Άσκηση 5

Μέτρηση του συντελεστή εσωτερικής τριβής (ιξώδους) υγρού με τη μέθοδο της πτώσης μικρών σφαιρών

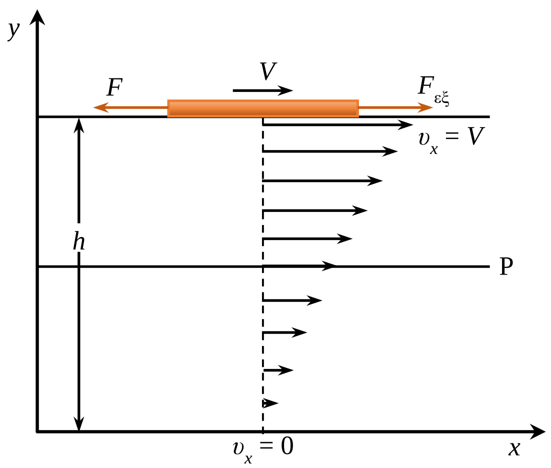
5.1. Σκοπός

Σκοπός της άσκησης είναι η μέτρηση του ιξώδους (συντελεστή εσωτερικής τριβής) ενός υγρού, με τη μέτρηση της ορικής ταχύτητας που αποκτούν μικρές σφαίρες καθώς πέφτουν μέσα σε ένα υγρό που ηρεμεί.

5.2. Γενικά

Κατά τη μελέτη μακροσκοπικών συστημάτων που δεν βρίσκονται σε κατάσταση ισορροπίας, μεγάλο φυσικό ενδιαφέρον παρουσιάζουν τα **φαινόμενα μεταφοράς**. Αυτός ο γενικός όρος αναφέρεται σε ένα πλήθος φαινομένων, τα οποία χαρακτηρίζονται από αμιγή μεταφορά, είτε ύλης, είτε ενέργειας, είτε ορμής σε μακροσκοπικές ποσότητες. Σε αυτά περιλαμβάνονται η μοριακή διάχυση, η θερμική αγωγιμότητα και η εσωτερική τριβή ή ιξώδες.

Παρακάτω θα εξεταστεί το φαινόμενο της **εσωτερικής τριβής** που παρατηρείται στα ρευστά (υγρά ή αέρια), όταν μια επίπεδη πλάκα κινείται πάνω στην επιφάνεια του υγρού με σταθερή ταχύτητα υ, σε ύψος h από τον πυθμένα, καθώς στην πλάκα ασκείται σταθερή εξωτερική δύναμη $F_{\varepsilon\xi}$ (Σχ. 5.1).



Σχήμα 5.1. Κίνηση επίπεδης πλάκας στην επιφάνεια υγρού και δημιουργία βαθμίδας ταχύτητας στο υγρό.

Κάποια στιγμή η ταχύτητα της πλάκας θα σταθεροποιηθεί και, στον βαθμό που η ταχύτητά της παραμένει σταθερή στον χρόνο, θα πρέπει να ασκείται σε αυτήν από το υγρό μια δύναμη F ίση και αντίθετη με την $F_{\varepsilon\xi}$. Αυτή είναι η **δύναμη εσωτερικής τριβής**, η προέλευση της οποίας εξηγείται αμέσως πιο κάτω.

Τα στρώματα του υγρού που γειτονεύουν άμεσα με την πλάκα και τον πυθμένα του δοχείου αποκτούν, με καλή προσέγγιση, τις αντίστοιχες ταχύτητες ροής $\upsilon_x = V$ και $\upsilon_x = 0$, ενώ τα ενδιάμεσα στρώματα του υγρού έχουν ενδιάμεσες ταχύτητες ροής μεταξύ V και 0. Εκτός όμως από τη μεταφορική κίνηση κατά την κατεύθυνση x, υπάρχει και η θερμική κίνηση των μορίων του υγρού που δεν κινούνται αποκλειστικά παράλληλα προς τον πυθμένα. Θεωρούμε ένα επίπεδο P κάθετο στον άξονα y. Λόγω της θερμικής κίνησης, τα μόρια θα διασχίζουν συνεχώς το επίπεδο αυτό, άλλα από πάνω προς τα κάτω και άλλα αντιστρόφως. Επίσης, κάθε μόριο έχει επιπλέον και την παράλληλη προς τον πυθμένα συνιστώσα της ορμής. Είναι φανερό ότι τα μόρια που διασχίζουν το επίπεδο P από πάνω προς τα κάτω μεταφέρουν μεγαλύτερη ορμή από εκείνα που κινούνται αντίθετα. Η ολική μεταφερόμενη ορμή είναι βέβαια παράλληλη προς την ταχύτητα ροής, δηλαδή τον άξονα x, η μεταφορά της όμως γίνεται κάθετα προς αυτήν, δηλαδή παράλληλα στον άξονα y. Ένα μόριο που κινείται προς τα πάνω κερδίζει ορμή, ενώ ένα μόριο που κινείται προς τα κάτω χάνει. Η ανταλλαγή αυτή της ορμής ισοδυναμεί με μια επιβραδυντική δύναμη που ασκούν τα χαμηλά στρώματα στα ανώτερα και με μια επιταχυντική που ασκούν τα ανώτερα στα χαμηλότερα.

Η επιβραδυντική δύναμη που δέχονται τα επιφανειακά μόρια, άρα και η ίδια η πλάκα, είναι η εφαπτομενική δύναμη F που τείνει να αποκαταστήσει την ισορροπία και λέγεται **δύναμη εσωτερικής τριβής** ή **ιξώδους**.

Ορίζεται ως **πυκνότητα ρεύματος ορμής**, J_p, η ποσότητα της ορμής που διασχίζει στη μονάδα του χρόνου τη μονάδα της επιφάνειας που είναι παράλληλη προς την ταχύτητα ροής του υγρού, δηλαδή στην περίπτωσή μας προς τον άξονα x. Πειραματικά αποδεικνύεται ότι, στην περίπτωση που η βαθμίδα της ταχύτητας δεν είναι μεγάλη, ισχύει η σχέση

$$J_p = -\,\eta\,\frac{\mathrm{d}\upsilon_x}{\mathrm{d}y} \tag{5.1}$$

όπου η είναι ο συντελεστής ιξώδους. Το αρνητικό πρόσημο οφείλεται στο ότι η μεταφορά της ορμής γίνεται προς την κατεύθυνση κατά την οποία ελαττώνεται η ταχύτητα του ρευστού.

Η μονάδα μέτρησης του συντελεστή ιξώδους στο SI είναι kg/m·s. Στην πράξη όμως χρησιμοποιείται το 1/10 αυτής της μονάδας, δηλαδή η μονάδα g/cm·s του συστήματος CGS, που ονομάζεται Poise.

Αποδεικνύεται ότι ο συντελεστής η εξαρτάται από τη θερμοκρασία. Στα υγρά ελαττώνεται όσο αυξάνει η θερμοκρασία, ενώ στα αέρια αυξάνεται. Στον Πίνακα Ι δίνεται σε Poise το ιξώδες μερικών ρευστών σε διαφορετικές θερμοκρασίες.

Πίνακας Ι

Συντελεστές ιξώδους σε Poise

θ (°C)	Νερό	Καστορέλαιο	Αέρας
0	$1{,}792 \times 10^{-2}$	53	$1{,}71 \times 10^{-4}$
20	$1{,}005 \times 10^{-2}$	9,86	$1{,}81 \times 10^{-4}$
40	$0{,}656 \times 10^{-2}$	2,31	$1{,}90 \times 10^{-4}$
60	$0{,}469 \times 10^{-2}$	0,80	$2{,}00 \times 10^{-4}$
100	$0{,}284 \times 10^{-2}$	0,17	$2{,}18 \times 10^{-4}$

Σύμφωνα με τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα, ο ρυθμός μεταβολής της ορμής ισούται με τη δύναμη που την προκαλεί και επειδή, εξ ορισμού, το J_p εκφράζει μεταβολή της ορμής ανά μονάδα χρόνου και επιφάνειας, συμπεραίνεται ότι το J_p είναι ίσο με τη δύναμη που προκαλεί τη μεταβολή της ορμής ανά μονάδα επιφάνειας. Συνεπώς, η δύναμη της εσωτερικής τριβής δίνεται από τη σχέση:

$$F = -\eta S \frac{\mathrm{d}\upsilon_x}{\mathrm{d}y} \tag{5.2}$$

όπου S, στην περίπτωσή μας, είναι το εμβαδόν της επιφάνειας επαφής της πλάκας με το υγρό. Τονίζεται ότι η F είναι ανάλογη, όχι προς την υ_x αλλά προς την $\mathrm{d}\upsilon_x/\mathrm{d}y$ που εκφράζει τη μεταβολή της υ_x ανά μονάδα μήκους, κάθετα στην κίνηση.

Στην απλουστευμένη περίπτωση όπου το βάθος h είναι *μικρό*, η μεταβολή της υ_x είναι γραμμική. Επομένως $\mathrm{d}\upsilon_x/\mathrm{d}y = V/h$, οπότε (Σχ. 5.1)

$$J_p = -\frac{\eta V}{h} \quad \text{και} \quad F = -\frac{\eta V S}{h}$$

Είναι φανερό ότι, για να κινηθεί η πλάκα με σταθερή ταχύτητα V, απαιτείται η κατανάλωση ισχύος

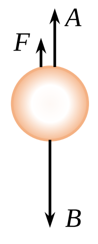
$$P = F_{\varepsilon\xi} V = \frac{\eta V^2 S}{h} \tag{5.3}$$

5.3. Μέθοδος

Η ίδια γενικά εικόνα με αυτήν που περιγράφηκε παραπάνω ισχύει και κατά την κίνηση σώματος, όταν ένα μακροσκοπικό αντικείμενο κινείται μέσα σε ρευστό που ηρεμεί. Πάνω στο αντικείμενο ασκείται μια επιβραδυντική δύναμη, F, η οποία, για μικρές ταχύτητες του αντικειμένου, υ, είναι με καλή προσέγγιση ανάλογη αυτής της ταχύτητας και δίνεται από τη σχέση $F = -K\eta\upsilon$. Ο συντελεστής K εξαρτάται από το σχήμα του σώματος. Για σφαίρα μικρής ακτίνας, r, αποδεικνύεται ότι $K = 6\pi r$, οπότε

$$F = -6\pi\eta r \upsilon \tag{5.4}$$

Η Εξ. (5.4) είναι γνωστή ως νόμος του Stokes και ισχύει στην περίπτωση όπου σφαίρα *μικρής* ακτίνας, r, κινείται με *μικρή* ταχύτητα μέσα σε υγρό που βρίσκεται σε δοχείο *απείρων διαστάσεων*.



Σχήμα 5.2. Δυνάμεις που ασκούνται πάνω σε σφαίρα που πέφτει μέσα σε ρευστό.

Όταν μια σφαίρα πέφτει μέσα στο υγρό, υπόκειται σε τρεις δυνάμεις: το βάρος της $B = \rho_\sigma g V$, την άνωση $A = \rho_\upsilon g V$ και τη δύναμη της τριβής $F = -6\pi\eta r\upsilon$, όπως φαίνεται στο Σχ. 5.2. Εδώ ρ_σ και ρ_υ είναι οι πυκνότητες της σφαίρας και του υγρού, αντίστοιχα, V ο όγκος της σφαίρας και g η επιτάχυνση της βαρύτητας.

Η εξίσωση κίνησης της σφαίρας είναι

$$m\frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}t} = \rho_\sigma V g - \rho_\upsilon V g - 6\pi\eta r \upsilon \tag{5.5}$$

και, επειδή $m = V\rho_\sigma$ και $V = (4/3)\pi r^3$, έχουμε

$$\frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}t} = \frac{\rho_\sigma - \rho_\upsilon}{\rho_\sigma} g - \frac{6\pi\eta r \upsilon}{\rho_\sigma V} \tag{5.6}$$

ή

$$\frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}t} = \frac{\rho_\sigma - \rho_\upsilon}{\rho_\sigma} g - \frac{9}{2r^2}\frac{\eta\upsilon}{\rho_\sigma} \tag{5.7}$$

Είναι φανερό ότι αρχικά η σφαίρα επιταχύνεται. Καθώς όμως αυξάνεται η ταχύτητα, αυξάνεται και η αντίσταση του υγρού και θα φθάσει κάποια στιγμή που οι ασκούμενες στη σφαίρα δυνάμεις θα έχουν μηδενική συνισταμένη, οπότε $\mathrm{d}\upsilon/\mathrm{d}t = 0$ και το σώμα θα κινείται με σταθερή οριακή (ορική) ταχύτητα:

$$\upsilon_{o\rho} = \frac{\rho_\sigma - \rho_\upsilon}{\eta}\frac{2r^2 g}{9} \tag{5.8}$$

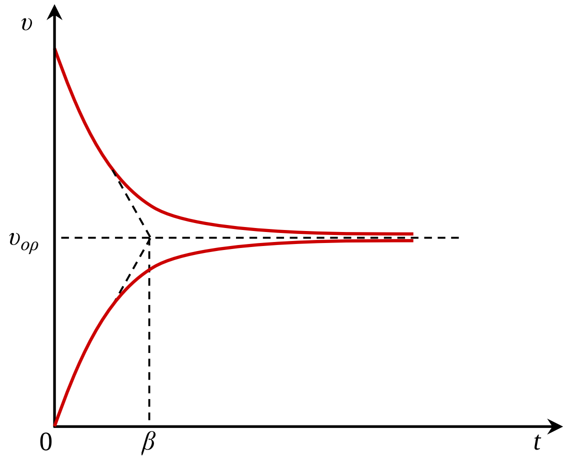
Η Εξ. (5.7) γράφεται

$$\beta\frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}t} = \upsilon_{o\rho} - \upsilon \tag{5.9}$$

όπου $\beta = 2r^2\rho_\sigma/9\eta$. Η λύση της Εξ. (5.9) είναι

$$\upsilon = \upsilon_{o\rho}\left(1 - \mathrm{e}^{-t/\beta}\right) \tag{5.10}$$

η γραφική παράσταση της οποίας φαίνεται στο Σχ. 5.3, όπου αποτυπώνεται η εξέλιξη της ταχύτητας για δύο ξεχωριστές περιπτώσεις. Η επάνω καμπύλη αντιστοιχεί σε σφαίρα που εισέρχεται στο υγρό με αρχική ταχύτητα μεγαλύτερη της $\upsilon_{o\rho}$, ενώ η κάτω καμπύλη για μια σφαίρα που εισέρχεται με μηδενική ταχύτητα.



Σχήμα 5.3. Μεταβολή της ταχύτητας της σφαίρας με τον χρόνο, καθώς πλησιάζει την ορική της τιμή $\upsilon_{o\rho}$.

Στην Εξ. (5.10) ο εκθετικός όρος μειώνεται και κάποτε γίνεται αμελητέος. Έτσι, η ταχύτητα σταθεροποιείται σε μια τιμή $\upsilon_{o\rho}$, ύστερα από χρόνο ίσο με μερικές φορές τον **χρόνο αποκατάστασης**, β, αναλόγως της ακρίβειας των οργάνων.

Είναι προφανές ότι, αν μετρηθεί η ορική ταχύτητα της σφαίρας που πέφτει στο υγρό, είναι δυνατόν να υπολογιστεί το η από την Εξ. (5.8) που γράφεται με τη μορφή

$$\eta = \frac{2}{9}\,\frac{r^2\,(\rho_\sigma - \rho_\upsilon)}{\upsilon_{o\rho}}\,g \tag{5.11}$$

Στις μετρήσεις που θα γίνουν θα υποτεθεί ότι πληρούνται οι προϋποθέσεις που απαιτούνται για να ισχύει η Εξ. (5.11). Συνήθως, για μεγάλες ταχύτητες, η δύναμη τριβής F εξαρτάται πιο πολύπλοκα από την ταχύτητα, όταν ροή ρευστού παύει να είναι στρωτή και γίνεται τυρβώδης. Η μετάβαση από την μία κατάσταση ροής στην άλλη περιγράφεται από τον αριθμό Reynolds (Re), έναν καθαρό αριθμό που η τιμή του καθορίζει το είδος της ροής. Για την κίνηση μιας σφαίρας σε ρευστό ο αριθμός Reynolds δίνεται από τη σχέση

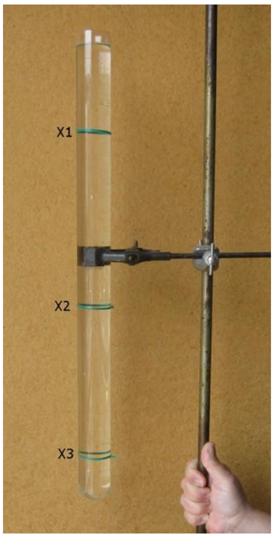
$$\mathrm{Re} = \frac{d\,\upsilon\,\rho_\upsilon}{\eta} \tag{5.12}$$

όπου υ είναι η ταχύτητα της σφαίρας, r η ακτίνα της, ρ_υ η πυκνότητα του υγρού και η ο συντελεστής εσωτερικής τριβής.

5.4. Πειραματική διάταξη

Η πειραματική διάταξη περιλαμβάνει:

- Έναν γυάλινο σωλήνα που περιέχει το υγρό (γλυκερίνη) του οποίου μελετάται το ιξώδες. Στον σωλήνα υπάρχουν τρεις χαραγές, X_1, X_2, X_3 (Σχ. 5.4).
- Χάρακα για τη μέτρηση των αποστάσεων μεταξύ των χαραγών
- Πυκνόμετρο και θερμόμετρο για τη μέτρηση της πυκνότητας και της θερμοκρασίας του υγρού, αντίστοιχα.
- Μικρές σφαίρες από σίδηρο.
- Μικρόμετρο για τη μέτρηση της διαμέτρου των σφαιρών.
- Ψηφιακό χρονόμετρο χειρός για τη μέτρηση του χρόνου.



Σχήμα 5.4. Ο σωλήνας με το υγρό του οποίου μελετάται το ιξώδες.

Βιβλιογραφία

1. M. Alonso, E. J. Finn, *Θεμελιώδης Πανεπιστημιακή Φυσική,* Τόμος I: *Μηχανική και Θερμοδυναμική* (Αθήνα, 1981), 7.9, 15.1, 15.4, 15.7.
2. F. Reif, *Στατιστική Φυσική (Μαθήματα Φυσικής Berkeley,* Τόμος 5) (Αθήνα, 1978), 8.1, 8.2.
3. Α. Θ. Παπαϊωάννου, *Μηχανική των ρευστών*, Τόμος I (Αθήνα, [2]2002), 1.5, 3.2, 3.3, 4.2.
4. ΕΜΠ, Τομέας Φυσικής, ΣΕΜΦΕ, *Εργαστηριακές Ασκήσεις Φυσικής*, Τόμος I (Αθήνα, [2]2010), σ. 91-100.

5.5. Εκτέλεση

1. Μετρήστε τις αποστάσεις S_1 μεταξύ των χαραγών X_1 και X_2, S_2 μεταξύ των χαραγών X_2 και X_3 και S μεταξύ των χαραγών X_1 και X_3. Ρίξτε μια σφαίρα στο υγρό, όσο γίνεται πιο κοντά στο κέντρο του σωλήνα. Μετρήστε τους χρόνους t_1 και t_2 που κάνει η σφαίρα για να διανύσει τις αποστάσεις S_1 και S_2, αντίστοιχα. (Φροντίστε να αποφύγετε το σφάλμα παράλλαξης.)

2. Μετρήστε την πυκνότητα, $\rho_\upsilon \pm \delta\rho_\upsilon$, και τη θερμοκρασία του υγρού.

3. Ζυγίστε μαζί 10 σφαίρες και δώστε το αποτέλεσμα της ζύγισης στη μορφή $m_{ολ} \pm \delta m_{ολ}$.

4. Μετρήστε τη διάμετρο μιας σφαίρας και εκτιμήστε το σφάλμα αυτής της τιμής.

5. Ρίξτε τη σφαίρα στο υγρό και μετρήστε τον χρόνο t που χρειάζεται για να διανύσει την απόσταση S μεταξύ των χαραγών X_1 και X_3.

6. Επαναλάβετε το προηγούμενο βήμα για τις υπόλοιπες 9 σφαίρες και καταχωρήστε τα αποτελέσματα στον Πίνακα II.

Πίνακας II

i	t_i (s)	υ_i (cm/s)
1		
2		
…		
10		

5.6. Επεξεργασία των μετρήσεων

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Η ανάλυση που ακολουθεί βασίζεται στο γεγονός ότι οι διαφορές στις ακτίνες των 10 σφαιρών είναι σχετικά μικρές, δηλαδή της τάξης του 1%.

1. Από τις μετρήσεις του βήματος 1 της εκτέλεσης, υπολογίστε τις δύο μέσες ταχύτητες για τα δύο αυτά διαστήματα. Αν αυτές είναι περίπου οι ίδιες, τότε σε ολόκληρο το διάστημα S οι σφαίρες κινούνται με σταθερή ταχύτητα, που είναι η «ορική».

2. Συμπληρώστε τον Πίνακα II, υπολογίζοντας για κάθε σφαίρα την ορική ταχύτητα $\upsilon_i = S/t_i$.

3. Υπολογίστε τη μέση τιμή και το σφάλμα της ορικής ταχύτητας.

4. Υπολογίστε την πυκνότητα ρ_σ των σφαιρών από τη σχέση $\rho_\sigma = m_{o\lambda}/V_{o\lambda}$, όπου για 10 σφαίρες είναι $V_{o\lambda} = 10 \times (4/3)\pi r^3$. Δώστε το αποτέλεσμα σε μορφή $\rho_\sigma \pm \delta\rho_\sigma$. (Αγνοήστε το σφάλμα της ακτίνας των σφαιρών.)

5. Συμπληρώστε στον παρακάτω Πίνακα ΙΙΙ τις τιμές των ακόλουθων μεγεθών, καθώς και το απόλυτο και σχετικό σφάλμα τους.

Πίνακας ΙΙΙ

Μέγεθος	Τιμή	Απόλυτο Σφάλμα	Σχετικό Σφάλμα (%)
m (μάζα σφαίρας)			
r (ακτίνα σφαίρας)			
ρ_σ (πυκνότητα σφαίρας)			
ρ_υ (πυκνότητα υγρού)			
$\upsilon_{o\rho}$ (ορική ταχύτητα)			

6. Υπολογίστε από την Εξ. (5.11) τον συντελεστή ιξώδους, η, του υγρού, καθώς και το σφάλμα του, $\delta\eta$. Στον υπολογισμό του $\delta\eta$ να λάβετε υπόψη μόνο εκείνο ή εκείνα τα μεγέθη τα οποία, σύμφωνα με τον Πίνακα ΙΙΙ, θα συνεισφέρουν σημαντικά στο σφάλμα της τελικής τιμής. Δίνεται $g = 980$ cm/s^2.