ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΕΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΝΑΥΠΗΓΩΝ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΟ ΕΤΟΣ 2022-23 - ΕΞΑΜΗΝΟ 3ο

ΣΥΝΗΘΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ& ΜΙΓΑΔΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ (Συνήθεις διαφορικές εξισώσεις)

Καταληκτική ημερομηνία παράδοσης: 31/1/2023

Για τις ασκήσεις 1 έως και 11, να βρεθεί η πλήρης λύση των διαφορικών εξισώσεων. Επίσης, αν δίνονται αρχικές συνθήκες να βρεθεί και η λύση στο Π.Α.Τ.

1. $(x^2y + xy - y) + (x^2y - 2x^2)y' = 0.$

Απάντηση: $y + ln|xy^{-2}| + x + \frac{1}{x} = c,\ x \neq 0$ και $y \neq 0$ και $y(x) = 0.$

2. $(2yx + x)dx + (x^2 - y)\mathrm{d}y = 0,\ y(2) = 0.$

Απάντηση: Γενικό ολοκλήρωμα: $x^2y + \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} = c,\ c\epsilon\mathbb{R}.$

Λύση στο Π.Α.Τ.: $y = x^2 - \sqrt{x^4 + x^2 - 4}$, με $x^4 + x^2 - 4 > 0 \Rightarrow x > \sqrt{\frac{-1+\sqrt{17}}{2}} \approx 1.25.$

3. $y' = \frac{2y+\sqrt{x^2-y^2}}{2x}.$

Απάντηση: $2arcsin\left(\frac{y}{x}\right) - ln|x| = c,\ x \neq 0, c\epsilon\mathbb{R}.$

4. $(3x^2y + 2xy + y^3)dx + (x^2 + y^2)dy = 0.$

Απάντηση: $e^{3x}y(x^2 + \frac{y^2}{3}) = c, c\epsilon\mathbb{R}.$

5. $y' + 2xy - 2x^3y^3 = 0,\ y(0) = -1.$

Απάντηση:

Γενική λύση:

$$y(x) = \pm\left(ce^{2x^2} + x^2 + \frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}},\ y \neq 0,\ x\epsilon\mathbb{R}, ce^{2x^2} + x^2 + \frac{1}{2} > 0, c\epsilon\mathbb{R}.$$

Λύση στο Π.Α.Τ. $y(x) = -\left(\frac{1}{2}e^{2x^2} + x^2 + \frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}, x\epsilon\mathbb{R}$.

6. $(y-1)^2dx + (xy - 2x + \frac{x-1}{y})dy = 0.$

Απάντηση: $xy + \frac{1}{y-1} = c,\ y \neq 0, 1$ και $y(x) = 1.$

7. $y' = \frac{2cos^2x - sin^2x + y^2}{2cosx}$, αν $y_1(x) = sinx$είναι μία λύση της.

Απάντηση: $y = sinx + (c\ cosx - \frac{1}{2}sinx)^{-1}.$

8. $y = xy' + y' - (y')^2$

Απάντηση: Γενική λύση: $y(x) = xc + c - c^2, x\epsilon\mathbb{R},\ c$ αυθαίρετη σταθερά.

Ιδιάζουσα λύση: $y(x) = \frac{(x+1)^2}{4},\ x\epsilon\mathbb{R}.$

9. Δίνεται η διαφορική εξίσωση $y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0$. Κάνοντας την αλλαγή της ανεξάρτητης μεταβλητής, $z = u(x)$, να δειχθεί ότι η δοθείσα εξίσωση μετασχηματίζεται σε μία ΔΕ με σταθερούς συντελεστές, εάν επιλέξουμε:
$z = u(x) = \int [q(x)]^{\frac{1}{2}} dx$ με την προϋπόθεση ότι: $\frac{z''+p(x)z'}{q(x)} = \frac{q'(x)+2p(x)q(x)}{2[q(x)]^{3/2}} = c$
όπου c σταθερά.
Χρησιμοποιώντας το παραπάνω, αποτέλεσμα να μετασχηματισθεί η ΔΕ:

$$xy''(x) + (x^2 - 1)y'(x) + x^3 y(x) = 0$$

σε μία ΔΕ με σταθερούς συντελεστές και να βρεθεί η γενική λύση της δοθείσης ΔΕ.
Απάντηση: $y(x) = e^{-\frac{x^2}{4}}\left\{c_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{4}x^2\right) + c_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{4}x^2\right)\right\}$.

10. Δίνεται η διαφορική εξίσωση:
$xy''(x) - (x + N)y'(x) + Ny(x) = 0$, όπου N θετικός ακέραιος αριθμός.
(α) Να δειχθεί ότι μία λύση αυτής είναι η $y_1(x) = e^x$.
(β) Να δειχθεί ότι μία δεύτερη λύση έχει τη μορφή $y_2(x) = ce^x \int x^N e^{-x} dx$.
(γ) Να προσδιορισθεί η $y_2(x)$ για $N = 1$ και $N = 2$ και να βεβαιωθείτε ότι για $c = -\frac{1}{N!}$ η $y_2(x)$ είναι ακριβώς οι πρώτοι $N + 1$ όροι του αναπτύγματος Taylor της συνάρτησης e^x.

11. Δίνεται η ΔΕ:
$(1 - x)y''(x) + xy'(x) - y(x) = 2(x - 1)^2 e^{-x}, \quad 0 < x < 1$. Αν $y_1(x) = e^x$ είναι μία λύση της αντίστοιχης ομογενούς ΔΕ να βρεθεί η γενική λύση της μη ομογενούς ΔΕ.
Απάντηση: $y(x) = c_1 e^x + c_2 x - xe^{-x} + \frac{1}{2}e^{-x}$.

12. Να δειχθεί ότι η λύση στο Π.Α.Τ: $y''(t) + 4y(t) = g(t),\ y(0) = y_o, y'(0) = y_1$είναι $y(t) = \frac{1}{2}\int_0^t g(s)sin2(t - s)ds + y_o cos2t + y_1 sin2t$.

13. Για τις παρακάτω ΔΕ να βρεθεί η γενική λύση της αντίστοιχης ομογενούς και να δοθεί η μορφή της ειδικής λύσης ώστε να εφαρμόζεται η μέθοδος των προσδιοριστέων συντελεστών. (Να μην υπολογίσετε τους συντελεστές).
(a) $y'' - 5y' + 6y = e^{3x}(3x + 4) + e^{2x}sin3x$.
(b) $y'' + 2y' + 2y = 4e^{-x}x^2 sinx + 3e^{-x} + e^{-x}cos2x$.
(c) $y'' + 4y' + 4y = 4e^{-2x}cosx + 5xe^{-2x}$.

14. Να βρεθεί η γενική λύση της ΔΕ: $x^2 y'' + xy' + 4y = cos(2lnx), x > 0$.
Απάντηση: $y(x) = c_1 cos(2lnx) + c_2 sin(2lnx) + \frac{1}{4}(lnx)sin(2lnx)$.

15. Με την χρήση των δυναμοσειρών να λυθεί το πρόβλημα αρχικών συνθηκών:
$y'' + xy' + 2y = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1$.
Απάντηση: $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2^n n!} = x\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^n n!} = x\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{x^2}{2}\right)^n}{n!} = xe^{-\frac{x^2}{2}}$.

16. (α) Να βρεθεί η γενική λύση της ΔΕ: $y'' + xy' - y = 0$, με τη μέθοδο των δυναμοσειρών και να δειχθεί ότι η μία λύση της είναι πολυωνυμική. (β) Να χρησιμοποιήσετε τη λύση αυτή για να βρείτε τη δεύτερη λύση με τη μέθοδο υποβιβασμού

τάξης και να βεβαιωθείτε ότι η αυτή η λύση είναι η συνάρτηση $y_1(x)$ που προσδιορίσατε στο ερώτημα (α). [Υπόδειξη: Το ολοκλήρωμα:$-\int x^{-2}\, e^{-\frac{x^2}{2}}dx =$
$-\int x^{-2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{2^n n!}dx = \int \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^{2n-2}}{2^n n!}dx = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2^n n!}\int x^{2n-2}dx =$
$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^{2n-1}}{2^n n!\,(2n-1)}$].
Απάντηση: (β) $y(x) = a_o y_1(x) + a_1 y_2(x) = a_o\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^{2n}}{2^n n!\,(2n-1)} + a_1 x.$

17. Να βρεθεί η γενική λύση της ΔΕ: $(1+x^2)y'' + 2xy' - 2y = 0$ και να εκφρασθεί συναρτήσει στοιχειωδών συναρτήσεων.[Υπόδειξη: $\tan^{-1}x = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m x^{2m+1}}{2m+1},\ |x| \le 1$].
Απάντηση: $y(x) = a_o(1 + x\tan^{-1}x) + a_1 x,\ |x| \le 1.$

18. Να λυθεί το Π.Α.Τ. $(1-x^2)y'' - 2xy' + 30y = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1$ και να βρεθεί το πολυώνυμο Legendre $P_5(x)$.
Απάντηση: $y(x) = x - \frac{14}{3}x^3 + \frac{42}{10}x^5,\quad P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x).$

19. Να δειχθεί ότι το $x_o = 0$ είναι κανονικό ιδιάζον σημείο της διαφορικής εξίσωσης: $2xy'' + y' + xy = 0$. Να βρεθεί η δείκτρια εξίσωση, οι εκθέτες ιδιομορφίας και η αναδρομική σχέση.
Απάντηση:
$f(r)a_o = 0 \Rightarrow \left(r(r-1) + \frac{1}{2}r\right)a_o = \left(r - \frac{1}{2}\right)ra_o = 0 \Rightarrow r_1 = \frac{1}{2}, r_2 = 0$, διότι $a_o \neq 0$,
$f(r+1)a_1 = 0 \Rightarrow (r+1)\left(r + 1 - \frac{1}{2}\right)a_1 = 0 \Rightarrow a_1(r_1) = a_1(r_2) = 0,$
$(r+n)\left(r + n - \frac{1}{2}\right)a_n = -\frac{1}{2}a_{n-2},\ n \ge 2.$

20. (α) Να δειχθεί ότι η διαφορική εξίσωση: $x^2y'' - 4xy' + (x^2+6)y = 0$ έχει κανονικό ιδιάζον σημείο στη θέση $x = 0$. (β) Να βρεθεί η δείκτρια εξίσωση και οι εκθέτες ιδιομορφίας. (γ) Να δειχθεί ότι για τον μεγαλύτερο δείκτη ιδιομορφίας, r_1, ο συντελεστής $a_1(r_1) = 0$, ενώ για τον μικρότερο δείκτη ιδιομορφίας, r_2, ο συντελεστής $a_1(r_2)$ είναι αυθαίρετος. (δ) Να βρεθεί η αναδρομική σχέση. (ε) Να προσδιορισθεί η λύση που αντιστοιχεί στον μεγαλύτερο δείκτη ιδιομορφίας. (ζ) Εφαρμόζοντας την αναδρομική σχέση για τον μικρότερο δείκτη ιδιομορφίας και επιλέγοντας $a_1(r_2) = 0$, να προσδιορισθεί η 2η λύση της ΔΕ. (η) Να διαπιστώσετε ότι με $a_1(r_2)$ αυθαίρετο θα πάρετε τη λύση που προσδιορίσατε στο ερώτημα (ε).
Απάντηση: (β) $f(r) = r(r-1) - 4r + 6 = 0 \Rightarrow r^2 - 5r + 9 = 0 \Rightarrow r_1 = 3, r_2 = 2$
(γ) $f(r_1+1)a_1(r_1) = 0 \Rightarrow a_1(r_1) = 0, f(r_2+1)a_1(r_2) = 0 \Rightarrow a_1(r_1)$ αυθαίρετο.
(δ) $f(r+n)a_n = -a_{n-2},\ n \ge 2.$
(ε) $y_1(x) = x^3\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)!} = x^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x^2 sinx.$
(ζ) $y_2(x) = x^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = x^2 cosx.$
(η) $y(x) = a_o x^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + a_1 x^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = a_o x^2 cosx + a_1 x^2 sinx.$

21. (α) Να δειχθεί ότι το $x_o = 0$ είναι κανονικό ιδιάζον σημείο της διαφορικής εξίσωσης: $x^2y''(x) + (x^2 - 5x)y'(x) - (2x - 9)y(x) = 0, x > 0$ και να βρεθεί η δείκτρια εξίσωση, οι δείκτες ιδιομορφίας και η αναδρομική σχέση. (β) Στη συνέχεια να βρεθεί μία λύση της, $y_1(x)$, συναρτήσει στοιχειωδών συναρτήσεων, η οποία ικανοποιεί την συνθήκη: $\lim_{x\to 0} y_1(x) = 0$.

<u>Απάντηση</u>: (α) $f(r) = r(r-1) - 5r + 9 = 0 \Rightarrow r_1 = r_2 = 3$.

$f(r+n)a_n = (r+n-3)^2 a_n = -(r+n-3)a_{n-1}, \qquad n \geq 1$

(β) $y_1(x) = x^3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!} = x^3 e^{-x}$.

[Η ΔΕ έχει διπλό δείκτη ιδιομορφίας, επομένως η 2η λύση περιλαμβάνει λογαριθμικό όρο και καθίσταται μη φραγμένη όταν $x \to 0$].

22. (α) Να δειχθεί ότι το $x_o = 0$ είναι κανονικό ιδιάζον σημείο της διαφορικής εξίσωσης: $x^2(1-x)y'' - 3x^2y' - xy = 0, \ \ x > 0$ και να βρεθεί η δείκτρια εξίσωση, οι δείκτες ιδιομορφίας και η αναδρομική σχέση. (β) Να βρεθεί η λύση, $y_1(x)$, που αντιστοιχεί στον μεγαλύτερο δείκτη ιδιομορφίας. (β) Να δειχθεί ότι η αναδρομική σχέση για τον μικρότερο δείκτη ιδιομορφίας οδηγεί σε άτοπο. (γ) Στη συνέχεια να εφαρμοστεί η μέθοδος υποβιβασμού τάξης για να βρεθεί η 2η λύση, $y_2(x)$.

<u>Απάντηση</u>: (α) $f(r) = r(r-1) = 0 \Rightarrow r_1 = 1, r_2 = 0$.

$f(r+n)a_n = (r+n)(r+n-1)a_n = (r+n)^2 a_{n-1}$.

(β) $y_1(x) = x\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n = \frac{x}{(1-x)^2}$.

(γ) $y_2(x) = \frac{1}{(1-x)^2} + \frac{x\ln x}{(1-x)^2}$.