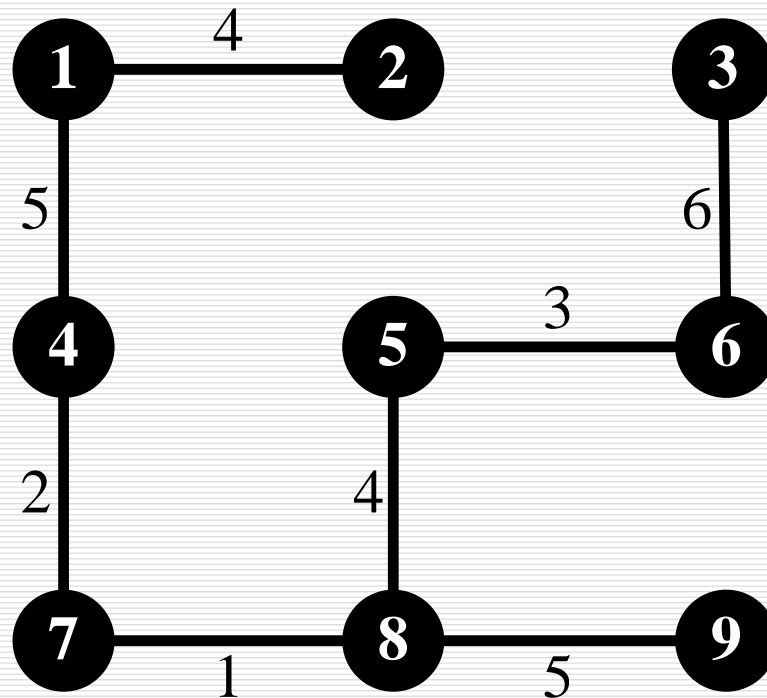
# Αλγόριθμος Prim: παράδειγμα

---



# Αλγόριθμος Prim: παράδειγμα

---



# Αλγόριθμος Prim

---

- Επιλέγεται αρχικός κόμβος, έστω  $s$ . Αρχικοποίηση:

$\text{dist}(s) := 0$ ; for each  $v \neq s$  do  $\text{dist}(v) := \infty$

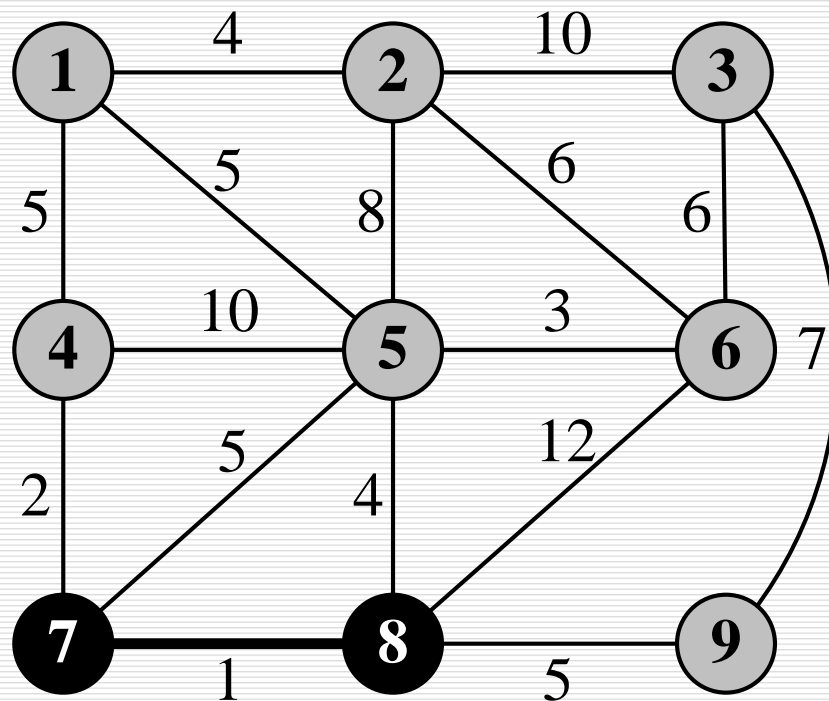
- Επαναληπτικά επιλέγεται ο κόμβος, έστω  $w$ , με την **ελάχιστη απόσταση από το μέχρι στιγμής κατασκευασμένο δένδρο**, και προστίθεται στο δένδρο. Ενημερώνονται οι αποστάσεις των γειτόνων του  $w$  από το δένδρο με βάση το κόστος των ακμών  $(w, u_i)$ :

**if**  $\text{cost}(w, u_i) < d(u_i)$  **then**  
     $d(u_i) := \text{cost}(w, u_i)$

- Μεγάλη ομοιότητα με Dijkstra (πού διαφέρουν;)
- Πολυπλοκότητα:  $O(|V|^2)$ ,  $O(|E| \log |V|)$ ,  $O(|E| + |V| \log |V|)$

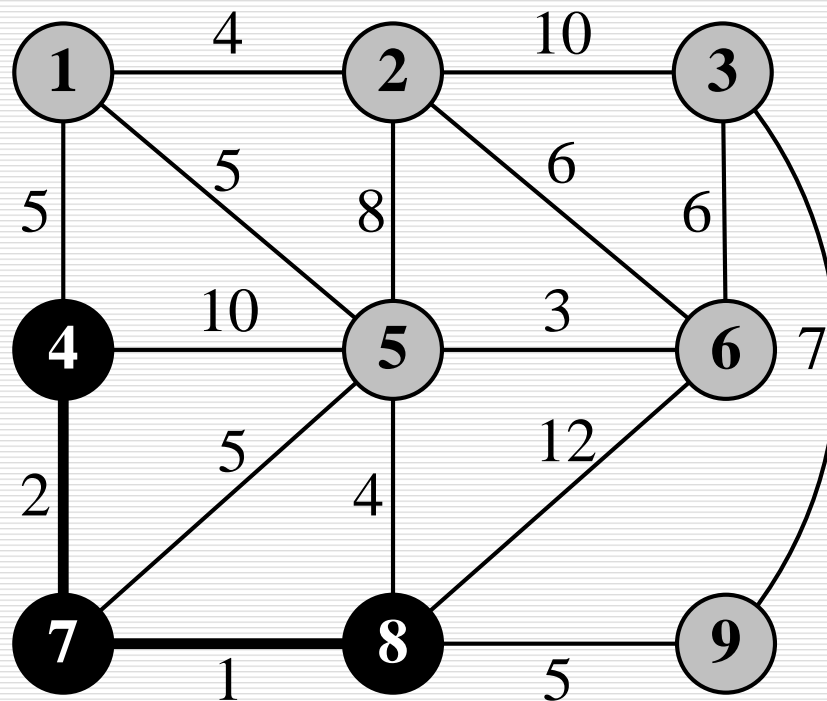
# Αλγόριθμος Kruskal: παράδειγμα

---



# Αλγόριθμος Kruskal: παράδειγμα

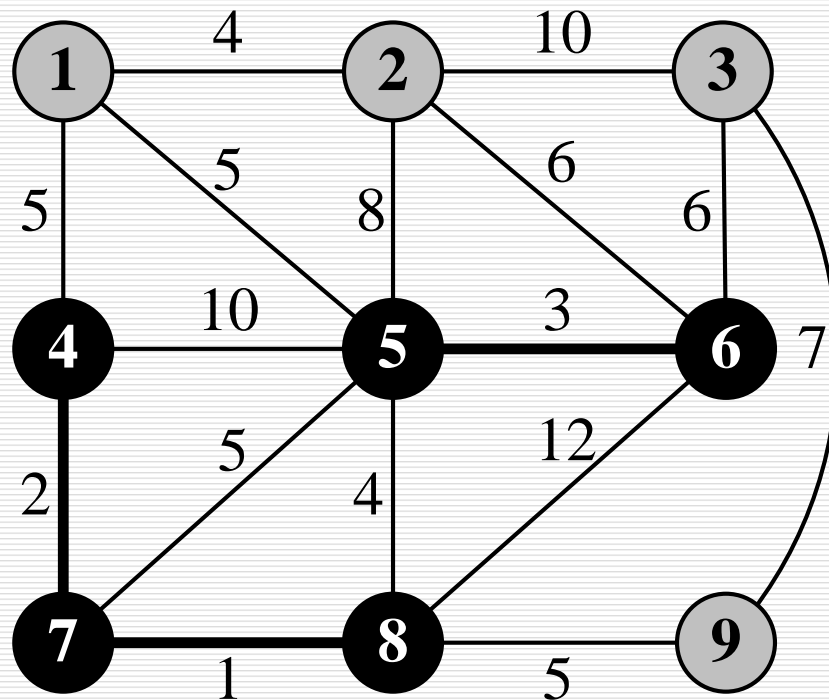
---





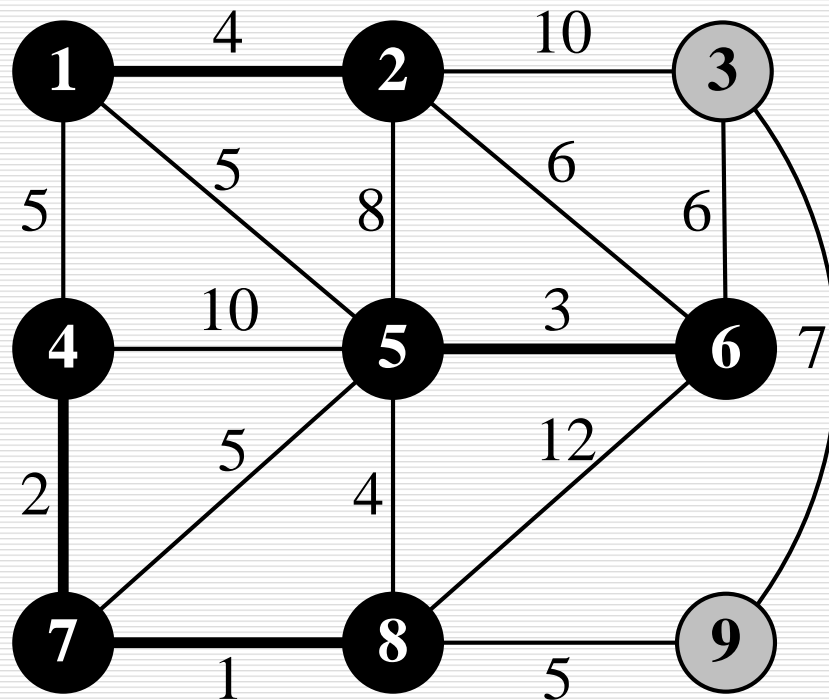
# Αλγόριθμος Kruskal: παράδειγμα

---



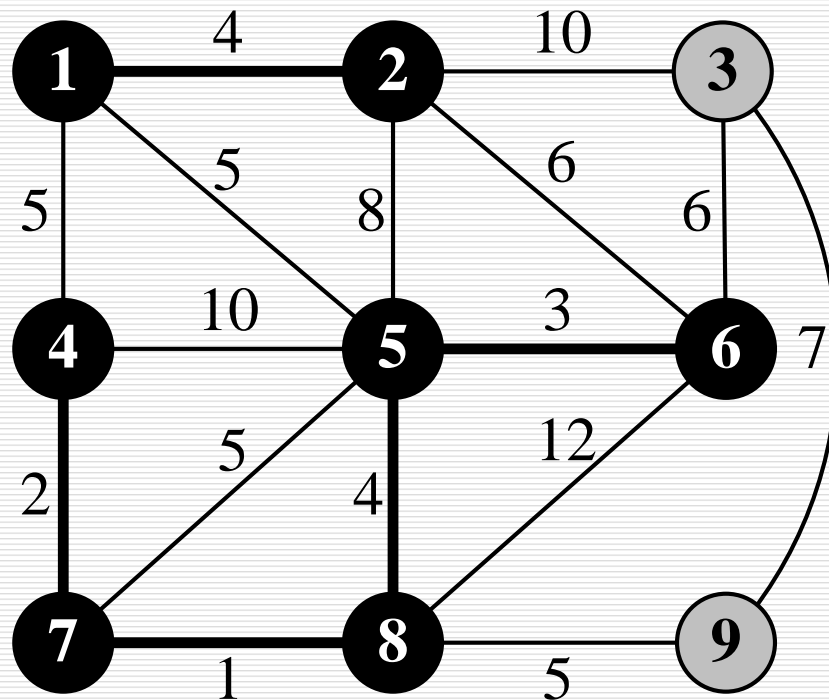
# Αλγόριθμος Kruskal: παράδειγμα

---



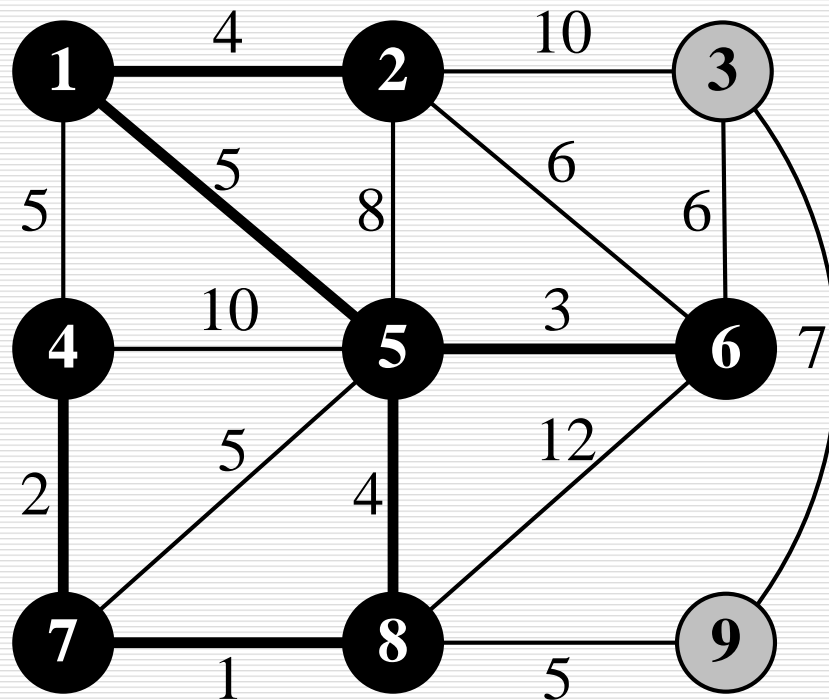
# Αλγόριθμος Kruskal: παράδειγμα

---



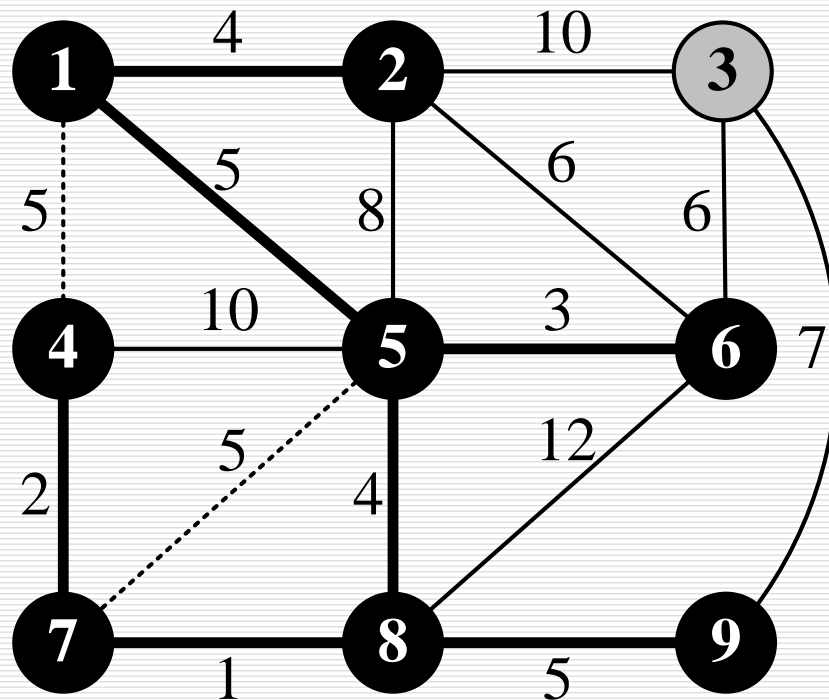
# Αλγόριθμος Kruskal: παράδειγμα

---



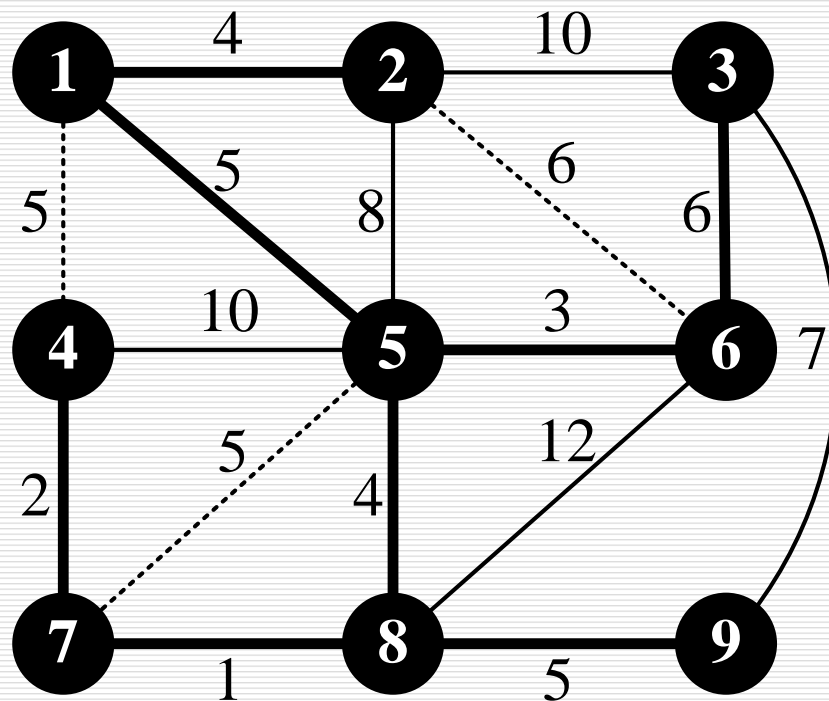
# Αλγόριθμος Kruskal: παράδειγμα

---



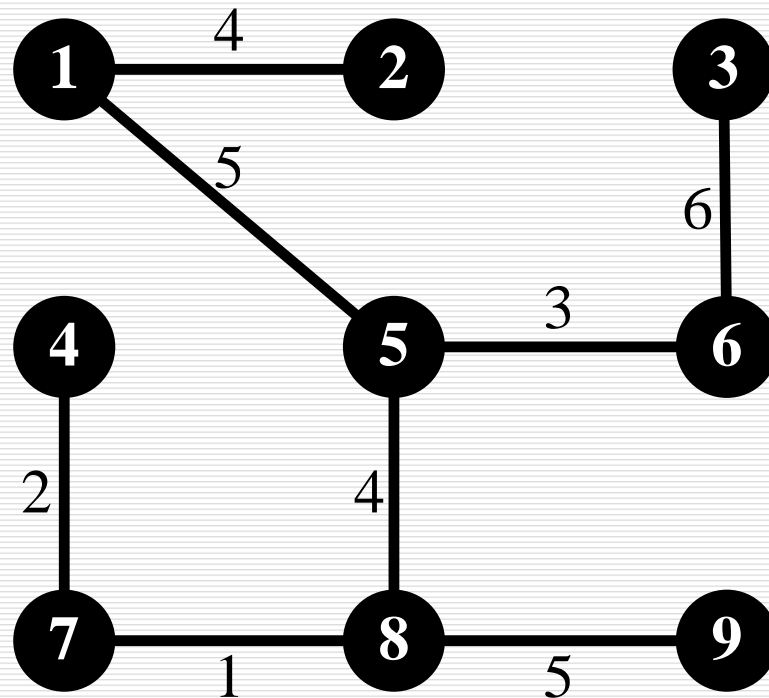
# Αλγόριθμος Kruskal: παράδειγμα

---



# Αλγόριθμος Kruskal: παράδειγμα

---



# Αλγόριθμος Kruskal

---

- Οι ακμές ταξινομούνται σε αύξουσα σειρά κόστους. Κάθε φορά επιλέγεται η ακμή ελαχίστου κόστους και αν δε δημιουργεί κύκλο στο μέχρι στιγμής δάσος προστίθεται σε αυτό, αλλιώς απορρίπτεται.
- Για αποδοτική υλοποίηση, η ύπαρξη κύκλου ελέγχεται με χρήση πράξεων συνόλων (UNION-FIND: αρκεί χρήση Union by Size/Rank).
- Πολυπλοκότητα:  $O(|E| \log |V|)$  (γιατί;)



# Κοινή ιδέα Prim-Kruskal

---

- έστω ο αρχικός γράφος  $G=(V, E)$
- ξεκινώντας από τον γράφο  $G'=(V, \emptyset)$  που περιέχει όλους τους κόμβους του  $G$  αλλά καθόλου ακμές και
- ενώνοντας επαναληπτικά δύο οποιαδήποτε συμπληρωματικά υποσύνολα κόμβων  $S$  και  $V \setminus S$  που ακόμη δεν έχουν ακμή μεταξύ τους με την ελαφρύτερη δυνατή ακμή από το  $E$
- καταλήγουμε σε ελάχιστο συνδετικό δένδρο

# Γιατί δουλεύει η ιδέα;

---

**Θεώρημα.** Ένα σύνολο ακμών  $A$  που είναι **υποσχόμενο** (δηλαδή υποσύνολο ενός MST) παραμένει υποσχόμενο αν του προσθέσουμε την ελαφρύτερη ακμή  $e=(u,v)$  που συνδέει μια συνεκτική συνιστώσα (connected component)  $V_i$  του τρέχοντος υπογράφου (που ορίζεται από τους κόμβους του  $V$  και τις ακμές του  $A$ ) με τον υπόλοιπο υπογράφο  $V \setminus V_i$ .

**Απόδειξη.** Θεωρούμε ένα MST  $T$  που είναι υπερσύνολο του  $A$  (υπάρχει πάντα;). Έστω ότι η  $e$  δεν ανήκει στο  $T$ . Τότε το μονοπάτι  $p$  που συνδέει  $u,v$  στο  $T$  περιέχει ακμή  $e'$  που διασχίζει τομή  $(V_i, V \setminus V_i)$ . Ισχύει  $\text{cost}(e) \leq \text{cost}(e')$ , επομένως:

ανταλλαγή( $e, e'$ )  $\Rightarrow \exists$  MST  $T'$  που περιέχει την  $e$

# Bonus: αλγόριθμος Boruvka

---

- Λειτουργεί σε γύρους. Αρχικά κάθε κόμβος είναι συνιστώσα μόνος του.
- Σε κάθε γύρο, **κάθε** συνεκτική συνιστώσα συνδέεται με την **ελαφρύτερη δυνατή ακμή** με κάποια από τις υπόλοιπες συνιστώσες. Χρειάζεται τρόπος επίλυσης 'ισοπαλιών'.

**Πολυπλοκότητα:**  $O(|E| \log |V|)$  (σε κάθε γύρο το πλήθος συνιστωσών μειώνεται στο μισό).

Προσφέρεται για **παράλληλη / κατανεμημένη** υλοποίηση.

# Σημαντικές τεχνικές

---

- **Άπληστοι (greedy) αλγόριθμοι**: «χτίσιμο» λύσης σταδιακά, από μικρότερα προς μεγαλύτερα υποπροβλήματα. Σε κάθε στάδιο **αμετάκλητη** επιλογή, δίνει βέλτιστη λύση για αντίστοιχο υποπρόβλημα.
  - **Dijkstra, Prim, Kruskal, Boruvka**
- **Δυναμικός προγραμματισμός**: «χτίσιμο» λύσης σταδιακά, συνδυάζοντας βέλτιστες λύσεις μικρότερων υποπροβλημάτων ώστε να προκύψει βέλτιστη λύση μεγαλύτερων (**αρχή βελτιστότητας υπο-λύσεων**).
  - **Bellman-Ford**
- Σύγκριση με «**διαίρει και κυρίευε**»: στη ΔΚΚ τα υποπροβλήματα είναι ανεξάρτητα, στον ΔΠ και στους άπληστους τα υποπροβλήματα έχουν επικάλυψη.

# Προβλήματα Γράφων στην Κλάση **P**

---

- Κύκλος Euler
- Προσβασιμότητα (reachability) + Διάσχιση (traversal): DFS, BFS, ...
- Συνεκτικές συνιστώσες (connected components)
- Συντομότερα μονοπάτια (shortest paths)
- Ελάχιστο συνδετικό δένδρο (minimum spanning tree)
- Μέγιστη ροή (maximum flow) [7<sup>ο</sup> εξ.]
- Τέλειο ταίριασμα (perfect matching) [7<sup>ο</sup> εξ.]

# NP-πλήρη Προβλήματα Γράφων

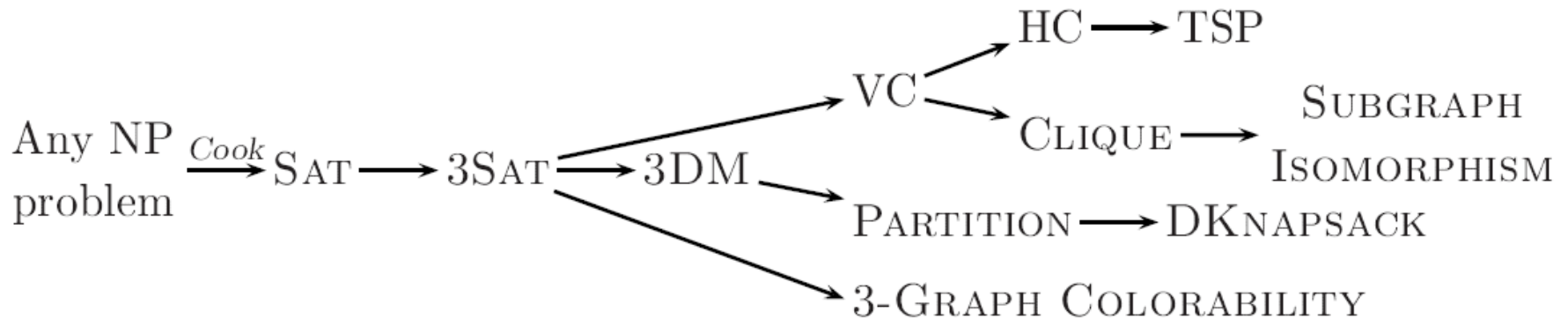
---

- VERTEX COVER (VC)
- CLIQUE
- HAMILTON CIRCUIT (HC)
- TRAVELING SALESMAN (TSP)
- 3-COLORABILITY
- SUBGRAPH ISOMORPHISM
- 3-DIMENSIONAL MATCHING (3DM)

# NP-πλήρη Προβλήματα Γράφων

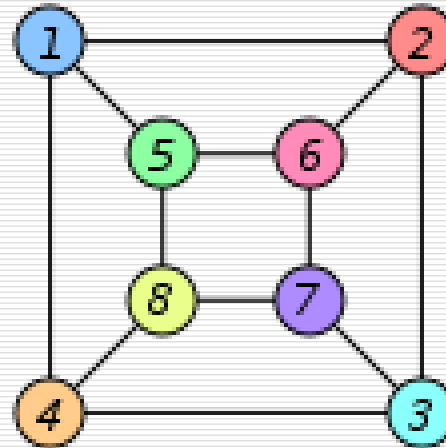
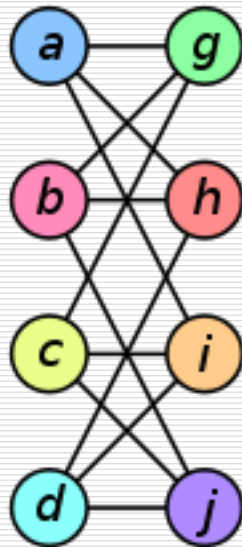
---

Απόδειξη NP-πληρότητας: *αναγωγές*



# «Ενδιάμεση» Πολυπλοκότητα;

---



Ισομορφισμός γράφων: δεν είναι NP-πλήρες πρόβλημα (κάτω από γενικά παραδεκτές υποθέσεις)



# Ανακεφαλαίωση

---

- Αρκετά προβλήματα γράφων λύνονται γρήγορα: διάσχιση (προσβασιμότητα), συνεκτικές συνιστώσες, ελάχιστες διαδρομές, ελάχιστο συνδετικό δένδρο, κύκλος Euler, τέλειο ταίριασμα, μέγιστη ροή, ...
- Πολλά προβλήματα φαίνεται να μην λύνονται γρήγορα: VERTEX COVER, CLIQUE, HAMILTON CIRCUIT, TRAVELING SALESMAN, 3-COLORABILITY, SUBGRAPH ISOMORPHISM, 3-DIMENSIONAL MATCHING, ...
- Κάποια από αυτά λύνονται γρήγορα σε ειδικές περιπτώσεις, ή προσεγγιστικά. Εντατική έρευνα, πολλά ανοιχτά ερωτήματα.