Μιγαδικές Συναρτήσεις

Χειμερινό Εξάμηνο 2022-2023

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΝΑΥΠΗΓΩΝ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

Επαναληπτικό Φυλλάδιο Ασκήσεων

Διδάσκων:
Β. Γρηγοριάδης

Σημειώσεις.

- Αυτό το Φυλλάδιο Ασκήσεων **δεν είναι** ατομική εργασία προς παράδοση. Προορίζεται για προσωπική εξάσκηση.
- Για κάθε άσκηση υπάρχουν υποδείξεις, οι οποίες διατίθενται σε ξεχωριστό αρχείο.
- Το εύρος των υποδείξεων **ποικίλλει από σύντομα σχόλια έως εκτεταμένες λύσεις** μαζί με επισκόπηση των κρίσιμων θεωρημάτων που εφαρμόζονται.

Άσκηση 1. Αποδείξτε ότι για όλους τους μιγαδικούς αριθμούς z, w και κάθε $n = 1, 2, \dots$ ισχύει

$$i) \quad |z \cdot w| = |z| \cdot |w|, \qquad ii) \quad \overline{z} \cdot \overline{w} = \overline{z \cdot w}, \qquad iii) \quad \overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}, \qquad iv) \quad (\overline{z})^n = \overline{z^n}.$$

Υποδείξεις.

Στα $i)$, $ii)$ και $iii)$ γράφουμε $z = a + bi$ και $w = c + di$ και εκτελούμε τις πράξεις. Στο $iv)$ εφαρμόζουμε το $ii)$ και επαγωγή στο n.

Άσκηση 2. Αν το p είναι ένα πολυώνυμο με πραγματικούς συντελεστές και το $z_0 \in \mathbb{C}$ είναι ρίζα του p τότε και ο συζυγής $\overline{z_0}$ είναι επίσης ρίζα του p.

Υπόδειξη. Χρησιμοποιείστε την προηγούμενη άσκηση.

Υποδείξεις.

Γράφουμε $p(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0$, όπου $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ και $a_n \neq 0$. Από την προηγούμενη άσκηση έχουμε

$$\begin{aligned}
p(\overline{z_0}) &= a_n \overline{z_0}^n + \dots + a_1 \overline{z_0} + a_0 \\
&= a_n \overline{z_0^n} + \dots + a_1 \overline{z_0} + a_0 \\
&= \overline{a_n z_0^n} + \dots + \overline{a_1 \cdot z_0} + \overline{a_0} \\
&= \overline{a_n z_0^n + \dots + a_n \cdot z_0 + a_0} \\
&= \overline{p(z_0)} = \overline{0} = 0.
\end{aligned}$$

(Ισχύει $\overline{a_i} = a_i$ επειδή $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, \dots, n$.)

Άσκηση 3. Να υπολογίσετε τους πιο κάτω μιγαδικούς αριθμούς

$$z_1 = \frac{1+2i}{3-4i} + \frac{2-i}{5i}, \qquad z_2 = \frac{5i}{(1-i)(2-i)(3-i)}$$

$$w_1 = (\sqrt{3} - i)^6, \quad w_2 = \frac{(1+i)^{16}}{(\sqrt{3}+i)^6}, \qquad w_3 = (-1+i)^7$$

$$w_4 = \mathrm{Log}(-1+i), \qquad w_5 = \mathrm{Log}(3 + \sqrt{3}i).$$

Υποδείξεις.

Απαντήσεις.

$$z_1 = -\frac{2}{5}, \qquad z_2 = -\frac{1}{2}$$

$$w_1 = -64, \qquad w_2 = -4, \qquad w_3 = -8 - 8i$$

$$w_4 = \frac{1}{2}\ln 2 + i \cdot \frac{3\pi}{4}, \qquad w_5 = \ln 2 + \frac{1}{2}\ln 3 + i \cdot \frac{\pi}{6}\ .$$

Σχόλια.

Για να βρούμε το z^{-1} πολλαπλασιάζουμε και διαιρούμε με τον συζυγή $\overline{z}$, για παράδειγμα

$$\frac{1}{(3-4i)} = \frac{3+4i}{(3-4i)(3+4i)} = \frac{3+4i}{3^2+4^2}.$$

Όταν έχουμε να βρούμε μια δύναμη με μεγάλο εκθέτη καλύτερα να φέρουμε τη βάση της δύναμης σε πολική μορφή και μετά να εφαρμόσουμε τον τύπο de Moivre. Εδώ έχουμε

$$\sqrt{3} - i = 2e^{-\frac{\pi}{6}i}, \qquad \sqrt{3} + i = 2e^{\frac{\pi}{6}i}, \qquad 1 + i = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}, \quad -1 + i = \sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}i},$$

άρα

$$w_1 = (\sqrt{3} - i)^6 = \left(2e^{-\frac{\pi}{6}i}\right)^6 = 2^6 \cdot e^{-\frac{\pi}{6}i\cdot 6} = 64 \cdot e^{-\pi i} = 64 \cdot (-1) = -64.$$

Όμοια υπολογίζονται τα w_2 και w_3.

Για τα w_4 και w_5 φέρνουμε πρώτα τους μιγαδικούς αριθμούς μέσα στον λογάριθμο σε πολική μορφή

$$-1 + i = \sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}i}, \qquad 3 + \sqrt{3}i = 2\sqrt{3}e^{\frac{\pi}{6}i}$$

οπότε από τον ορισμό του λογαρίθμου έχουμε

$$w_4 = \ln\sqrt{2} + i \cdot \frac{3\pi}{4} = \frac{1}{2}\ln 2 + i \cdot \frac{3\pi}{4}$$

$$w_5 = \ln(2\sqrt{3}) + i \cdot \frac{\pi}{6} = \ln 2 + \frac{1}{2}\ln 3 + i \cdot \frac{\pi}{6}\ .$$

Άσκηση 4. Αποδείξτε τις ακόλουθες ταυτότητες για κάθε $z \in \mathbb{C}$,

$$\text{Re}z = \frac{z + \overline{z}}{2}, \qquad \text{Im}z = \frac{z - \overline{z}}{2i}, \qquad \sin^2 z + \cos^2 z = 1, \qquad \sin(2z) = 2\sin z \cdot \cos z.$$

Υποδείξεις.

Στις πρώτες δύο ισότητες γράφουμε $z = a + bi$ και εκτελούμε τις πράξεις. Στις τριγωνομετρικές ισότητες εφαρμόζουμε τους ορισμούς

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \qquad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

και εκτελούμε τις πράξεις.

Άσκηση 5. Προσδιορίστε τις ρίζες των ακόλουθων εξισώσεων

$$z^3 = -1, \qquad z^4 = 8,$$

$$e^z = i.$$

Υποδείξεις.

Υπενθυμίζουμε ότι αν $r_0 e^{i\theta_0} = r_1 e^{i\theta_1}$ τότε $r_0 = r_1$ και $\theta_0 - \theta_1 = 2k\pi$, όπου $k \in \mathbb{Z}$. Μάλιστα στις πολυωνυμικές εξισώσεις βαθμού n το k παίρνει τιμές από 0 έως $n - 1$.

Για να λύσουμε τις δύο πρώτες εξισώσεις γράφουμε $z = re^{i\theta}$, όπου $r > 0$ και $-\pi < \theta \leq \pi$ και φέρνουμε τους αριθμούς στο δεξιό σκέλος σε πολική μορφή:

$$-1 = e^{i\pi}, \qquad 8 = 8e^{i\cdot 0}.$$

Στην πρώτη εξίσωση έχουμε

$$(re^{i\theta})^3 = e^{i\pi} \quad \text{ισοδύναμα} \quad r^3 e^{i\cdot 3\theta} = e^{i\pi}.$$

Από τα προηγούμενα προκύπτει $r^3 = 1$, άρα $r = 1$ και $3\theta = \pi + 2k\pi$, ισοδύναμα

$$\theta = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{3} \quad \text{όπου } k = 0, 1, 2.$$

Άρα

$$z_0 = 1 \cdot e^{i\cdot\frac{\pi}{3}} = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot i$$

$$z_1 = e^{i\cdot(\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{3})} = e^{i\pi} = -1$$

$$z_2 = e^{i\cdot(\frac{4\pi}{3}+\frac{\pi}{3})} = e^{i\cdot\frac{5\pi}{3}} = \cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3} = \cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot i.$$

Σχετικά με τη δεύτερη εξίσωση παίρνουμε $r^4 e^{i4\theta} = 8e^{i\cdot 0}$, οπότε $r = \sqrt[4]{8} = 2^{3/4}$ και $4\theta = 0 + 2k\pi$, ισοδύναμα

$$\theta = \frac{k\pi}{2} \quad \text{όπου } k = 0, 1, 2, 3.$$

Προκύπτουν οι εξής τέσσερις ρίζες

$$z_{0,1} = \pm 2^{3/4} \quad (\text{για } k = 0, 2) \quad \text{και} \quad z_{3,4} = \pm i \cdot 2^{3/4} \quad (\text{για } k = 1, 3).$$

Στην τελευταία εξίσωση $e^z = i$ γράφουμε $z = x + iy$ και έχουμε

$$e^z = i \iff e^x \cos y + ie^x \sin y = 0 + i \cdot 1.$$

Άρα $e^x \cos y = 0$, απ' όπου προκύπτει ότι $\cos y = 0$, ειδικότερα $\sin y = \pm 1$. Επιπλέον $e^x \sin y = 1$, επειδή $e^x > 0$ δεν μπορούμε να έχουμε $\sin y = -1$. Επομένως $\sin y = 1$ και άρα παίρνουμε $e^x = 1$, δηλαδή $x = 0$. Σχετικά με το y έχουμε $\sin y = 1$ άρα $y = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Επομένως οι λύσεις της εξίσωσης είναι οι

$$z = i \cdot (\frac{\pi}{2} + 2k\pi), \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Άσκηση 6 (Εξισώσεις Cauchy-Riemann)**.**

(i) Επαληθεύστε τις εξισώσεις Caychy-Riemann για τη συνάρτηση

$$g : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : g(x + iy) = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3).$$

(ii) Βρείτε όλες τις ολόμορφες συναρτήσεις $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : f = u + iv$ με

$$u(x, y) = e^x \cos y + e^y \cos x + xy.$$

Υποδείξεις.

Υπενθυμίζουμε τις **εξισώσεις Cauchy-Riemann** σε ένα σημείο $x_0 + iy_0$ του πεδίου ορισμού της $f = u + iv$:

$$u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0),$$
$$u_y(x_0, y_0) = -v_x(x_0, y_0),$$

όπου u_x, u_y, v_x, v_y είναι οι μερικές παράγωγοι.

Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο (x_0, y_0) τότε ικανοποιούνται οι εξισώσεις Cauchy-Riemann στο (x_0, y_0). Αν οι u, v έχουν συνεχείς μερικές παραγώγους στο (x_0, y_0) τότε ισχύει και το αντίστροφο, επομένως σε αυτή την περίπτωση η f είναι παραγωγίσιμη στο (x_0, y_0) αν και μόνο αν ικανοποιούνται οι εξισώσεις Cauchy-Riemann στο (x_0, y_0).

(i) Έχουμε $u(x, y) = x^3 - 3xy^2$ και $v(x, y) = 3x^2y - y^3$, οπότε

$$u_x(x, y) = 3x^2 - 3y^2, \quad v_x(x, y) = 6xy$$
$$u_y(x, y) = -6xy, \quad v_y(x, y) = 3x^2 - 3y^2.$$

(ii) Ισχύει

$$u_x(x,y) = e^x \cos y - e^y \sin x + y$$
$$u_y(x,y) = -e^y \sin y + e^y \cos x + x.$$

Από τις εξισώσεις Cauchy-Riemann έχουμε $u_x = v_y$ και $u_y = -v_x$, οπότε

$$v_y(x,y) = e^x \cos y - e^y \sin x + y \implies v(x,y) = e^x \sin y - e^y \sin x + \frac{y^2}{2} + h(x)$$

όπου η h είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση του x. Παραγωγίζουμε την v ως προς x,

$$v_x(x,y) = e^x \sin y - e^y \cos x + h'(x)$$

και από την εξίσωση $u_y = -v_x$ παίρνουμε

$$-e^y \sin y + e^y \cos x + x = -e^x \sin y + e^y \cos x - h'(x)$$

δηλαδή $h'(x) = -x$ και άρα $h(x) = -\dfrac{x^2}{2} + c$, όπου $c \in \mathbb{R}$.

Επομένως $v(x,y) = e^x \sin y - e^y \sin x + \dfrac{y^2 - x^2}{2} + c$. Καταλήγουμε ότι οι ζητούμενες συναρτήσεις f είναι ακριβώς οι συναρτήσεις της μορφής

$$f(x+iy) = e^x \cos y + e^y \cos x + xy + i \cdot \left(e^x \sin y - e^y \sin x + \frac{y^2 - x^2}{2} \right) + ic, \quad c \in \mathbb{R}.$$

(Οποιαδήποτε f όπως πιο πάνω ικανοποιεί τις εξισώσεις Cauchy-Riemann και επειδή οι u, v έχουν προφανώς συνεχείς παραγώγους η f είναι παραγωγίσιμη. Αντίστροφα αν η $f = u + iv$ είναι παραγωγίσιμη τότε με την προηγούμενη διαδικασία βρίσκουμε ότι η f έχει την πιο πάνω μορφή.)

Άσκηση 7 (Εξισώσεις Cauchy-Riemann)**.**

(i) Δείξτε ότι η συνάρτηση $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : h(z) = |z|^2 - \overline{z}^2$ είναι παραγωγίσιμη μόνο στο $z = 0$.

(ii) Βρείτε όλες τις ολόμορφες συναρτήσεις $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : f = u + iv$ με $v(x,y) = 2xy + x$ και $f(0) = 1$.

(iii) Να βρεθούν όλα τα $x + iy \in \mathbb{C}$ στα οποία η συνάρτηση $g(x,y) = x^2 + iy^3$ είναι παραγωγίσιμη.

Υποδείξεις.

(i) Έχουμε

$$\begin{aligned} h(x,y) &= x^2 + y^2 - (x - iy)^2 = x^2 + y^2 - (x^2 - 2xiy + i^2 y^2) \\ &= x^2 + y^2 - (x^2 - 2xyi - y^2) \\ &= 2y^2 + 2xyi. \end{aligned}$$

Άρα $u(x,y) = 2y^2$ και $v(x,y) = 2xy$. Επειδή αυτές οι συναρτήσεις έχουν συνεχείς μερικές παραγώγους η h είναι παραγωγίσιμη στο $x + iy$ αν και μόνο αν ικανοποιούνται οι εξισώσεις Cauchy-Riemann σε αυτό το σημείο.

Ισχύει

$$u_x(x,y) = 0, \quad u_y(x,y) = 4y, \quad v_x(x,y) = 2y, \quad v_y(x,y) = 2x.$$

Από την $u_x = v_y$ παίρνουμε $2x = 0$ άρα $x = 0$ και από την $u_y = -v_x$ παίρνουμε $4y = -2y$, απ' όπου προκύπτει $y = 0$. Άρα η h παραγωγίζεται μόνο στο $0 + i \cdot 0 = 0$.

(ii) Όπως στην Άσκηση 6 βρίσκουμε

$$f(x+iy) = x^2 - y^2 - y + c + i \cdot (2xy + x), \quad \text{όπου } c \in \mathbb{R}.$$

Εδώ έχουμε την επιπλέον υπόθεση ότι $f(0) = 1$. Αντικαθιστώντας πιο πάνω βρίσκουμε

$$1 = f(0) = 0 + c + i \cdot 0 \implies c = 1.$$

Άρα $f(x+iy) = x^2 - y^2 - y + 1 + i \cdot (2xy + x)$.

(iii) Πάλι από τις εξισώσεις Cauchy-Riemann λαμβάνουμε $2x = 3y^2$, ισοδύναμα $y = \pm\sqrt{\frac{2}{3} \cdot x}$. Επομένως η g είναι παραγωγίσιμη σε όλα τα σημεία της μορφής

$$x \pm i \cdot \sqrt{\frac{2}{3} \cdot x}, \quad x \geq 0.$$

Σχόλιο για όσες και όσους ενδιαφέρονται. Όπως έχουμε πει στις διαλέξεις αν το $U \subseteq \mathbb{C}$ είναι μη κενό ανοικτό σύνολο και η $g : U \to \mathbb{C}$ είναι παραγωγίσιμη στο U τότε για κάθε $z_0 \in U$ η g αναπτύσσεται σε δυναμοσειρά κέντρου z_0 πάνω σε έναν δίσκο $D(z_0, r)$, όπου $r > 0$. Αν η g του (iii) αναπτυσσόταν σε δυναμοσειρά γύρω από ένα z_0, αφού οι δυναμοσειρές είναι παραγωγίσιμες θα είχαμε ειδικότερα ότι η παράγωγος της g υπάρχει σε όλα τα z που ανήκουν σε έναν δίσκο. Εμείς όμως είδαμε ότι η g παραγωγίζεται μόνο στα σημεία $x \pm i \cdot \sqrt{\frac{2}{3} \cdot x}$ για $x \geq 0$, τα οποία διαγράφουν την παραβολή $y^2 = \frac{2}{3} \cdot x$. Δεδομένου ότι η προηγούμενη παραβολή δεν επικαλύπτει κανέναν δίσκο καταλήγουμε σε άτοπο. Επομένως η g δεν αναπτύσσεται σε δυναμοσειρά. Αυτό δίνει το παράδειγμα μιας συνάρτησης που είναι παραγωγίσιμη σε ένα σύνολο, συγκεκριμένα την

$$g : L \to \mathbb{C} : g(x, y) = x^2 + iy^3, \quad \text{όπου } L = \left\{ x \pm i \cdot \sqrt{\tfrac{2}{3} \cdot x} \;\middle|\; x \geq 0 \right\},$$

η οποία όμως δεν αναπτύσσεται σε δυναμοσειρά. Ο λόγος που αυτό δεν αντιφάσκει στο Θεώρημα ανάπτυξης σε δυναμοσειρά είναι επειδή το πεδίου ορισμού της g δεν είναι ανοικτό σύνολο.

Άσκηση 8. Να υπολογιστούν με βάση τον ορισμό τα ακόλουθα ολοκληρώματα

$$I_1 = \int_{\gamma_1} e^z \, dz, \qquad I_2 = \int_{\gamma_2} \frac{1}{z-1} dz, \qquad I_3 = \int_{\gamma_3} \frac{1}{(z-i)^3} \, dz,$$

όπου

$$\gamma_1(t) = 1 + it, \ t \in [0, 1], \qquad \gamma_2(t) = 1 + e^{it}, \ t \in [0, 2\pi], \qquad \gamma_3(t) = i + e^{-it}, \ t \in [0, \pi/2].$$

Υποδείξεις.
Ορισμός:

$$\int_\gamma f(z) \, dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \, dt,$$

όπου $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ τμηματικά λεία.

Έχουμε

$$I_1 = \int_0^1 e^{1+it} \cdot i \, dt = e \cdot i \cdot \int_0^1 e^{it} \, dt = e \cdot e^{it} \Big|_0^1 = e(e^i - 1),$$

$$I_2 = \int_0^{2\pi} \frac{1}{1 + e^{it} - 1} \cdot i \cdot e^{it} \, dt = i \cdot \int_0^{2\pi} 1 \, dt = 2\pi i,$$

$$I_3 = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{(i + e^{-it} - i)^3} \cdot (-i) \cdot e^{-it} \, dt = -i \cdot \int_0^{\pi/2} \frac{e^{-it}}{e^{-3it}} \, dt = -i \cdot \int_0^{\pi/2} e^{2it} \, dt$$

$$= -i \cdot \frac{e^{2it}}{2i} \Big|_0^{\pi/2} = -\frac{1}{2} \cdot (e^{2i \cdot (\pi/2)} - e^0) = -\frac{1}{2} \cdot (e^{i\pi} - 1) = -\frac{1}{2}(-1 - 1) = 1.$$

Σημείωση για το I_3. Ο ολοκληρωτικός τύπος του Caychy δεν είναι εφαρμόσιμος στο I_3 γιατί η καμπύλη γ_3 δεν είναι κλειστή.

Άσκηση 9. Να υπολογιστούν τα ακόλουθα ολοκληρώματα

$$I_1 = \int_{\gamma_1} \frac{e^{z^2}}{z-2} \, dz, \qquad I_2 = \int_{\gamma_2} \frac{e^{z^2}}{z-2} \, dz,$$

$$I_3 = \int_{\gamma_3} \frac{1}{(z^2+4)^2} \, dz, \qquad I_4 = \int_{\gamma_4} \frac{\cos(z)}{z(z^2+2)} \, dz,$$

όπου

$$\gamma_1(t) = e^{it}, t \in [0, 2\pi], \qquad \gamma_2(t) = 2 + e^{it},\ t \in [0, 2\pi], \qquad \gamma_3(t) = i + \frac{3}{2} \cdot e^{it},\ t \in [0, 2\pi]$$

και η γ_4 είναι η θετικά προσανατολισμένη καμπύλη για την οποία το σύνολο γ_4^* είναι το τετράγωνο με πλευρές μήκους 1 και κέντρο την αρχή των αξόνων.

Υποδείξεις.

Το γ_1^* είναι ο μοναδιαίος κύκλος. Η προς ολοκλήρωση συνάρτηση στο I_1 είναι ολόμορφη στο εσωτερικό του μοναδιαίου κύκλου, επομένως από το Θεώρημα Cauchy-Goursat έχουμε $I_1 = 0$. Στα επόμενα ολοκληρώματα εφαρμόζουμε τον **ολοκληρωτικό τύπο του Cauchy** με παραγώγους:

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\, dz$$

όπου γ απλή, κλειστή, τμηματικά λεία, θετικά προσανατολισμένη καμπύλη, η f είναι ολόμορφη στο εσωτερικό $\text{int}\gamma^*$ της γ και συνεχής στο γ^*, καθώς και $z_0 \in \text{int}\gamma^*$.

Όλες οι καμπύλες αυτής της άσκησης είναι απλές, κλειστές, θετικά προσανατολισμένες και τμηματικά λείες. Σκοπός είναι να εφαρμόσουμε τον ολοκληρωτικό τύπο του Cauchy για κατάλληλα επιλεγμένα f, z_0 και n.

Στο I_2 παίρνουμε $f(z) = e^{z^2}$ και $z_0 = 2 \in \text{int}\gamma_2^*$. Η f είναι ολόμορφη στο $\text{int}\gamma_2^*$ και συνεχής στο γ_2^*. Τότε $I_2 = \displaystyle\int_{\gamma_2} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$ (άρα έχουμε $n = 0$) και με εφαρμογή του ολοκληρωτικού τύπου του Cauchy έχουμε $\dfrac{0!}{2\pi i} \cdot I_2 = f^{(0)}(2)$. Επομένως

$$I_2 = 2\pi i f(2) = 2\pi i e^{2^2} = 2\pi i e^4.$$

Σχετικά με το I_3 παρατηρούμε ότι $z^2 + 4 = 0 \iff z = \pm 2i$, επομένως

$$\frac{1}{(z^2 + 4)^2} = \frac{1}{(z + 2i)^2 \cdot (z - 2i)^2}\ .$$

Το γ_3^* είναι ο κύκλος κέντρου i και ακτίνας $3/2$ επομένως το $2i$ ανήκει στο $\text{int}\gamma_3^*$ ενώ $-2i \notin \text{int}\gamma_3^* \cup \gamma_3^*$, (εδώ βοηθάει να γίνει ένα σχήμα).

Επομένως η $g(z) = \dfrac{1}{(z + 2i)^2}$ είναι ολόμορφη στο $\text{int}\gamma_3^*$ και συνεχής στο γ_3^*. Επιπλέον

$$I_3 = \int_{\gamma_3} \frac{g(z)}{(z - 2i)^2}\, dz.$$

Εφαρμόζουμε τον ολοκληρωτικό τύπο του Cauchy για την g, $z_0 = 2i \in \text{int}\gamma_3^*$, και $n = 1$. Έχουμε

$$\frac{1!}{2\pi i} \cdot I_3 = g^{(1)}(2i) \implies I_3 = 2\pi i g'(2i).$$

Ισχύει $g'(z) - \dfrac{2}{(z + 2i)^3}$, άρα $g'(2i) = -\dfrac{2}{(4i)^3} = -\dfrac{2}{64 \cdot (-1) \cdot i} = \dfrac{1}{32 \cdot i}$. Άρα

$$I_3 = 2\pi i \cdot \frac{1}{32i} = \frac{\pi}{16}\ .$$

Σχετικά με το I_4 έχουμε $z(z^2 + 2) = 0 \iff z = 0$ ή $z = \pm\sqrt{2}i$. Από αυτά τα σημεία μόνο το 0 ανήκει στο $\text{int}\gamma_4^*$ ενώ τα $\pm\sqrt{2}i$ δεν ανήκουν ούτε στο γ_4^*. Επομένως η συνάρτηση $h(z) = \dfrac{\cos(z)}{z^2 + 2}$ είναι ολόμορφη στο $\text{int}\gamma_4^*$ και συνεχής στο γ_4^*. Επιπλέον

$$I_4 = \int_{\gamma_4} \frac{h(z)}{z}\, dz.$$

Εφαρμόζουμε τον ολοκληρωτικό τύπο του Cauchy για την h, $z_0 = 0 \in \text{int}\gamma_4^*$, $n = 0$ και έχουμε

$$\frac{0!}{2\pi i} \cdot I_4 = h^{(0)}(0) \implies I_4 = 2\pi i \cdot h(0) = 2\pi i \cdot \frac{\cos 0}{0^2 + 2} = 2\pi i \cdot \frac{1}{2} = \pi i.$$

Άσκηση 10. Να βρεθούν τα αναπτύγματα Laurent των ακόλουθων συναρτήσεων στους αντίστοιχους δακτυλίους:

$$
\begin{aligned}
f_1(z) &= e^{1/(z-1)}, \quad 0 < |z-1|, \\
f_2(z) &= z^2 \cos(1/z), \quad 0 < |z|, \\
f_3(z) &= \frac{1}{z-2} + \frac{1}{z-3}\,, \quad a)\ 2 < |z| < |3|, \quad b)\ 3 < |z|, \\
f_4(z) &= \frac{3}{(z+1)(z-2)}\,, \quad a)\ 1 < |z| < 2, \quad b)\ 0 < |z-2| < 3.
\end{aligned}
$$

(Στην f_1 εννοείται ότι το κέντρο είναι το 1, όμοια στην f_4 περίπτωση b) το κέντρο είναι το 2, σε όλες τις άλλες περιπτώσεις το κέντρο είναι το 0.)

Υποδείξεις.

Χρησιμοποιούμε τα γνωστά αναπτύγματα:

$$
\frac{1}{1-w} = \sum_{n=0}^{\infty} w^n, \quad \textbf{προσοχή:}\ \text{για}\ |w| < 1, \quad (\text{γεωμετρική σειρά}),
$$

$$
e^w = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{n!}, \quad w \in \mathbb{C},
$$

$$
\cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(-1)^{2n}}{(2n)!} \cdot w^n, \quad w \in \mathbb{C}.
$$

Για την f_1 θεωρούμε $|z-1| > 0$, οπότε για $w = (z-1)^{-1}$ παίρνουμε

$$
e^{1/(z-1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! \cdot (z-1)^n}\,.
$$

Για την f_2 έχουμε για κάθε $|z| > 0$,

$$
\begin{aligned}
f_2(z) &= z^2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \cdot \frac{1}{z^{2n}} \\
&= z^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{2! \cdot z^2} + \frac{1}{4! \cdot z^4} - \frac{1}{6! \cdot z^6} + \dots\right) \\
&= z^2 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{4! \cdot z^2} - \frac{1}{6! \cdot z^4} + \dots \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \cdot \frac{1}{z^{2n-2}}\,.
\end{aligned}
$$

(Οποιαδήποτε από τις τελευταίες δύο ισότητες είναι αποδεκτή απάντηση.)

Σχετικά με την f_3 ασχολούμαστε πρώτα με το a). Θεωρούμε $2 < |z| < 3$. Αναπτύσσουμε τα $1/(z-2)$ και $1/(z-3)$ σε σειρές Laurent (κέντρου 0) και μετά τις προσθέτουμε. Σκοπός μας είναι να εφαρμόσουμε τον τύπο της γεωμετρικής σειράς, οπότε πρέπει κάθε φορά να βρούμε ένα w με $|w| < 1$. Έχουμε $\frac{2}{|z|} < 1$ και $\frac{|z|}{3} < 1$, αυτό υπαγορεύει να χρησιμοποιήσουμε το $w = 2/z$ και το $w = z/3$.

Έχουμε

$$
\frac{1}{z-2} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1 - \frac{2}{z}} = \frac{1}{z} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{z^{n+1}}\,,
$$

όπου στην προτελευταία ισότητα εφαρμόσαμε τον τύπο της γεωμετρικής σειρά στο $w = \frac{2}{z}$.

Επιπλέον
$$\frac{1}{z-3} = -\frac{1}{3-z} = -\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{3}} = -\frac{1}{3}\cdot\sum_{n=0}\left(\frac{z^n}{3^n}\right) = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^{n+1}}\,.$$
Προσθέτοντας τις σειρές παίρνουμε
$$\begin{aligned} f_3(z) &= \frac{1}{z-2}+\frac{1}{z-3} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^{n+1}} \\ &= \cdots + \frac{2^n}{z^{n+1}} + \ldots \frac{2^2}{z^3} + \frac{2}{z^2} + \frac{1}{z} - \frac{1}{3} - \frac{z}{3^2} - \frac{z^2}{3^3} - \cdots - \frac{z^n}{3^{n+1}} - \ldots, \qquad 2<|z|<3. \end{aligned}$$

Στην περίπτωση β) όπου $|z|>3$ ισχύει $3/|z|<1$, οπότε χρησιμοποιούμε το $2/z$ και $3/z$. Σε κάθε περίπτωση έχουμε $2/|z|<3/|z|<1$.

Για τον όρο $1/(z-2)$ εφαρμόζοντας τον τύπο της γεωμετρικής σειράς στο $w=\dfrac{2}{z}$, βρήκαμε πιο πάνω
$$\frac{1}{z-2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^{n+1}}\,.$$
Για τον όρο $1/(z-3)$ εφαρμόζουμε τα ίδια για το $w=\dfrac{3}{z}$,
$$\frac{1}{z-3} = \frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{3}{z}} = \frac{1}{z}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{z^{n+1}}\,.$$
Αθροίζοντας παίρνουμε
$$\begin{aligned} f_3(z) &= \frac{1}{z-2}+\frac{1}{z-3} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{z^{n+1}} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n+3^n}{z^{n+1}}\,, \qquad |z|>3. \end{aligned}$$
Σχετικά με την f_4 διαχωρίζουμε αρχικά το κλάσμα,
$$\frac{3}{(z+1)(z-2)} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z+1}$$
και έπειτα αναπτύσσουμε τα $1/(z-2)$, $1/(z+1)$ όπως κάναμε πιο πάνω με την f_3. Τονίζουμε ότι
$$\frac{1}{z+1} = \frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{z}} = \frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{z}\right))} = \frac{1}{z}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z^{n+1}}$$
για κάθε $|z|>1$.

Απάντηση στην περίπτωση a) $1<|z|<2$: $f_4(z) = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z^{n+1}}$.

Στην περίπτωση b) $0<|z-2|<3$ πρέπει να βρούμε το ανάπτυγμα Laurent με κέντρο το 2. Το $1/(z-2)$ είναι ήδη στη μορφή του αναπτύγματος Laurent με κέντρο το 2, επομένως πρέπει να ασχοληθούμε με το $1/(z+1)$. Παρατηρούμε μάλιστα ότι εδώ δεν χρειάζεται να διαχωρίσουμε το κλάσμα καθώς
$$f_4(z) = \frac{3}{z-2}\cdot\frac{1}{z+1}\,,$$
επομένως αν αναπτύξουμε το $1/(z+1)$ σε σειρά Laurent κέντρου 2 μπορούμε να την πολλαπλασιάσουμε με το $3/(z-2)$ και θα έχουμε πάλι σειρά Laurent κέντρου 2.

Για $0 < |z-2| < 3$ έχουμε

$$\frac{1}{z+1} = \frac{1}{(z-2)+3} = \frac{1}{3-(-(z-2))} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{-(z-2)}{3}}$$
$$= \frac{1}{3} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{(z-2)^n}{3^n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{(z-2)^n}{3^{n+1}} \,,$$

όπου στην προτελευταία ισότητα εφαρμόσαμε τον τύπο της γεωμετρικής σειράς στο $w = -(z-2)/3$, προφανώς ισχύει $|w| < 1$.

Επομένως έχουμε

$$f_4(z) = \frac{3}{z-2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{(z-2)^n}{3^{n+1}}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{(z-2)^{n-1}}{3^n} \,, \quad 0 < |z-2| < 3.$$

Άσκηση 11. Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα

$$I_1 = \int_\gamma e^{1/(z-1)}\, dz, \qquad I_2 = \int_\gamma z^2 \cos(1/z)\, dz,$$

όπου

$$\gamma(t) = 2e^{it},\ t \in [0, 2\pi].$$

Υποδείξεις.

Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Ολοκληρωτικών Υπολοίπων σύμφωνα με το οποίο το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα είναι $2\pi i$-φορές το άθροισμα των ολοκληρωτικών υπολοίπων στα ανώμαλα σημεία που βρίσκονται στο εσωτερικό της καμπύλης. Συγκεκριμένα αν γ είναι μια απλή, κλειστή, θετικά προσανατολισμένη, τμηματικά λεία καμπύλη, $z_1, \ldots, z_n \in \text{int}\gamma^*$ και η f είναι μια συνάρτηση που είναι ολόμορφη στο $\text{int}\gamma^* \setminus \{z_1, \ldots, z_n\}$ και συνεχής στο γ^* τότε

$$\int_\gamma f(z)\, dz = 2\pi i \cdot \sum_{k=1}^{n} \text{Res}(f, z_k).$$

Υπενθυμίζουμε ότι τα πιο πάνω σημεία $z_1, \ldots, z_n$ λέγονται **ανώμαλα σημεία** της f και πως το $\text{Res}(f, z_k)$ (δηλαδή το ολοκληρωτικό υπόλοιπο στο σημείο z_k) είναι ο συντελεστής του $(z-z_k)^{-1}$ στο ανάπτυγμα Laurent της f **με κέντρο το $\mathbf{z_k}$**.

Στη συγκεκριμένη άσκηση οι προς ολοκλήρωση συναρτήσεις είναι οι f_1 και f_2 της Άσκησης 10. Αυτές έχουν μόνο ένα ανώμαλο σημείο, συγκεκριμένα η πρώτη το $z_1 = 1$ και η δεύτερη το $w_1 = 0$. Τα z_1, w_1 βρίσκονται στο $\text{int}\gamma^*$. Επομένως αρκεί να βρούμε το ολοκληρωτικό υπόλοιπο της f_1 στο 1 και της f_2 στο 0.

Τα αναπτύγματα Laurent των f_1, f_2 με κέντρα τα σημεία 1 και 0 αντίστοιχα έχουν υπολογιστεί στην Άσκηση 10:

$$f_1(z) = e^{1/(z-1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! \cdot (z-1)^n}, \quad 0 < |z-1|,$$

$$f_2(z) = z^2 \cos(1/z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \cdot \frac{1}{z^{2n-2}}, \quad 0 < |z|.$$

Ο συντελεστής του $(z-1)^{-1}$ στο πρώτο ανάπτυγμα λαμβάνεται για $n = 1$ οπότε $\text{Res}(f_1, 1) = \dfrac{1}{1!} = 1$ και άρα

$$I_1 = \int_\gamma e^{1/(z-1)}\, dz = 2\pi i \cdot \text{Res}(f_1, 1) = 2\pi i \cdot 1 = 2\pi i.$$

Στο δεύτερο ανάπτυγμα δεν εμφανίζεται το z^{-1}, δηλαδή ο συντελεστής του z^{-1} είναι 0. Συνεπώς $\text{Res}(f_2, 0) = 0$ και άρα

$$I_2 = \int_\gamma z^2 \cos(1/z)\, dz = 2\pi i \cdot \text{Res}(f_2, 0) = 2\pi i \cdot 0 = 0.$$

Άσκηση 12. Να προσδιοριστεί η τάξη των πόλων των πιο κάτω συναρτήσεων,

$$f_1(z) = \frac{z}{(z+2)^2}\,, \quad z \neq -2,$$

$$f_2(z) = \frac{e^z - 1}{z^4}\,, \quad 0 < |z| < 8,$$

$$f_3(z) = \frac{1}{\sin z}\,, \quad 0 < |z| < 1.$$

Μπορείτε να πάρετε δεδομένο ότι η εξίσωση $\sin z = 0$ έχει μόνο πραγματικές ρίζες.

Υποδείξεις.

Αν έχουμε ένα ανοικτό $U \subseteq \mathbb{C}$, $z_0 \in U$ και μια ολόμορφη $f : U \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ λέμε ότι το z_0 είναι **πόλος της** f αν $\lim_{z \to z_0} |f(z)| = \infty$. Τα εξής είναι ισοδύναμα:

(α) Το z_0 είναι πόλος της f.

(β) Το ανάπτυγμα Laurent της f με κέντρο το z_0 έχει τη μορφή

$$\frac{a_{-m}}{(z-z_0)^m} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \ldots$$

με $a_{-m} \neq 0$, όπου m θετικός φυσικός.

(γ) Υπάρχει ολόμορφη $h : U \to \mathbb{C}$ και θετικός φυσικός m με $f(z) = \dfrac{h(z)}{(z-z_0)^m}$ για κάθε $z \in U \setminus \{z_0\}$ και $h(z_0) \neq 0$.

Το προηγούμενο m είναι μοναδικό και ονομάζεται **τάξη του πόλου της** f.

Η f_1 έχει μόνο έναν πόλο, το $z = -2$. Βλέπουμε επίσης ότι $f_1(z) = \dfrac{h(z)}{(z-(-2))^2}$ όπου $h(z) = z$, $z \in \mathbb{C}$. Επιπλέον $h(-2) = -2 \neq 0$, επομένως με εφαρμογή του γ) το -2 είναι πόλος της f_1 τάξης 2.

Σχετικά με την f_2 έχουμε μόνο ένα ανώμαλο σημείο, το 0. Χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα της e^z υπολογίζουμε:

$$\begin{aligned} f_2(z) &= \frac{1}{z^4} \cdot \left(1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots - 1\right) \\ &= \frac{1}{z^4} \cdot \left(z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^5}{5!} + \ldots\right) \\ &= \frac{1}{z^3} + \frac{1}{2! \cdot z^2} + \frac{1}{3! \cdot z} + \frac{1}{4!} + \frac{z}{5!} + \ldots . \end{aligned}$$

Με εφαρμογή του β) βλέπουμε ότι το 0 είναι πόλος της f_2 τάξης 3.

Σχετικά με την f_3 παίρνουμε δεδομένο ότι η εξίσωση $\sin z = 0$ έχει μόνο πραγματικές ρίζες. Η μόνη ρίζα z με $|z| < 1$ είναι η $z = 0$. Άρα η f_3 έχει μόνο ένα ανώμαλο σημείο, το 0.

Η ιδέα είναι να παρατηρήσουμε ότι

$$f_3(z) = \frac{1}{\sin z} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{\frac{\sin z}{z}} = \frac{\frac{z}{\sin z}}{z}$$

και έπειτα να δείξουμε ότι η συνάρτηση $z \in U \setminus \{0\} \mapsto \dfrac{z}{\sin z}$ έχει ολόμορφη επέκταση στο $z = 0$, η οποία μάλιστα έχει μη μηδενική τιμή στο $z = 0$. Από το (γ) πιο πάνω προκύπτει ότι το 0 είναι πόλος της f_3 τάξης 1.

Γνωρίζουμε ότι $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$, μπορούμε να δείξουμε το ίδιο και για το όριο στους μιγαδικούς χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα της $\sin z$. Για κάθε $z\neq 0$ ισχύει

$$\frac{1}{z}\cdot\left(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\dots\right)=1-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}-\dots\ \overset{z\to 0}{\longrightarrow}\ 1.$$

Άρα $\lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{z}=1$ και επομένως $\lim_{z\to 0}\frac{z}{\sin z}=1$. Παίρνουμε για U τον ανοικτό μοναδιαίο δίσκο και θεωρούμε τη συνάρτηση $g:U\setminus\{0\}\to\mathbb{C}:g(z)=\frac{z}{\sin z}$ έτσι που

$$f_3(z)=\frac{g(z)}{z},\quad \text{για κάθε } z\in U\setminus\{0\}.$$

Η g είναι ολόμορφη και $\lim_{z\to 0}g(z)=1$, επομένως από γνωστό Θεώρημα το 0 είναι αιρώμενο ανώμαλο σημείο της g, δηλαδή υπάρχει ολόμορφη επέκταση $\tilde{g}:U\to\mathbb{C}$ της g. Επειδή η $\tilde{g}$ είναι συνεχής (ως ολόμορφη) θα έχουμε

$$\tilde{g}(0)=\lim_{z\to 0}\tilde{g}(z)=\lim_{z\to 0}g(z)=1.$$

Εφόσον $f_3(z)=\frac{g(z)}{z}=\frac{\tilde{g}(z)}{z}$ για κάθε $z\in U\setminus\{0\}$ και $\tilde{g}(0)\neq 0$ προκύπτει από το (γ) ότι το 0 είναι πόλος της f_3 τάξης 1.

Άσκηση 13. Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα

$$I_1=\int_\gamma \sin(2/z)\,dz,\qquad I_2=\int_\delta\frac{z}{(z+2)^2}\,dz,\qquad I_3=\int_\gamma\frac{e^z-1}{z^4}\,dz,$$

όπου

$$\gamma(t)=e^{it},\ t\in[0,2\pi],\qquad \delta(t)=3e^{it},\ t\in[0,2\pi].$$

Υποδείξεις.

Το I_1 υπολογίζεται με τη βοήθεια του Θεωρήματος Ολοκληρωτικών Υπολοίπων. Έχουμε μόνο ένα ανώμαλο σημείο το $z=0$, το οποίο βρίσκεται στο $\mathrm{int}\gamma^*$. Το ανάπτυγμα Laurent της $z\mapsto\sin(2/z)$ κέντρου 0 είναι το

$$\sin(2/z)=\frac{2}{z}-\frac{1}{3!}\cdot\left(\frac{2}{z}\right)^3+\frac{1}{5!}\cdot\left(\frac{2}{z}\right)^5-\dots.$$

Επομένως το ολοκληρωτικό υπόλοιπο στο 0 είναι ίσο με 2 και άρα $I_1=2\pi i\cdot 2=4\pi i$.

Το I_2 μπορεί να υπολογιστεί με δύο τρόπους. Ο ένας είναι με εφαρμογή του Ολοκληρωτικού τύπου του Cauchy για $f(z)=z$, $z_0=-2$ και $n=1$ (παρατηρούμε ότι το -2 βρίσκεται στο εσωτερικό της δ):

$$I_2=\frac{2\pi i}{1!}\cdot f'(-2)=2\pi i\cdot 1=2\pi i.$$

Ο δεύτερος τρόπος είναι με εφαρμογή του Θεωρήματος Ολοκληρωτικών Υπολοίπων. Στην Άσκηση 12 είδαμε ότι το -2 είναι πόλος τάξης 2 της συνάρτησης $f_2(z)=\frac{z}{(z+2)^2}$, $z\neq -2$.

Υπενθυμίζουμε τον **τύπο υπολογισμού των ολοκληρωτικών υπολοίπων σε πόλους**:

$$\mathrm{Res}(f_2,z_0)=\frac{1}{(m-1)!}\cdot\lim_{z\to z_0}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\ [(z-z_0)^m\cdot f_2(z)]$$

όπου m είναι η τάξη του πόλου της f_2 στο z_0.

Για $m=2$ και $z_0=-2$ παίρνουμε $(z-z_0)^m\cdot f_2(z)=(z+2)^2\cdot f_2(z)=z$

$$\mathrm{Res}(f_2,z_0)=\frac{1}{1!}\cdot\lim_{z\to -2}\frac{d}{dz}\,z=1\cdot 1=1.$$

Άρα από το Θεώρημα Ολοκληρωτικών Υπολοίπων $I_2=2\pi i\cdot\mathrm{Res}(f_2,-2)=2\pi i\cdot 1=2\pi i$.

Το I_3 υπολογίζεται επίσης με διαφορετικούς τρόπους. Ένας τρόπος είναι με τον Ολοκληρωτικό τύπο του Cauchy (παρατηρούμε ότι το 0 βρίσκεται στο εσωτερικό της γ):

$$I_3=\frac{2\pi i}{3!}\cdot g^{(3)}(0),\qquad \text{όπου } g(z)=e^z-1.$$

Τότε $g^{(3)}(z) = e^z$ άρα $g^3(0) = 1$ και $I_3 = \dfrac{2\pi i}{3!} \cdot 1 = \dfrac{\pi i}{3}$.

Άλλος τρόπος υπολογισμού του I_3 είναι να αναπτύξουμε την $z \mapsto \dfrac{e^z - 1}{z^4}$ σε σειρά Laurent κέντρου 0 (αυτό έχει γίνει στην Άσκηση 12) και να παρατηρήσουμε ότι ο συντελεστή του z^{-1} είναι το $\dfrac{1}{3!}$. Επομένως από το Θεώρημα Ολοκληρωτικών Υπολοίπων $I_2 = 2\pi i \cdot \dfrac{1}{3!} = \dfrac{\pi i}{3}$.