Άσκηση 4

Προσδιορισμός του μέτρου στρέψης υλικού με τη μέθοδο του στροφικού εκκρεμούς

4.1. Σκοπός

Σκοπός της άσκησης είναι ο προσδιορισμός του μέτρου στρέψης υλικού με τη μέθοδο του στροφικού εκκρεμούς.

4.2. Γενικά

4.2.1. Τα μέτρα ελαστικότητας των στερεών

Ένα σώμα υπό την επίδραση εξωτερικών δυνάμεων παραμορφώνεται. Οι παραμορφώσεις αυτές, εφόσον δεν υπερβαίνουν ορισμένα όρια, παύουν να υπάρχουν αμέσως μόλις πάψουν να επιδρούν οι δυνάμεις, οπότε το σώμα επανέρχεται στην αρχική του κατάσταση. Τέτοιου είδους παραμορφώσεις ονομάζονται **ελαστικές** και, όπως όλες οι παραμορφώσεις, χαρακτηρίζονται από ένα μέγεθος που εξαρτάται από το υλικό.

Η ελαστικότητα ενός σώματος εκδηλώνεται:

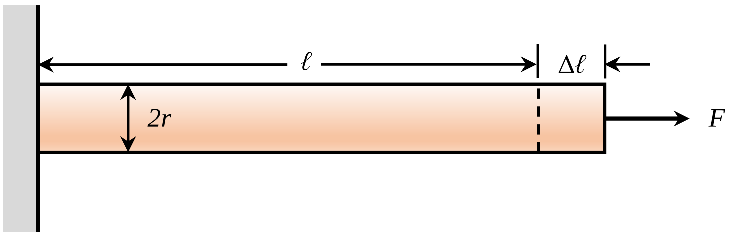
α) κατά τον εφελκυσμό και τη θλίψη,

β) κατά τη διάτμηση και τη στρέψη,

γ) κατά την ομοιόμορφη συμπίεση από όλες τις διευθύνσεις.

Η ελαστικότητα ενός σώματος διέπεται από τον θεμελιώδη **νόμο του Hooke**, σύμφωνα με τον οποίο οι ελαστικές παραμορφώσεις που αναπτύσσονται σε ένα σώμα είναι ανάλογες των τάσεων (δύναμη ανά μονάδα επιφάνειας) που τις προκαλούν, εφόσον αυτές είναι μικρές. Είναι σκόπιμο τα τρία είδη παραμορφώσεων να μελετηθούν χωριστά.

α) Εφελκυσμός και θλίψη: Έστω μια ράβδος με μήκος ℓ και διάμετρο $2r << \ell$, το αριστερό άκρο της οποίας είναι στερεωμένο, όπως φαίνεται στο Σχ. 4.1.



Σχήμα 4.1. Εφελκυσμός ράβδου. Η επιμήκυνση $\Delta\ell$ σχεδιάστηκε υπερβολικά μεγάλη καθαρά για εποπτικούς λόγους. Κατά τη θλίψη, η δύναμη έχει αντίθετη φορά και συμπιέζει τη ράβδο κατά $\Delta\ell$.

Η ράβδος δέχεται την επίδραση μιας δύναμης F κατά μήκος του άξονά της. Κατά τον εφελκυσμό, ο νόμος του Hooke έχει την ακόλουθη μορφή:

$$\frac{\Delta\ell}{\ell} = \alpha \frac{F}{S} \tag{4.1}$$

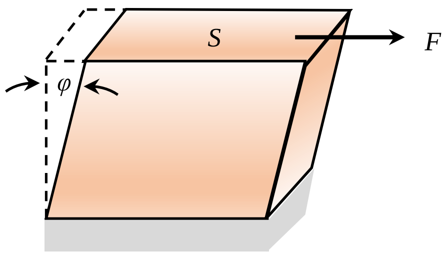
όπου $\Delta\ell$ είναι η επιμήκυνση της ράβδου και S το εμβαδόν της διατομής της. Η Εξ. (4.1) δηλώνει ότι η παραμόρφωση, δηλαδή η σχετική επιμήκυνση $\Delta\ell/\ell$, είναι ανάλογη προς την τάση F/S

που την προκαλεί. Ο συντελεστής α ονομάζεται **συντελεστής εφελκυσμού** του υλικού της ράβδου, ενώ το μέγεθος $E = 1/\alpha$ είναι γνωστό ως **μέτρο ελαστικότητας** ή **μέτρο του Young**.

β) Διάτμηση και στρέψη: Κατά τη διάτμηση (Σχ. 4.2), σύμφωνα με τον νόμο του Hooke, έχουμε

$$\varphi = \beta \frac{F}{S} \tag{4.2}$$

δηλαδή η γωνία διάτμησης φ είναι ανάλογη προς τη διατμητική τάση F/S. Ο συντελεστής β ονομάζεται **συντελεστής διάτμησης** ή **στρέψης** του υλικού, ενώ το αντίστροφό του, $G = 1/\beta$, είναι γνωστό ως **μέτρο διάτμησης** ή **μέτρο στρέψης**.



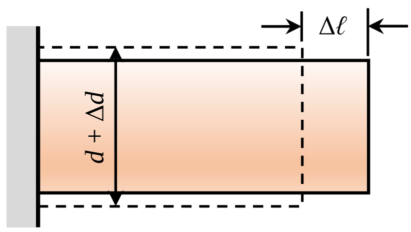
Σχήμα 4.2. Αντικείμενο υπό διατμητική τάση.

γ) Ομοιόμορφη συμπίεση: Κατά την ομοιόμορφη συμπίεση του σώματος από όλες τις διευθύνσεις, ο νόμος του Hooke έχει την ακόλουθη μορφή:

$$\frac{\Delta V}{V} = -\kappa\, \Delta p \tag{4.3}$$

όπου V είναι ο όγκος του σώματος και ΔV η μεταβολή του όγκου που οφείλεται στη μεταβολή Δp στην πίεση. Ο συντελεστής κ ονομάζεται **συντελεστής συμπιεστότητας**, ενώ το μέγεθος $B = 1/\kappa$ είναι γνωστό ως **μέτρο ελαστικότητας όγκου**.

Λόγος Poisson: Όταν η ράβδος του Σχ. 4.1 έχει σχετικά μεγάλη διάμετρο, μπορεί κανείς να παρατηρήσει ότι στην πραγματικότητα η επιμήκυνσή της κατά $\Delta\ell$ συνοδεύεται από τη μείωση της διαμέτρου της κατά Δd (Σχ. 4.3).



Σχήμα 4.3. Εφελκυσμός και εκλέπτυνση ράβδου.

Για μικρές παραμορφώσεις, η σχετική μεταβολή της διαμέτρου είναι ανάλογη προς τη σχετική επιμήκυνση, δηλαδή ισχύει:

$$\frac{\Delta d}{d} = -\mu \frac{\Delta\ell}{\ell} \tag{4.4}$$

Ο λόγος

$$\mu = -\frac{\Delta d/d}{\Delta\ell/\ell} \tag{4.5}$$

είναι γνωστός ως **λόγος Poisson**.

Ο συντελεστής εφελκυσμού α, ο συντελεστής διάτμησης β και ο λόγος Poisson μ συνδέονται μεταξύ τους με τη σχέση:

$$\beta = 2\alpha\,(1+\mu) \tag{4.6}$$

Επομένως, για τα ισότροπα σώματα αρκεί να γνωρίζουμε τους δύο από τους τρεις αυτούς συντελεστές.

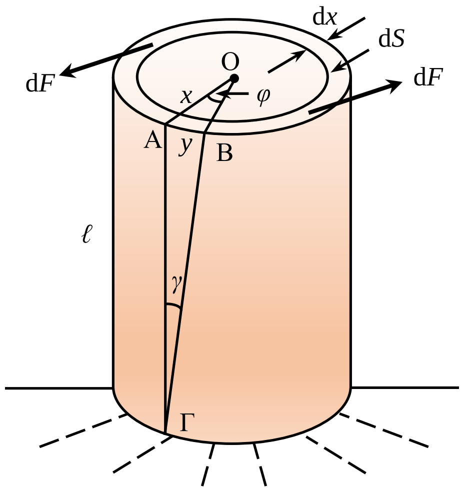
4.2.2. Η σταθερά στρέψης σύρματος

Έστω ένα σύρμα μήκους ℓ και ακτίνας r, το ένα άκρο του οποίου είναι πακτωμένο, ενώ στο άλλο άκρο του ασκείται ροπή στρέψης M. Η γωνία στρέψης, φ, του ελεύθερου άκρου είναι ανάλογη της ροπής στρέψης και ισχύει η σχέση

$$M = D\,\varphi \tag{4.7}$$

όπου ο συντελεστής D είναι γνωστός ως **σταθερά στρέψης** του σύρματος και εξαρτάται από το υλικό και τις διαστάσεις του.

Για τον υπολογισμό του D συναρτήσει των διαστάσεων του σύρματος και του μέτρου στρέψης G του υλικού, το σύρμα θεωρείται ότι αποτελείται από πολλούς πολύ λεπτούς κυλινδρικούς χιτώνες. Ας θεωρήσουμε έναν τέτοιον χιτώνα με ακτίνα x και πάχος dx (Σχ. 4.4).



Σχήμα 4.4. Στρέψη σύρματος.

Αν στο ελεύθερο άκρο του ασκηθεί ζεύγος δυνάμεων dF, που ισοδυναμεί με ροπή στρέψης dM = 2xdF, τότε αυτό το άκρο θα στραφεί κατά γωνία φ, που ισοδυναμεί με μετακίνηση του σημείου A στο σημείο B, δηλαδή στροφή της γενέτειρας ΓΑ κατά τη γωνία γ.

Σύμφωνα με τον νόμο του Hooke (Εξ. 4.2), η γωνία γ δίνεται από τη σχέση

$$\gamma = \beta\,\frac{2\mathrm{d}F}{\mathrm{d}S} = \beta\,\frac{\mathrm{d}M}{x\,\mathrm{d}S} = \beta\,\frac{\mathrm{d}M}{2\,\pi\,x^2\,\mathrm{d}x} \tag{4.8}$$

Για μικρές γωνίες γ, το τόξο $\widehat{AB}$ είναι

$$\widehat{AB} = y = \ell\,\gamma = x\,\varphi \tag{4.9}$$

επομένως

$$\gamma = \frac{x\,\varphi}{\ell} \tag{4.10}$$

Αντικαθιστώντας την Εξ. (4.10) στην Εξ. (4.8), παίρνουμε

$$\mathrm{d}M = \frac{2\,\pi\,x^3 \varphi\,\mathrm{d}x}{\ell\beta} \tag{4.11}$$

Για όλους τους χιτώνες με ακτίνες μεταξύ $x = 0$ και $x = r$, η γωνία στρέψης φ έχει την ίδια τιμή, επομένως η ολική ροπή που απαιτείται για τη στρέψη του σύρματος είναι

$$M = \int_0^M \mathrm{d}M = \frac{2\,\pi\,\varphi}{\ell\beta}\int_0^r x^3 \mathrm{d}x = \frac{\pi\,r^4}{2\ell\beta}\,\varphi \tag{4.12}$$

Η σταθερά στρέψης του σύρματος, $D = M/\varphi$, είναι

$$D = \frac{\pi\,r^4}{2\ell\beta} \tag{4.13}$$

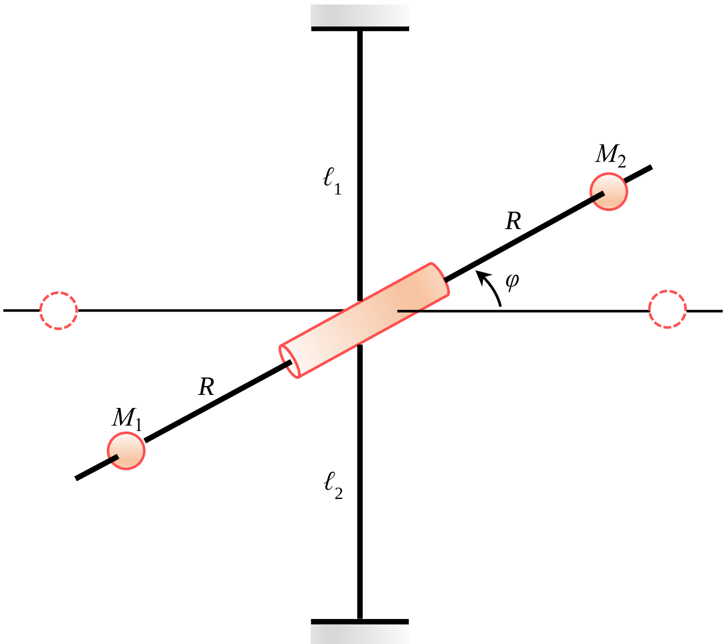
ή τελικά

$$D = G\,\frac{\pi\,r^4}{2\ell} \tag{4.14}$$

όπου G είναι το μέτρο στρέψης του υλικού του σύρματος.

4.3. Μέθοδος

Από την Εξ. (4.14) προκύπτει ότι, αν προσδιοριστεί πειραματικά η σταθερά στρέψης ενός σύρματος με γνωστές διαστάσεις, εύκολα υπολογίζεται το μέτρο στρέψης του υλικού του σύρματος.



Σχήμα 4.5. Σχηματική παράσταση της πειραματικής διάταξης της άσκησης.

Στο σύστημα του Σχ. 4.5, ένα αξονικά συμμετρικό στερεό σώμα είναι συνδεδεμένο με το σύρμα που μελετάται. Αν το σύστημα στραφεί κατά γωνία φ από τη θέση ισορροπίας, η ροπή επαναφοράς που ασκεί το σύρμα είναι

$$M = -\,D\,\varphi \tag{4.15}$$

όπου το αρνητικό πρόσημο δείχνει ότι η φορά της M είναι αντίθετη της γωνίας στρέψης φ.

Αν το σώμα αφεθεί να εκτελέσει ελεύθερες στροφικές ταλαντώσεις, η διαφορική εξίσωση που διέπει αυτές τις ταλαντώσεις είναι

$$I\,\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} = M \tag{4.16}$$

που σημαίνει ότι το γινόμενο της ροπής αδράνειας I του σώματος επί τη γωνιακή του επιτάχυνση $\mathrm{d}^2\varphi/\mathrm{d}t^2$ είναι ίσο με τη ροπή M που ασκεί το σύρμα πάνω στο σώμα. Επομένως, από τις Εξ. (4.15) και (4.16), προκύπτει ότι

$$I\,\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} + D\,\varphi = 0 \tag{4.17}$$

ή

$$\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} + \omega^2\,\varphi = 0 \tag{4.18}$$

όπου

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{I}} \tag{4.19}$$

είναι η γωνιακή συχνότητα των απλών αρμονικών στροφικών ταλαντώσεων. Η λύση της Εξ. (4.18) έχει τη μορφή

$$\varphi = \varphi_0 \cos(\omega t + \theta) \tag{4.20}$$

όπου φ_0 είναι το πλάτος της ταλάντωσης και θ μια σταθερά, γνωστή ως σταθερά φάσης, που εξαρτώνται από της αρχικές συνθήκες του συστήματος.

Ο χρόνος για μία πλήρη ταλάντωση, δηλαδή η περίοδος T, είναι

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{D}} \tag{4.21}$$

από τον προσδιορισμό της οποίας και τη γνωστή τιμή της ροπής αδρανείας I υπολογίζεται η D, συνεπώς και το G.

Στην πράξη, επειδή το σύστημα ανάρτησης του σώματος έχει περίπλοκο γεωμετρικό σχήμα και ο υπολογισμός της ολικής ροπής αδράνειας I είναι πολύ δύσκολος, θα χρησιμοποιηθεί μια μέθοδος εύρεσης του D η οποία δεν απαιτεί γνώση της I.

Το περιστρεφόμενο σώμα αποτελείται από μία οριζόντια ράβδο και το σύστημα ανάρτησής της στα σύρματα (Σχ. 4.5 και 4.6). Δύο όσο το δυνατόν πανομοιότυπες μάζες, M_1 και M_2, τοποθετούνται πάνω στη ράβδο, συμμετρικά ως προς τον άξονα περιστροφής και σε απόσταση R από αυτόν.

Αν I_0 είναι η ροπή αδράνειας του σώματος (χωρίς τις μάζες M_1 και M_2) ως προς τον άξονα του σύρματος, I_1 και I_2 είναι οι ροπές αδράνειας των M_1 και M_2, αντίστοιχα, ως προς άξονες παράλληλους προς το σύρμα που περνάνε από τα κέντρα μάζας τους, τότε, σύμφωνα με το θεώρημα των παραλλήλων αξόνων (Steiner), η ολική ροπή αδράνειας του συστήματος είναι

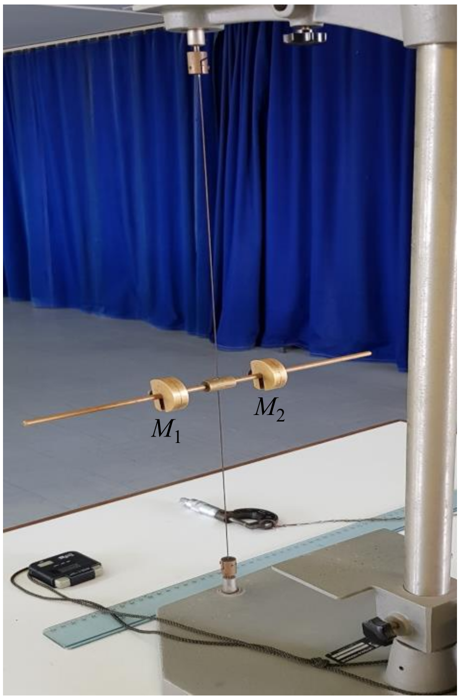
$$I = I_0 + I_1 + I_2 + M_1 R^2 + M_2 R^2 \tag{4.22}$$

Αν $M_1 = M_2$ και $M_1 + M_2 = M$, ενώ $I_0 + I_1 + I_2 = I'$, τότε, από την Εξ. (4.21), προκύπτει τελικά ότι

$$\frac{T^2}{4\pi^2} = \frac{I'}{D} + \frac{M}{D} R^2 \qquad (4.23)$$

Η γραφική παράσταση του μεγέθους $y = T^2/4\pi^2$ συναρτήσει του $x = R^2$ είναι ευθεία, με κλίση M/D, που τέμνει τον άξονα των y στο σημείο $y = I'/D$. Έτσι, η μέτρηση της περιόδου T των στροφικών ταλαντώσεων για διάφορες τιμές της απόστασης R καθιστά δυνατό τον πειραματικό προσδιορισμό της D, συνεπώς και του G.

4.4. Πειραματική διάταξη



Σχήμα 4.6. Η διάταξη της άσκησης.

Η πειραματική διάταξη (Σχ. 4.6) αποτελείται από δύο όμοια σύρματα, των οποίων το G θέλουμε να προσδιορίσουμε, και μία οριζόντια ράβδο (οδηγό) στερεωμένη συμμετρικά ως προς τον άξονα περιστροφής. Δύο όσο το δυνατόν όμοιες μάζες, M_1 και M_2, μπορούν να στερεωθούν πάνω στη ράβδο, σε διάφορες αποστάσεις από το σύρμα.

Αν το σύστημα στραφεί κατά μια γωνία από τη θέση ισορροπίας και αφεθεί ελεύθερο, θα εκτελέσει στροφικές ταλαντώσεις, οι περίοδοι των οποίων μετρούνται με τη βοήθεια ψηφιακού χρονομέτρου χειρός.

Οι μάζες M_1 και M_2 μπορούν να αφαιρεθούν από τον οδηγό και να ζυγιστούν.

Η διάταξη συμπληρώνεται με ένα μικρόμετρο, για τη μέτρηση της διαμέτρου των συρμάτων, και έναν χάρακα, για τη μέτρηση του μήκους των συρμάτων, καθώς και των αποστάσεων R.

Βιβλιογραφία

1. Κ. Δ. Αλεξόπουλος, *Γενική Φυσική*, Τόμος 1: *Μηχανική – Ακουστική* (Αθήνα, [4]1960), § 125, 126, 133-135, 138-142.
2. H. D. Young, *Πανεπιστημιακή Φυσική*, Τόμος Α: *Μηχανική – Θερμοδυναμική* (Αθήνα, 1994), 11.5-11.8.
3. R. A. Serway, J. W. Jewett, *Φυσική για επιστήμονες και μηχανικούς: Μηχανική – Ταλαντώσεις και Μηχανικά Κύματα – Θερμοδυναμική – Σχετικότητα* (Αθήνα, 2012), Μ12.4, Τ1.5, Τ1.6.
4. D. Halliday, R. Resnick, J. Walker, *Φυσική: Βασικές αρχές*, Τόμος Α: *Μηχανική – Κύματα – Θερμοδυναμική* (Αθήνα, 2021), 12.3, 15.3, 15.5.
5. *Εργαστηριακές Ασκήσεις Φυσικής*, Τόμος Ι, ΕΜΠ, Τομέας Φυσικής, ΣΕΜΦΕ, Εκδόσεις Συμμετρία (Αθήνα, 2010), σ. 81-90.

4.5. Εκτέλεση

1. Μετρήστε τα μήκη ℓ_1 και ℓ_2 των δύο συρμάτων της συσκευής, καθώς και τη διάμετρό τους, $2r$.

2. Ζυγίστε μαζί τις δύο μάζες και σημειώστε την ολική τους μάζα M.

3. Τοποθετήστε τις μάζες στους οδηγούς τους σε ίσες αποστάσεις R από τον άξονα περιστροφής και, προκαλώντας στροφικές ταλαντώσεις στο σύστημα, μετρήστε τον συνολικό χρόνο για 10 πλήρεις ταλαντώσεις, ώστε να προσδιοριστεί η περίοδος T της ταλάντωσης.

4. Επαναλάβετε τη διαδικασία για 10 συνολικά διαφορετικές αποστάσεις R, καταγράφοντας τις μετρήσεις σας στις πρώτες τρεις στήλες του Πίνακα Ι.

Πίνακας Ι

Α/Α	R (m)	$10T$ (s)	T (s)	$x = R^2$ (m^2)	$y = T^2/4\pi^2$ (s^2)

4.6. Επεξεργασία των μετρήσεων

1. Συμπληρώστε τις υπόλοιπες στήλες του Πίνακα Ι.

2. Σχεδιάστε τη γραφική παράσταση του $y = T^2/4\pi^2$ ως συνάρτηση του $x = R^2$.

3. Χρησιμοποιήστε τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων για να βρείτε την καλύτερη ευθεία $y = a + bx$ που αντιστοιχεί στα πειραματικά σημεία.

4. Από την κλίση της ευθείας και το σφάλμα της, $b \pm \delta b$, και από τη συνολική μάζα M, υπολογίστε τη σταθερά στρέψης του σύρματος, $D \pm \delta D$, δεδομένου ότι, από την Εξ. (4.23), $D = M/b$.

5. Από την Εξ. (4.14) και τα γνωστά D, r και ℓ, υπολογίστε το μέτρο στρέψης του υλικού του σύρματος, $G \pm \delta G$. Λάβετε υπόψη ότι η Εξ (4.14) αναφέρεται σε *ένα* σύρμα του οποίου το ένα άκρο είναι πακτωμένο και το άλλο ελεύθερο, ενώ στη συσκευή που χρησιμοποιήθηκε υπήρχαν *δύο* τέτοια σύρματα, συνεπώς η πειραματικά μετρούμενη σταθερά στρέψης D είναι το άθροισμα των σταθερών στρέψης των δύο συρμάτων.