<u>Α. Λύσεις υπό μορφή δυναμοσειράς στη περιοχή ομαλού σημείου</u>

Το επόμενο θεώρημα εξασφαλίζει την ύπαρξη λύσεων της ΔΕ

$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0,$ (1)

με τη χρήση των δυναμοσειρών καθώς και τον προσδιορισμό ενός ελαχίστου διαστήματος σύγκλισης της λύσης σειράς σε ομαλά σημεία.

<u>Θεώρημα:</u> Αν το σημείο x_o είναι <u>ομαλό σημείο</u> τη ΔΕ (1),(οι συναρτήσεις $p(x)$ και $q(x)$ είναι αναλυτικές συναρτήσεις στο x_o, δηλαδή αναπτύσσονται σε δυναμοσειρές με κέντρο το x_o τότε η γενική λύση της (1) είναι: $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_o)^n$. (2)
Οι συντελεστές της λύσης a_n μπορούν να προσδιορισθούν συναρτήσει των a_o και a_1, οπότε η γενική λύση είναι της μορφής: $y(x) = a_o y_1(x) + a_1 y_2(x),$ (3)
όπου a_o, a_1αυθαίρετες σταθερές και y_1, y_2 γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις υπό μορφή δυναμοσειράς. Αν δίνονται αρχικές συνθήκες:
$y(x_o) = y_o, y'(x_o) = y_1$ τότε $a_o = y_o,\quad a_1 = y_1.$
[$y(x) = a_o + a_1(x - x_o) + a_2(x - x_o)^2 + \cdots + a_n(x - x_o)^n + \cdots$, για $x = x_o,\ y(x_o) = a_o$,
$y'(x) = a_1 + 2a_2(x - x_o) + \cdots + na_n(x - x_o)^{n-1} + \cdots$, για $x = x_o,\ y'(x_o) = a_1$]
Επί πλέον, η ακτίνα σύγκλισης των δυναμοσειρών y_1, y_2 είναι τουλάχιστον ίση με την ελάχιστη ακτίνα σύγκλισης των δυναμοσειρών για τα p και q.
Από τη τελευταία πρόταση του θεωρήματος, μπορούμε να βρούμε ένα κάτω φράγμα για τις ακτίνες σύγκλισης των λύσεων της ΔΕ (1) υπό μορφή δυναμοσειράς με κέντρο το x_o, αρκεί να προσδιορίσουμε την ακτίνα σύγκλισης των δυναμοσειρών για τα $p(x)$ και $q(x)$.

Αυτό μπορεί να γίνει με δύο διαφορετικούς τρόπους:
<u>1ος τρόπος</u>: Να υπολογίσουμε τις δυναμοσειρές για τα $p(x)$ και $q(x)$ και να εφαρμόσουμε ακριβή κριτήρια-κυρίως το κριτήριο του λόγου (θεώρημα 2)-για να βρούμε την ακτίνα σύγκλισης και το διάστημα σύγκλισης των δυναμοσειρών.
<u>2ος τρόπος</u>: . Όταν η διαφορική εξίσωση είναι της μορφής $P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0$, όπου $P(x), Q(x), R(x)$ είναι πολυώνυμα, οι συναρτήσεις $p(x) = \frac{Q(x)}{P(x)}$ και $q(x) = \frac{R(x)}{P(x)}$ είναι ρητές συναρτήσεις. Σε αυτή τη περίπτωση, εάν οι συντελεστές είναι αναλυτικές στο σημείο x_o, ($P(x_o) \neq 0$) υπάρχει ένας ευκολότερος τρόπος υπολογισμού της ακτίνας σύγκλισης των δυναμοσειρών με κέντρο το x_o για τα $p(x)$ και $q(x)$. Αποδεικνύεται από τη θεωρία των μιγαδικών συναρτήσεων ότι ο λόγος δύο τέτοιων πολυωνύμων, έστω $\frac{Q(x)}{P(x)}$, διαθέτει συγκλίνον ανάπτυγμα σε δυναμοσειρά γύρω από το x_o για το οποίο $P(x_o) \neq 0$. Επί πλέον, έχοντας απλοποιήσει τυχόν κοινούς όρους των $Q(x)$ και $P(x)$, η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς για το $\frac{Q(x)}{P(x)}$ γύρω από το σημείο x_o είναι ίση με την απόσταση του σημείου x_o από την πλησιέστερη ρίζα, συμπεριλαμβανομένων και των μιγαδικών ριζών, του παρονομαστή.
<u>Παράδειγμα</u>: Να βρεθεί ένα κάτω φράγμα για την ακτίνα σύγκλισης των λύσεων υπό μορφή δυναμοσειράς γύρω από το δοθέν σημείο για την διαφορική εξίσωση:
$(1 + x^3)\, y'' + xy' + 4y = 0,\ \ (i)\ x_o = 0,\ \ (ii)\ x_o = 2$

Ο συντελεστής $p(x) = \frac{x}{1+x^3}$ και $1 + x^3 = 0 \Rightarrow x_1 = -1, x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$

(i) Η απόσταση του $x_o = 0$, από τις ρίζες $x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$ είναι $\left|\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right| = 1$.

(ii) Η απόσταση του $x_o = 2$, από τις ρίζες $x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$ είναι $\left|2 - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right| = \sqrt{3}$.

Επομένως, στην πρώτη περίπτωση, σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$ συγκλίνει τουλάχιστον για $|x| < 1$, ενώ στη δεύτερη περίπτωση η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, (x-2)^n$ συγκλίνει τουλάχιστον για $|x-2| < \sqrt{3}$, και το διάστημα σύγκλισης είναι τουλάχιστον: $2 - \sqrt{3} < x < 2 + \sqrt{3}$.

Θα εφαρμόσουμε το παραπάνω θεώρημα για την επίλυση διαφορικών εξισώσεων στην περιοχή ομαλού σημείου.

<u>Παράδειγμα 1</u>: Να λυθεί η ΔΕ:

$$y'' + y = 0, \quad -\infty < x < \infty \tag{1.1}$$

Όπως γνωρίζουμε οι συναρτήσεις $cosx$ και $sinx$ αποτελούν ένα θεμελιώδες σύνολο λύσεων της διαφορικής εξίσωσης και δεν χρειάζεται η μέθοδος των δυναμοσειρών για την επίλυση. Ωστόσο, το συγκεκριμένο παράδειγμα εξηγεί την μέθοδο των δυναμοσειρών σε μία σχετικά απλή περίπτωση.

Για την συγκεκριμένη εξίσωση, $p(x) = 0, q(x) = 1$, οπότε κάθε σημείο είναι ομαλό.

Θα αναζητήσουμε λύσεις της ΔΕ στην περιοχή του μηδενός ($x_o = 0$). Σύμφωνα με το θεώρημα η διαφορική εξίσωση επιδέχεται λύσεις υπό μορφή δυναμοσειράς:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n = a_o + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots \tag{1.2}$$

η οποίες προφανώς συγκλίνουν για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Παραγωγίζοντας την (1.2)

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n\, x^{n-1}, \quad y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n\, x^{n-2}$$

και αντικαθιστώντας στην (1.1) λαμβάνουμε

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n\, x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n = 0 \tag{1.3}$$

Για να συσχετίσουμε τις δύο σειρές θα πρέπει να μετατοπίσουμε το δείκτη σε μία από αυτές έτσι ώστε να έχουμε τις ίδιες δυνάμεις του x . Έτσι στο πρώτο άθροισμα μετατοπίζουμε τον δείκτη άθροισης κάνοντας την αντικατάσταση του $n - 2$ με κ (οπότε όταν το $n = 2, \kappa = 0$) και γίνεται $\sum_{\kappa=0}^{\infty} (\kappa+2)(\kappa+1) a_{\kappa+2}\, x^{\kappa}$. Θέτοντας ξανά όπου $\kappa = n$ έχουμε

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2}\, x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n = 0 \Rightarrow$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} \{(n+2)(n+1) a_{n+2} + a_n\} x^n = 0.$$

Προκειμένου να ικανοποιείται η τελευταία σχέση για όλα τα x, ο συντελεστής κάθε δύναμης του x πρέπει να είναι μηδενικός. Έχουμε λοιπόν

$$a_{n+2} = -\frac{a_n}{(n+1)(n+2)}, \quad n = 0,1,2 \ldots \tag{1.4}$$

Η σχέση (1.4) είναι η ***<u>αναδρομική σχέση</u>*** η οποία προσδιορίζει κάθε συντελεστή a_{n+2} για $n = 0,1,2, \ldots$ με τον κατά δύο βήματα προηγούμενό του συντελεστή, δηλαδή είναι μία αναδρομική σχέση με βήμα 2.

Έτσι το a_o προσδιορίζει το a_2 που με τη σειρά του προσδιορίζει το a_4…, δηλαδή όλα τα a_{2n} προσδιορίζονται από το a_o.

Το a_1 προσδιορίζει το a_3 που με τη σειρά του προσδιορίζει το a_5…, δηλαδή όλα τα a_{2n+1} προσδιορίζονται από το a_1.

Για να πάρουμε του συντελεστές a_{2n}, θέτουμε στην αναδρομική σχέση όπου $n = 2\kappa - 2$, Οπότε η (1.4) γίνεται: $a_{2\kappa} = -\frac{a_{2\kappa-2}}{(2\kappa-1)(2\kappa)}, \quad \kappa = 1,2,3 \ldots$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Για } \kappa = 1, \quad a_2 = -\frac{a_o}{1\cdot 2} \\ \text{Για } \kappa = 2, \quad a_4 = -\frac{a_2}{3\cdot 4} \\ \text{Για } \kappa = 3, \quad a_6 = -\frac{a_4}{5\cdot 6} \\ \vdots \\ \text{Για } \kappa = n, \quad a_{2n} = -\frac{a_{2n-2}}{(2n-1)(2n)} \end{array}\right\} (\alpha)$$

Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη τις σχέσεις (α) προκύπτει ότι

$$a_{2n} = \frac{(-1)^n a_o}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot\cdots\cdot(2n-1)(2n)} = \frac{(-1)^n}{(2n)!} a_o \ , \ \ n = 1,2,3 \ldots \qquad (1.5)$$

Για να πάρουμε του συντελεστές a_{2n+1}, θέτουμε στην αναδρομική σχέση όπου $n = 2\kappa - 1$, οπότε, η (1.4) γίνεται: $a_{2\kappa+1} = -\frac{a_{2\kappa-1}}{(2\kappa)(2\kappa+1)}, \quad \kappa = 1,2,3 \ldots$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Για } \kappa = 1, \quad a_3 = -\frac{a_1}{2\cdot 3} \\ \text{Για } \kappa = 2, \quad a_5 = -\frac{a_3}{4\cdot 5} \\ \text{Για } \kappa = 3, \quad a_7 = -\frac{a_5}{6\cdot 7} \\ \vdots \\ \text{Για } \kappa = n, \quad a_{2n+1} = -\frac{a_{2n-1}}{(2n)(2n+1)} \end{array}\right\} (\beta)$$

Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη τις σχέσεις (β) προκύπτει ότι

$$a_{2n+1} = \frac{(-1)^n a_1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot\cdots\cdot(2n)(2n+1)} = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} a_1 \ , \ \ n = 1,2,3 \ldots \qquad (1.6)$$

Εισάγοντας τους συντελεστές στην εξίσωση (1.2), έχουμε

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \left[a_o + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} a_o x^{2n}\right] + \left[a_1 x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} a_1 x^{2n+1}\right] =$$

$$a_o\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}\right] + a_1\left[x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right] =$$

$$a_o\left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}\right] + a_1\left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right] = a_o y_1(x) + a_1 y_2(x), \ x \in \mathbb{R} \qquad (1.7)$$

Οι συντελεστές a_o και a_1 είναι αυθαίρετοι. Από την εξίσωση (1.2) και την παράγωγό της βλέπουμε ότι $y(0) = a_o$ και $y'(0) = a_1$, επομένως οι συντελεστές a_o και a_1 προσδιορίζονται εφόσον δοθούν αρχικές συνθήκες: $y(0) = y_o$, $y'(0) = y_1$.

Είδαμε λοιπόν, ότι με τη μέθοδο των δυναμοσειρών, μέσα από την αναδρομική σχέση (που εμπλέκει μόνο δύο όρους (a_{n+2} και a_n) μπορέσαμε να υπολογίσουμε τον γενικό τύπο του συντελεστή a_n συναρτήσει των συντελεστών a_o και a_1. Οπότε έχουμε το πλήρη καθορισμό των δύο δυναμοσειρών ως λύσεων της ΔΕ που υπεισέρχονται στην αναπαράσταση (1.7). Γενικότερα, όταν η αναδρομική σχέση εμπλέκει δύο συντελεστές μπορούμε πάντα να προσδιορίσουμε τον γενικό τύπο του συντελεστή a_n συναρτήσει των συντελεστών a_o και a_1. Αυτό έχει το όφελος ότι μπορούμε να εφαρμόσουμε το κριτήριο του λόγου για να βρούμε το διάστημα σύγκλισης των δυναμοσειρών λύσεων.

Στο συγκεκριμένο παράδειγμα κάτι τέτοιο δεν είναι αναγκαίο διότι οι συντελεστές p και q είναι σταθεροί αριθμοί, οπότε με βάση το θεώρημα το οποίο μας εξασφαλίζει ότι το διάστημα σύγκλισης των δυναμοσειρών-λύσεων της ΔΕ δεν μπορεί να είναι στενότερο από το διάστημα σύγκλισης των συντελεστών p, q, έπεται ότι οι σειρές συγκλίνουν για κάθε x.

Επιπλέον, αναγνωρίζουμε ότι η πρώτη σειρά είναι το ανάπτυγμα Taylor του $cosx$, ενώ η δεύτερη σειρά είναι το ανάπτυγμα Taylor του $sinx$.
Αν παρόλα αυτά εφαρμόσουμε το κριτήριο του λόγου για τις δύο δυναμοσειρές-λύσεις (1.7) προκύπτει ότι:
$\lim_{n\to\infty}|x^2|\left|\frac{(2n)!}{(2n+2)!}\right| = |x^2|\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(2n+1)(2n+2)} = |x^2|0 < 1$, οπότε η σειρά $y_1(x)$ συγκλίνει για κάθε x.
$\lim_{n\to\infty}|x^2|\left|\frac{(2n+1)!}{(2n+3)!}\right| = |x^2|\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(2n+2)(2n+3)} = |x^2|0 < 1$, οπότε η σειρά $y_2(x)$ συγκλίνει για κάθε x.
Οι σειρές αυτές στο διάστημα σύγκλισης ορίζουν τις συναρτήσεις y_1, y_2, τις οποίες μπορούμε να τις παραγωγίσουμε όρο προς όρο και να αναπαριστούν τις παραγώγους των y_1, y_2 όταν αναφερόμαστε σε οποιοδήποτε σημείο του διαστήματος σύγκλισης. Αυτό μας βοηθάει να δείξουμε ότι η Wronskian των y_1, y_2 είναι διάφορη του μηδενός στο $x_o = 0$ και έτσι εξασφαλίζεται η γραμμική ανεξαρτησία τους. Επομένως, η σχέση (1.7) είναι η γενική λύση της ΔΕ.
Επίσης, μπορούμε να μελετήσουμε τις λύσεις y_1, y_2 και να διαπιστώσουμε ότι έχουν όλες τις γνωστές αλγεβρικές ιδιότητες της συνάρτησης του συνημίτονου και του ημίτονου αντίστοιχα. Επομένως, οι συναρτήσεις $cosx, sinx$, ορίζονται και ως λύσεις της ΔΕ: $y'' + y = 0$. Η $y_1(x) = cosx$ αποτελεί λύση στο ΠΑΤ: $y(0) = 1, y'(0) = 0$, ενώ η $y_2(x) = sinx$ αποτελεί λύση στο ΠΑΤ: $y(0) = 0, y'(0) = 1$.

Πολλές άλλες συναρτήσεις σημαντικές σε προβλήματα της μαθηματικής φυσικής ορίζονται επίσης ως λύσεις διαφορικών εξισώσεων υπό μορφή δυναμοσειρών, οι οποίες δεν συγκαταλέγονται στις στοιχειώδεις συναρτήσεις.

<u>Παράδειγμα 2:</u> Να προσδιορισθεί το θεμελιώδες σύνολο λύσεων της ΔΕ:

$$y'' + xy' - y = 0,\ -\infty < x < \infty \tag{2.1}$$

Για την συγκεκριμένη εξίσωση, $p(x) = x, q(x) = -1$, οπότε κάθε σημείο είναι ομαλό. Σύμφωνα με το θεώρημα η διαφορική εξίσωση επιδέχεται λύση υπό μορφή δυναμοσειράς

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \tag{2.2}$$

η οποία προφανώς συγκλίνει για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Παραγωγίζοντας την (2.2)

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1},\quad y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}$$

και αντικαθιστώντας στην (2.1) λαμβάνουμε

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} na_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0 \tag{2.3}$$

Μετατοπίζοντας τον δείκτη άθροισης της σειράς στον πρώτο όρο με την αντικατάσταση του $n-2$ με κ (οπότε όταν το $n = 2, \kappa = 0$) και θέτοντας ξανά όπου $\kappa = n$ έχουμε

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} na_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0 \Rightarrow$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} na_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0 \Rightarrow$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}\{(n+2)(n+1)a_{n+2} + (n-1)\, a_n\}x^n = 0 \Rightarrow$$
$$a_{n+2} = -\frac{(n-1)a_n}{(n+1)(n+2)},\quad n = 0,1,2 \ldots \tag{2.4}$$

που είναι η ***<u>αναδρομική σχέση με βήμα 2</u>***. Επομένως, οι συντελεστές με άρτιο δείκτη, a_{2n}, προσδιορίζονται από το a_o και οι συντελεστές με περιττό δείκτη, a_{2n+1}, προσδιορίζονται από το a_1.

Από την αναδρομική σχέση παρατηρούμε ότι για $n = 1$, προκύπτει ότι
$a_3 = 0 \Rightarrow a_{2n+1} = 0, n = 1,2, \ldots$
Άρα $y_2(x) = x$, δηλαδή η 2η λύση δεν είναι μία άπειρη δυναμοσειρά αλλά ένα πολυώνυμο.

Από την αναδρομική σχέση (2.4), για $n = 2\kappa - 2$, έχουμε

$$a_{2\kappa} = -\frac{(2\kappa-3)}{(2\kappa-1)(2\kappa)} a_{2\kappa-2}, \quad \kappa = 1,2,3 \ldots$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Για } \kappa = 1, \quad a_2 = -\frac{(-1)a_o}{1\cdot 2} \\ \text{Για } \kappa = 2, \quad a_4 = -\frac{1a_2}{3\cdot 4} \\ \text{Για } \kappa = 3, \quad a_6 = -\frac{3a_4}{5\cdot 6} \\ \vdots \\ \text{Για } \kappa = n, \quad a_{2n} = -\frac{(2n-3)a_{2n-2}}{(2n-1)2n} \end{array}\right\} (\alpha)$$

Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη το αναγωγικό σχήμα (α) μας δίνει τον γενικό τύπο
$a_{2n} = \frac{(-1)^n(-1)\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-5)(2n-3)a_o}{[1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-5)(2n-3)(2n-1)]\,[2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n]} = \frac{(-1)^{n+1}\, a_o}{(2n-1)2^n(n)!}, n = 1,2,3 \ldots$
Άρα $y_1(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\, x^{2n}}{2^n(2n-1)(n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\, x^{2n}}{2^n(2n-1)(n)!}$
Επομένως η γενική λύση της ΔΕ είναι $y(x) = a_o \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^n(2n-1)(n)!} x^{2n} + a_1 x, \; x \in \mathbb{R}$ (2.5)

<u>Παρατήρηση 2.1</u>: (i) Αν το ερώτημα της παραδείγματος ήταν να βρεθεί η λύση στο Π.Α.Τ. με αρχικές συνθήκες , $y(0) = 0, y'(0) = 1$, τότε η λύση στο Π.Α.Τ. θα ήταν η $y(x) = x$.
(ii) Για την εύρεση της γενικής λύσης, έχοντας προσδιορίσει την μία λύση $y_2(x) = x$, θα μπορούσαμε, εναλλακτικά, να εφαρμόσουμε την μέθοδο υποβιβασμού τάξης για να προσδιορίσουμε το δεύτερο μέλος του θεμελιώδους συνόλου λύσεων της ΔΕ (2.1).
Θεωρώντας ότι $\bar{y}_1(x) = u(x)y_2(x) = u(x)x$ και αντικαθιστώντας στη ΔΕ έχουμε

$$xu'' + 2u' + x(xu' + u) - xu = 0 \Rightarrow u'' + \left(\frac{2}{x} + x\right)u' = 0$$

Θέτοντας $u' = v$ παίρνουμε την διαφορική εξίσωση 1ης τάξης: $v' + \left(\frac{2}{x} + x\right)v = 0$ της οποίας μία λύση είναι $v(x) = (-1)x^{-2}e^{-\frac{x^2}{2}}$ (για $c = -1$, όπου c η αυθαίρετη σταθερά της γενικής λύσης). Επομένως $u(x) = -\int x^{-2}e^{-\frac{x^2}{2}}dx$.
Από το ανάπτυγμα Taylor της συνάρτησης $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$, αντικαθιστώντας όπου $z = -\frac{x^2}{2}$, έχουμε $e^{-\frac{x^2}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^n n!}$.
Επομένως $u(x) = -\int x^{-2}e^{-\frac{x^2}{2}}dx = -\int \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n-2}}{2^n n!}\, dx =$
$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^n n!} \int x^{2n-2}dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}x^{2n-1}}{2^n(2n-1)n!}$
Άρα $\bar{y}_1(x) = u(x)x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}x^{2n}}{2^n(2n-1)n!} = y_1(x)$.

<u>Παράδειγμα 3:</u> Να λυθεί η ΔΕ Airy: $y'' - xy = 0, -\infty < x < \infty$ (3.1)
Για την συγκεκριμένη εξίσωση, $p(x) = 0, q(x) = -x$, οπότε κάθε σημείο είναι ομαλό.

Σύμφωνα με το θεώρημα η διαφορική εξίσωση επιδέχεται λύση υπό μορφή δυναμοσειράς

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad (3.2)$$

η οποία προφανώς συγκλίνει για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Παραγωγίζοντας την (3.2)

$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \quad y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$

και αντικαθιστώντας στην (3.1) λαμβάνουμε

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} = 0 \qquad (3.3)$$

Μετατοπίζοντας τον δείκτη άθροισης της σειράς στον πρώτο όρο με την αντικατάσταση του $n-2$ με κ (οπότε όταν το $n=2, \kappa=0$) και στον δεύτερο όρο με την αντικατάσταση του $n+1$ με κ (οπότε όταν το $n=0, \kappa=1$), και θέτοντας ξανά όπου $\kappa = n$ έχουμε

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n - \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n = 0 \Rightarrow$$

$$2 \cdot 1 a_2 + \sum_{n=1}^{\infty} \{(n+2)(n+1) a_{n+2} - a_{n-1}\} x^n = 0 \Rightarrow \begin{cases} a_2 = 0 \\ a_{n+2} = \frac{a_{n-1}}{(n+1)(n+2)}, \quad n \geq 1 \end{cases}$$

Η σχέση: $a_{n+2} = \frac{a_{n-1}}{(n+1)(n+2)}, \quad n \geq 1$ είναι η ***<u>αναδρομική σχέση με βήμα 3</u>***. (3.4)

Έτσι το a_o προσδιορίζει το a_3 που με τη σειρά του προσδιορίζει το a_6…, δηλαδή όλα τα a_{3n} προσδιορίζονται από το a_o.

Το a_1 προσδιορίζει το a_4 που με τη σειρά του προσδιορίζει το a_7…, δηλαδή όλα τα a_{3n+1} προσδιορίζονται από το a_1.

Το a_5 προσδιορίζει το a_2 που με τη σειρά του προσδιορίζει το a_8…, δηλαδή όλα τα a_{3n+2} προσδιορίζονται από το a_2. Όμως το $a_2 = 0 \Rightarrow a_{3n+2} = 0, n \geq 1$.

Για να πάρουμε του συντελεστές a_{3n}, θέτουμε στην αναδρομική σχέση όπου $n = 3\kappa - 2$, Οπότε η (3.4) γίνεται: $a_{3\kappa} = \frac{a_{3\kappa-3}}{(3\kappa-1)(3\kappa)}, \quad \kappa \geq 1$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Για } \kappa = 1, & a_3 = \frac{a_o}{2\cdot 3} \\ \text{Για } \kappa = 2, & a_6 = \frac{a_3}{5\cdot 6} \\ \text{Για } \kappa = 3, & a_9 = \frac{a_6}{8\cdot 9} \\ & \vdots \\ \text{Για } \kappa = n, & a_{3n} = \frac{a_{3n-3}}{(3n-1)(3n)} \end{array}\right\} (\alpha)$$

Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη τις σχέσεις (α) προκύπτει ότι

$$a_{3n} = \frac{a_o}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6\cdot 8\cdot 9\cdots(3n-1)(3n)} = \frac{1\cdot 4\cdot 7\cdots(3n-2)}{(3n)!} a_o, \quad n \geq 1$$

Για να πάρουμε του συντελεστές a_{3n+1}, θέτουμε στην αναδρομική σχέση όπου $n = 3\kappa - 1$, οπότε, η (3.4) γίνεται: $a_{3\kappa+1} = \frac{a_{3\kappa-2}}{(3\kappa)(3\kappa+1)}, \quad \kappa \geq 1$ και εργαζόμενοι μα παρόμοιο τρόπο προσδιορίζουμε του συντελεστές: $a_{3n+1} = \frac{a_1}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7\cdot 9\cdot 10\cdots(3n)(3n+1)} = \frac{1\cdot 2\cdot 5\cdots(3n-1)}{(3n+1)!} a_1 \;, n \geq 1$

Άρα η γενική λύση της εξίσωσης Airy είναι:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_o \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 4\cdot 7\cdots(3n-2)}{(3n)!} x^{3n}\right] + a_1 \left[x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 2\cdot 5\cdots(3n-1)}{(3n+1)!} x^{3n+1}\right] =$$

$$= a_o y_1(x) + a_1 y_2(x), \; x \in \mathbb{R} \qquad (3.5)$$

<u>Παρατήρηση 3.1</u>: (i) Σε αντίθεση με το παράδειγμα 1 οι συναρτήσεις y_1, y_2 που ορίζονται από τις δυναμοσειρές εντός των αγκυλών δεν συγκαταλέγονται στις στοιχειώδεις συναρτήσεις που γνωρίζουμε. Οι συναρτήσεις y_1, y_2 είναι γραμμικά ανεξάρτητες, εφόσον $W(0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$.

(ii) Οι δύο λύσεις ονομάζονται συναρτήσεις Airy και συμβολίζονται με Ai(x) και Bi(x) αντίστοιχα και έχει γίνει εκτενής μελέτη των ιδιοτήτων τους. Από τις γραφικές παραστάσεις τους προκύπτει ότι και οι δύο είναι μονότονες (αύξουσες) για $x > 0$ και ταλαντωτικές για $x < 0$, με φθίνων πλάτος και αυξανόμενη συχνότητα, καθώς αυξάνεται η απόσταση από το μηδέν.
(iii) Η εξίσωση Airy περιγράφει την κάμψη ενός ομοιόμορφου κάθετου στύλου κάτω από την επίδραση του ιδίου του βάρους.

Παρατήρηση 3.2: Στα δύο προηγούμενα παραδείγματα η αναδρομική σχέση που προέκυψε περιλάμβανε μόνο δύο όρους και αυτό είχε σαν αποτέλεσμα τον προσδιορισμό του γενικού τύπου για τον συντελεστή a_n συναρτήσει των a_o και a_1.
Αν αντίθετα, η αναδρομική σχέση έχει περισσότερους από δύο όρους, τότε ο υπολογισμός του γενικού όρου της σειράς είναι, εν γένει, αδύνατος. Οπότε η μόνη σιγουριά που μπορούμε να έχουμε για το διάστημα σύγκλισης είναι ότι δεν μπορεί να είναι στενότερο από αυτό των συντελεστών p και q. Σε αυτή την περίπτωση η μέθοδος των δυναμοσειρών μας δίνει μία προσεγγιστική αναπαράσταση της λύσης υπό μορφή μίας σειράς της οποίας μόνο ένα πεπερασμένο –αν και αυθαίρετα μεγάλο – πλήθος όρων μπορεί να υπολογισθεί. Μία τέτοια σειρά αν και είναι κατάλληλη για αριθμητικό υπολογισμό δεν είναι, εν τούτοις, σε θέση να μας πει απολύτως τίποτα για τις αλγεβρικές ιδιότητες της λύσης.

Παράδειγμα 4: Να λυθεί το Π.Α.Τ. $y''(t) + e^{-\varepsilon t}y(t) = 0,\ y(0) = 1, y'(0) = 0 \quad (4.1)$
Το πρόβλημα (4.1) αποτελεί το μαθηματικό πρότυπο της ταλάντωσης ενός ελατηρίου χωρίς απόσβεση το οποίο έχει συμπιεσθεί κατά μία μονάδα από την θέση ισορροπίας του και του οποίου η ‘σταθερά’ δίνεται από τη συνάρτηση $\kappa(t) = e^{-\varepsilon t}$.
Ο συντελεστής της ΔΕ $q(t) = e^{-\varepsilon t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\varepsilon t)^n}{n!},\ \ t \in \mathbb{R}$. Επομένως, οι λύσεις της ΔΕ υπό μορφή δυναμοσειράς θα συγκλίνουν για κάθε $t \in \mathbb{R}$.
Αναζητούμε λύση της ΔΕ στη μορφή $y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, t^n$. (4.2)
Παραγωγίζοντας την (4.2) έχουμε
$y'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n\, t^{n-1}, \quad y''(t) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n\, t^{n-2}$
και αντικαθιστώντας στην (4.1) λαμβάνουμε

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n\, t^{n-2} + \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\varepsilon t)^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, t^n\right) = 0 \qquad (4.3)$$

Στη σχέση (4.3) θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε το γινόμενο Cauchy δύο δυναμοσειρών

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\, t^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k\, b_{n-k}\right)t^n \qquad (4.4)$$

Εφαρμόζοντας την σχέση (4.4) στην εξίσωση (4.3) έχουμε

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n\, t^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-\varepsilon)^k}{k!} a_{n-k}\right)t^n = 0 \Rightarrow$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}\, t^n + \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-\varepsilon)^k}{k!} a_{n-k}\right)t^n = 0 \Rightarrow$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\{(n+2)(n+1)a_{n+2} + (\sum_{k=0}^{n} \frac{(-\varepsilon)^k}{k!} a_{n-k})\}t^n = 0 \Rightarrow$$

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} = -\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-\varepsilon)^k}{k!} a_{n-k}\right) \Rightarrow$$

$$a_{n+2} = -\frac{1}{(n+1)(n+2)}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-\varepsilon)^k}{k!} a_{n-k}\right),\ n = 0,1,2 \ldots \qquad (4.5)$$

Η σχέση (4.5) είναι ο αναδρομικός τύπος ο οποίος προσδιορίζει τους συντελεστές a_{n+2} συναρτήσει των συντελεστών $a_o, a_1, \dots, a_n$.
Από τις αρχικές συνθήκες έχουμε ότι $a_o = 1$ και $a_1 = 0$.
Οπότε από την αναδρομική σχέση προκύπτει
Για $n = 0$, $\quad a_2 = -\frac{1}{1\cdot 2}a_o = -\frac{1}{2}$
Για $n = 1$, $\quad a_3 = -\frac{1}{2\cdot 3}\left(a_1 + \frac{(-\varepsilon)^1}{1!}a_o\right) = \frac{\varepsilon}{3!}$
Για $n = 2$, $\quad a_4 = -\frac{1}{3\cdot 4}\left(a_2 + \frac{(-\varepsilon)^1}{1!}a_1 + \frac{(-\varepsilon)^2}{2!}a_o\right) = \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} - \frac{\varepsilon^2}{2\cdot 3\cdot 4} = \frac{1}{4!}(1-\varepsilon^2)$, κ.λ.π.
Επομένως η λύση του Π.Α.Τ. (4.1) προσεγγιστικά δίνεται από την συνάρτηση
$$y(t) = 1 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{\varepsilon}{3!}t^3 + \frac{1}{4!}(1-\varepsilon^2)t^4 - \cdots \qquad (4.6)$$
Θεωρητικά μπορούμε να υπολογίσουμε όσους όρους θέλουμε, αλλά είναι δύσκολο να βρούμε ένα γενικό τύπο που να μας προσδιορίζει τους συντελεστές a_n συναρτήσει του a_o.

<u>Παρατήρηση 4.1</u>: Η λύση $y(t)$ όταν το $\varepsilon \to 0$ γίνεται
$y(t) = 1 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{4!}t^4 - \frac{1}{6!}t^6 + \cdots$, που είναι το ανάπτυγμα Taylor του $cost$, δηλαδή η λύση που θα είχαμε στην περίπτωση που η σταθερά του ελατηρίου $\kappa = 1$, ανεξάρτητη του χρόνου. Επομένως, η δύναμη επαναφοράς του ελατηρίου ακολουθεί τον γραμμικό νόμο του Hooke: $F_{\varepsilon\lambda} = \kappa y(t)$.

Υπάρχουν όμως πολλά ενδιαφέροντα προβλήματα που προκύπτουν στη Μαθηματική φυσική που είναι εφικτό ο γενικός συντελεστής της δυναμοσειράς να υπολογισθεί σε κλειστή μορφή οπότε έχουμε πλήρη καθορισμό των δυναμοσειρών που υπεισέρχονται στην αναπαράσταση $y(x) = a_o y_1(x) + a_1 y_2(x)$. Αυτό έχει το όφελος ότι μπορούμε να εφαρμόσουμε ακριβή κριτήρια για την εύρεση του διαστήματος σύγκλισης (κριτήριο του λόγου) αλλά το σημαντικότερο ότι κάποιες φορές μπορούμε να προσπαθήσουμε να συνθέσουμε τη δυναμοσειρά σε μία κλειστή μορφή (δηλαδή να περάσουμε από μία γνωστή δυναμοσειρά στη συνάρτηση που την γεννά).
Όταν αυτό επιτυγχάνεται, είναι σημαντικό -πέρα από την κομψότητα του αποτελέσματος- διότι η συνάρτηση που συνθέτει την δυναμοσειρά συμπίπτει με αυτήν στο διάστημα σύγκλισης, αλλά ταυτόχρονα επεκτείνεται έξω από το διάστημα σύγκλισης –εκεί που η δυναμοσειρά 'εγκαταλείπει'- αποτελώντας λύση της ΔΕ σε όλο το $\mathbb{R}$, πλην των σημείων που η συνάρτηση απειρίζεται.

<u>Παράδειγμα 5:</u> Να προσδιορισθεί το θεμελιώδες σύνολο λύσεων της ΔΕ:
$$(1-x^2)y'' - 6xy' - 4y = 0 \qquad (5.1)$$
<u>Επίλυση:</u> Οι συντελεστές τη ΔΕ είναι ρητές συναρτήσεις: $p(x) = \frac{-6x}{(1-x^2)}$, $q(x) = \frac{-4}{(1-x^2)}$
Παρατηρούμε ότι οι συντελεστές είναι αναλυτικές συναρτήσεις στο $x_o = 0$ και διαθέτουν ανάπτυγμα Taylor για $|x| < 1$.

<u>Σημείωση</u>: Όταν η διαφορική εξίσωση έχει συντελεστές ρητές συναρτήσεις τότε η λυμένη μορφή δεν είναι η ενδεδειγμένη για τον χειρισμό της.
Είναι βοηθητικό να πολλαπλασιάσουμε με τους παρονομαστές των συντελεστών με σκοπό να δημιουργήσουμε ένα πιο απλοποιημένο αναδρομικά σχήμα.

Αναζητούμε λύσεις υπό μορφή δυναμοσειράς με κέντρο το $x_o = 0$: $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$
Αντικαθιστώντας στη ΔΕ (5.1) προκύπτει

$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n\, x^{n-2} - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n\, x^n - 6\sum_{n=1}^{\infty} na_n\, x^n - 4\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n = 0.$

Αλλάζοντας το δείκτη στον πρώτο όρο και ομαδοποιώντας τους υπόλοιπους, αποκτούμε τη σχέση:

$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}\, x^n - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n\, x^n - 6\sum_{n=1}^{\infty} na_n\, x^n - 4\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n = 0$

(αφού γίνουν οι μετατοπίσεις των δεικτών, παρατηρούμε ότι το δεύτερο άθροισμα που αρχίζει από $n = 2$, για $n = 0$ και $n = 1$ μηδενίζεται. Επίσης, το τρίτο άθροισμα $\sum_{n=1}^{\infty} na_n\, x^n$, που αρχίζει από $n = 1$, για $n = 0$ μηδενίζεται, άρα μπορούμε να τα γράψουμε $\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n\, x^n$ και $\sum_{n=0}^{\infty} na_n\, x^n$). Άρα έχουμε

$\sum_{n=0}^{\infty}\{(n+2)(n+1)a_{n+2} - (n^2+5n+4)a_n\}x^n = 0$, η οποία γράφεται

$\sum_{n=0}^{\infty}\{(n+2)(n+1)a_{n+2} - (n+1)(n+4)a_n\}x^n = 0, \;\; x \in I$

Άρα $\quad a_{n+2} = \frac{(n+4)}{(n+2)}a_n,\;\; n \geq 0$, η αναδρομική σχέση με βήμα 2. (5.2)

Για την περίπτωση: $n = 2\kappa - 2,\;\; a_{2\kappa} = \frac{(\kappa+1)}{\kappa}a_{2\kappa-2}, \quad \kappa \geq 1.$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Για } \kappa = 1, \quad a_2 = \frac{2a_o}{1} \\ \text{Για } \kappa = 2, \quad a_4 = \frac{3a_2}{2} \\ \text{Για } \kappa = 3, \quad a_6 = \frac{4a_4}{3} \\ \vdots \\ \text{Για } \kappa = n, \quad a_{2n} = \frac{(n+1)a_{2n-2}}{n} \end{array}\right\} (\alpha)$$

Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη το αναγωγικό σχήμα (α) μας δίνει τον γενικό τύπο

$a_{2n} = \frac{2\cdot3\cdot4\cdots(n+1)}{1\cdot2\cdot3\cdots n}a_o = (n+1)a_o,\;\; n = 1,2,\ldots$

Για την περίπτωση: $n = 2\kappa - 1,\;\; a_{2\kappa+1} = \frac{(2\kappa+3)}{2\kappa+1}a_{2\kappa-1}, \quad \kappa \geq 1.$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Για } \kappa = 1, \quad a_3 = \frac{5a_1}{3} \\ \text{Για } \kappa = 2, \quad a_5 = \frac{7a_3}{5} \\ \text{Για } \kappa = 3, \quad a_7 = \frac{9a_5}{7} \\ \vdots \\ \text{Για } \kappa = n, \quad a_{2n+1} = \frac{(2n+3)a_{2n-1}}{2n+1} \end{array}\right\} (\beta)$$

Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη το αναγωγικό σχήμα (β) μας δίνει τον γενικό τύπο

$a_{2n+1} = \frac{5\cdot7\cdot9\cdots(2n+3)}{3\cdot5\cdot7\cdots(2n+1)}a_1 = (2n+3)\frac{a_1}{3},\;\; n = 1,2,\ldots$

Επομένως η γενική λύση είναι $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n = a_o[1 + \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)x^{2n}] +$
$a_1\left[x + \sum_{n=1}^{\infty}(2n+3)\frac{1}{3}x^{2n+1}\right] = a_o\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^{2n} + \frac{a_1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(2n+3)x^{2n+1}$ (5.3)

Οι συναρτήσεις που αποτελούν το θεμελιώδες σύνολο λύσεων της ΔΕ είναι

$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^{2n},\;\; y_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(2n+3)\frac{1}{3}x^{2n+1}$ (5.4)

Εφαρμόζοντας το κριτήριο του λόγου για τις $y_1(x)$ και $y_2(x)$ έχουμε

$$\lim_{n\to\infty}|x^2|\left|\frac{(n+2)}{(n+1)}\right| = |x^2|\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{n+1} = |x^2|\cdot 1 < 1$$

$$\lim_{n\to\infty}|x^2|\left|\frac{(2n+5)}{(2n+3)}\right| = |x^2|\lim_{n\to\infty}\frac{2n+5}{2n+3} = |x^2|\cdot 1 < 1$$

Και οι δύο αυτές δυναμοσειρές έχουν διάστημα σύγκλισης $I = (-1,1)$.
Έξω από το διάστημα αυτό αποκλίνουν και παύουν να αποτελούν λύσεις της ΔΕ.

Για να δούμε τι συμβαίνει έξω από το διάστημα αυτό θα προσπαθήσουμε να συνθέσουμε τις δυναμοσειρές σε κλειστή μορφή.

Ξεκινάμε με τη γνωστή γεωμετρική σειρά: $\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \,, z \in (-1,1)$ (5.5)

Αν πολλαπλασιάσουμε με z και τα δύο μέλη της σχέσης (5.5) και κατόπιν παραγωγίσουμε ως προς z προκύπτει $\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n$. Αντικαθιστώντας όπου $z = x^2$, βρίσκουμε

$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^{2n} = \frac{1}{(1-x^2)^2}, \;\; x \in (-1,1)$ (5.6)

Αν τώρα ξεκινήσουμε από τη σχέση (5.5) και αντικαταστήσουμε $z = x^2$, πολλαπλασιάσουμε και τα δύο μέλη με x^3, παραγωγίσουμε ως προς x και τέλος διαιρέσουμε με τη μεταβλητή x και τα δύο μέλη:

$\frac{1}{1-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} \Rightarrow \frac{x^3}{1-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n+3} \Rightarrow \left(\frac{x^3}{1-x^2}\right)' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n+3}\right)' \Rightarrow$

$\frac{3x^2-x^4}{(1-x^2)^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(2n+3)x^{2n+2} \Rightarrow \frac{3x-x^3}{(1-x^2)^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(2n+3)x^{2n+1}$

προσδιορίζουμε τη συνάρτηση $y_2(x)$ ως ακολούθως

$y_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(2n+3)x^{2n+1} = \frac{3x-x^3}{(1-x^2)^2} \;\; , x \in (-1,1)$ (5.7)

Συνθέτοντας τις σειρές σε ρητές συναρτήσεις τις επεκτείναμε έξω από το διάστημα σύγκλισης. Έτσι λοιπόν η γενική λύση της ΔΕ (5.1) έχει τη μορφή

$$y(x) = \frac{1}{(1-x^2)^2}\left(a_o + a_1(3x - x^3)\right), \quad (5.8)$$

η οποία ικανοποιεί τη ΔΕ (5.1) οπουδήποτε πλην των σημείων $x = \pm 1$.

<u>Παράδειγμα 6:</u> Να λυθεί το Π.Α.Τ.:

$$y'' - xy = 0, \;\; y(1) = 1, \;\; y'(1) = 0 \quad (6.1)$$

Όταν αναζητάμε λύση στην περιοχή του x_o, $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(x - x_o)^n$ τότε οι συντελεστές $p(x), q(x)$ θα πρέπει να εκφρασθούν ως αθροίσματα δυνάμεων του $(x - x_o)$.

Στην εξίσωση (6.1) γράφουμε: $y'' - (x - 1 + 1)y = 0 \Rightarrow y'' - (x-1)y - y = 0$, με $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(x-1)^n$.

Εναλλακτικά, μπορούμε να κάνουμε την αλλαγή μεταβλητής $x - x_o = t$, λαμβάνοντας μία νέα ΔΕ ως προς $y(t)$. Στο πρόβλημα (6.1) θέτοντας $x - 1 = t \Rightarrow x = t + 1$, έχουμε το

Π.Α.Τ. : $y''(t) - (t+1)y(t) = 0, \;\; y(0) = 1, \;\; y'(0) = 0,$ (6.2)

με $y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, t^n$. (6.3)

Όταν ολοκληρώσουμε τους υπολογισμούς αντικαθιστούμε το t με $x - 1$.

Αντικαθιστώντας την (6.3) στη ΔΕ (6.2) έχουμε:

$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n\, t^{n-2} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, t^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, t^n = 0 \Rightarrow$

$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}\, t^n - \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}\, t^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, t^n = 0 \Rightarrow 2 \cdot 1 a_2 - a_o +$

$\sum_{n=1}^{\infty}\{(n+2)(n+1)a_{n+2} - a_{n-1} - a_n\}t^n = 0$

Άρα $\quad a_2 = \frac{a_o}{2}$ και

$a_{n+2} = \frac{a_{n-1}+a_n}{(n+1)(n+2)}, \quad n \geq 1$ η αναδρομική σχέση (η οποία εμπλέκει 3 όρους)

Από τις αρχικές συνθήκες έχουμε $y(0) = 1 \Rightarrow a_o = 1, \;\; y'(0) = 0 \Rightarrow a_1 = 0.$

Άρα από την αναδρομική σχέση προκύπτει

Για $n = 1 \;\; a_3 = \frac{a_o+a_1}{(2)(3)} = \frac{1}{3!}$

Για $n = 2$ $\;a_4 = \frac{a_1+a_2}{(3)(4)} = \frac{1}{4!}$

Για $n = 3$ $\;a_5 = \frac{a_2+a_3}{(4)(5)} = \frac{4}{5!}$, κ.λ.π.

Επομένως η λύση στο Π.Α.Τ. είναι

$$y(t) = 1 + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + \frac{4t^5}{5!} + \cdots$$

Για $t = x - 1$

$$y(x) = 1 + \frac{(x-1)^2}{2!} + \frac{(x-1)^3}{3!} + \frac{(x-1)^4}{4!} + \frac{4(x-1)^5}{5!} + \cdots, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Παρατήρηση 7.1: Η γενική λύση της ΔΕ Airy υπό μορφή δυναμοσειράς του $x - 1$ είναι:

$$y(x) = a_o\left[1 + \frac{(x-1)^2}{2!} + \frac{(x-1)^3}{3!} + \frac{(x-1)^4}{4!} + \frac{4(x-1)^5}{5!} + \cdots\right] +$$
$$a_1\left[(x-1) + \frac{(x-1)^3}{3!} + \frac{2(x-1)^4}{4!} + \frac{(x-1)^5}{5!} + \cdots\right] = a_o y_3(x) + a_1 y_4(x), x \in \mathbb{R} \qquad (6.4)$$

Στο παράδειγμα 3, βρήκαμε τη γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης Airy υπό μορφή δυναμοσειράς του x,

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n = a_o\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 4\cdot 7\cdots(3n-2)}{(3n)!} x^{3n}\right] + a_1\left[x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 2\cdot 5\cdots(3n-1)}{(3n+1)!} x^{3n+1}\right] =$$
$$a_o y_1(x) + \; a_1 y_2(x), \;\; x \in \mathbb{R}\,.$$

Οι συναρτήσεις $y_1(x), y_2(x)$ που ορίσθηκαν μέσω των δυναμοσειρών της παραπάνω εξίσωσης αποτελούν θεμελιώδες σύνολο λύσεων της ΔΕ Airy, όπως επίσης και οι συναρτήσεις $y_3(x), y_4(x)$ της εξίσωσης (6.4). Επομένως, σύμφωνα με την γενική θεωρία των γραμμικών εξισώσεων 2ης τάξης, η κάθε μία από τις συναρτήσεις $y_1(x), y_2(x)$ γράφεται σαν γραμμικός συνδυασμός των $y_3(x), y_4(x)$ και αντιστρόφως-αποτέλεσμα που δεν είναι καθόλου προφανές από την μορφή των δυναμοσειρών.

<u>Παράδειγμα 7</u>: Να λυθεί η ΔΕ:

$$y'' + sinxy = x^2, \;\; -\infty < x < \infty \qquad (7.1)$$

<u>Επίλυση</u>: Οι συναρτήσεις $sinx$, $\;x^2$ είναι αναλυτικές στο $x_o = 0$ με ακτίνα σύγκλισης $r = \infty$. Επομένως, η εξίσωση (7.1) δέχεται λύσεις της $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$ με ακτίνα σύγκλυσης $\rho = \infty$. Αντικαθιστώντας στη ΔΕ (7.1) προκύπτει

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n\, x^{n-2} + \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n\right) = x^2 \Rightarrow$$

$$2a_2 + 6a_3 x + 12a_4 x^2 + 20a_5 x^3 + \cdots + \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots\right)(a_o + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots) = x^2$$

Υπολογίζοντας τους πρώτους όρους γινομένου έχουμε:

$$2a_2 + 6a_3 x + 12a_4 x^2 + 20a_5 x^3 + \cdots + a_o x + a_1 x^2 + \left(a_2 - \frac{1}{3!}\right)x^3 + \left(a_3 - \frac{a_1}{3!}\right)x^4 + \cdots = x^2$$

$$\Rightarrow 2a_2 = 0, 6a_3 + a_o = 0, 12a_4 + a_1 = 1, 20a_5 + \left(a_2 - \frac{1}{3!}\right) = 0, \ldots$$

Επιλύοντας τις παραπάνω σχέσεις συναρτήσει ως προς τους συντελεστές $a_n, n = 2,3, \ldots$ συναρτήσει των συντελεστών a_o, a_1, παίρνουμε τους πρώτους όρους της γενικής λύσης της ΔΕ:

$$y(x) = a_o + a_1 x - \frac{a_o}{6}x^3 + \frac{1 - a_1}{12}x^4 + \frac{a_o}{120}x^5 + \frac{a_o + a_1}{180}x^6 + \cdots$$

Μπορούμε να υπολογίσουμε τόσους όρους όσους απαιτεί η ακρίβεια του προβλήματος.

<u>Εξίσωση Legendre τάξης α</u>

$$(1-x^2)y''-2xy'+\alpha(\alpha+1)y=0,\ \ \alpha\in\mathbb{R} \qquad \text{(L.1)}$$

Η εξίσωση (L.1) έχει σημαντικές εφαρμογές σε προβλήματα που παρουσιάζουν σφαιρική συμμετρία, όπως στο πρόβλημα της στατικής θερμοκρασίας εντός μίας σφαιρικής μπάλας όταν είναι γνωστές οι θερμοκρασίες των σημείων στο σύνορο.

Οι συντελεστές της ΔΕ είναι $p(x)=\frac{-2x}{(1-x^2)}$, $q(x)=\frac{\alpha(\alpha+1)}{(1-x^2)}$, είναι αναλυτικές συναρτήσεις στο $x_o=0$, άρα το μηδέν είναι ομαλό σημείο της ΔΕ. Τα μοναδικά ιδιάζοντα σημεία είναι τα σημεία ± 1. Επίσης, οι σειρές Taylor των $p(x)$ και $q(x)$ με κέντρο το μηδέν συγκλίνουν για $|x|<1$. Επομένως, οι λύσεις της ΔΕ:

$y(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k\,x^k$ θα έχουν ακτίνα σύγκλισης $\rho\geq 1$. (L.2)

Αντικαθιστώντας την (L.2) στη ΔΕ (L.1), προκύπτει

$$\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)a_k\,x^{k-2}-\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)a_k\,x^k-2\sum_{k=1}^{\infty}ka_k\,x^k+\alpha(\alpha+1)\sum_{k=0}^{\infty}a_k\,x^k=0.$$

Αλλάζοντας το δείκτη στον πρώτο όρο και ομαδοποιώντας τους υπόλοιπους, αποκτούμε τη σχέση $\sum_{k=0}^{\infty}\{(k+2)(k+1)a_{k+2}+(-k^2-k+\alpha^2+\alpha)a_k\}x^k=0\ \ \forall|x|<\rho$

Άρα $\quad (k+2)(k+1)a_{k+2}+(\alpha^2-k^2+\alpha-k)a_k\Rightarrow$

$$a_{k+2}=-\frac{(\alpha-k)(\alpha+k+1)}{(k+1)(k+2)}a_k,\ \ k=0,1,2\ldots \qquad \text{(L.3)}$$

Ο αναδρομικός τύπος (L.3) δίνει

Για $k=0$ $\quad a_2=-\frac{\alpha(\alpha+1)}{1\cdot 2}a_o$

Για $k=1$ $\quad a_3=-\frac{(\alpha-1)(\alpha+2)}{2\cdot 3}a_1$

Για $k=2$ $\quad a_4=-\frac{(\alpha-2)(\alpha+3)}{3\cdot 4}a_2=\frac{\alpha(\alpha-2)(\alpha+1)(\alpha+3)}{4!}a_o$

Για $k=3$ $\quad a_5=-\frac{(\alpha-3)(\alpha+4)}{4\cdot 5}a_3=\frac{(\alpha-1)(\alpha-3)(\alpha+2)(\alpha+4)}{5!}a_1$

Για $k=4$ $\quad a_6=-\frac{(\alpha-4)(\alpha+5)}{5\cdot 6}a_4=-\frac{\alpha(\alpha-2)(\alpha-4)(\alpha+1)(\alpha+3)(\alpha+5)}{6!}a_o$

Για $k=5$ $\quad a_7=-\frac{(\alpha-5)(\alpha+6)}{6\cdot 7}a_5=-\frac{(\alpha-1)(\alpha-3)(\alpha-5)(\alpha+2)(\alpha+4)(\alpha+6)}{7!}a_1$

$\vdots$

Γενικότερα, όλοι οι συντελεστές a_{2k} προσδιορίζονται συναρτήσει του a_o και όλοι οι συντελεστές a_{2k+1} συναρτήσει του a_1.

Οπότε προκύπτουν οι δύο λύσεις της ΔΕ

$$y_1(x)=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k\alpha(\alpha-2)(\alpha-4)\cdots(\alpha-2k+2)(\alpha+1)(\alpha+3)\cdots(\alpha+2k-1)\,x^{2k}}{(2k)!} \qquad \text{(L.4)}$$

$$y_2(x)=x+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k(\alpha-1)(\alpha-3)\cdots(\alpha-2k+1)(\alpha+2)(\alpha+4)\cdots(\alpha+2k)\,x^{2k+1}}{(2k+1)!} \qquad \text{(L.5)}$$

Υποθέτουμε ότι $\alpha=n$ μη αρνητικός ακέραιος. Από τις σχέσεις (L.4) και (L.5) παρατηρούμε ότι η εξίσωση Legendre τάξης n έχει μία τετριμμένη πολυωνυμική λύση. Ειδικότερα, αν είναι άρτιος, $\alpha=2n$, $n=0,1,2\ldots$, τότε η $y_1(x)$ είναι ένα πολυώνυμο που περιέχει μόνο άρτιες δυνάμεις του x, βαθμού $2n$, ενώ η $y_2(x)$ είναι μία άπειρη δυναμοσειρά. Αν είναι περιττός, $\alpha=2n+1$, $n=0,1,2\ldots$, τότε η $y_2(x)$ είναι ένα πολυώνυμο που περιέχει μόνο περιττές δυνάμεις του x, βαθμού $2n+1$, ενώ η $y_1(x)$ είναι μία άπειρη δυναμοσειρά. Έτσι σε κάθε περίπτωση αν $\alpha=n$, τότε η εξίσωση Legendre

$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0,$ (L.6)

έχει λύση πολυώνυμο βαθμού n.

Συμβολίζουμε με $P_n(x)$ τη πολυωνυμική λύση της εξίσωσης (L.6) για την οποία ισχύει $P_n(1) = 1$. Τα πολυώνυμα $P_n(x)$ ονομάζονται ***πολυώνυμα Legendre***.

Π.χ. Αν $\alpha = 0,\ y_1(x) = 1 \Rightarrow P_o(x) = 1$

Π.χ. Αν $\alpha = 2,\ y_1(x) = 1 - \frac{2\cdot 3}{2!}x^2 = 1 - 3x^2 \Rightarrow y_1(1) = -2 \Rightarrow$

$P_2(x) = \frac{y_1(x)}{y_1(1)} = \frac{1}{-2}(1-3x^2) = \frac{1}{2}(3x^2-1).$

Π.χ. Αν $\alpha = 1,\ y_2(x) = x \Rightarrow P_1(x) = x$

Π.χ. Αν $\alpha = 3,\ y_2(x) = x - \frac{2\cdot 5}{3!}x^3 = x - \frac{5}{3}x^3 \Rightarrow y_2(1) = -\frac{2}{3} \Rightarrow$

$P_3(x) = \frac{y_2(x)}{y_2(1)} = -\frac{3}{2}\left(x - \frac{5}{3}x^3\right) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x).$

Γενικότερα, μπορεί να αποδειχθεί ότι τα πολυώνυμα Legendre $P_n(x)$ δίνονται από τη σχέση:

$P_n(x) = 2^{-2}\sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^k(2n-2k)!}{k!(n-k)!(n-2k)!}x^{n-2k},\ n = 0,1,2 \ldots,$ (L.7)

όπου $[n/2]$ είναι το ακέραιο μέρος του αριθμού $n/2$.

Επίσης, μπορεί να δειχθεί ότι τα πολυώνυμα Legendre δίνονται από τον ***τύπο του Rodrigues***:

$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n, \quad n = 0,1,2\ldots$ (L.8)

Μία βασική ιδιότητα των πολυωνύμων Legendre είναι η ***ορθογωνιότητα***: Για κάθε δύο μη αρνητικούς ακέραιους αριθμούς n και m ισχύει

$\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)dx = 0, n \neq m$ (L.9)

Η σχέση (L.9) αποδεικνύεται ως εξής:

Επειδή τα πολυώνυμα $P_n(x)$ και $P_m(x)$ αποτελούν λύσεις της ΔΕ (L.6), θα ισχύει

$$(1-x^2)P_n'' - 2xP_n' + n(n+1)P_n = 0$$
$$(1-x^2)P_m'' - 2xP_m' + m(m+1)P_m = 0$$

Αν πολλαπλασιάσουμε τις σχέσεις αυτές με P_m και P_n αντίστοιχα και αφαιρέσουμε κατά μέλη, θα προκύψει η εξίσωση:

$(1-x^2)(P_n''P_m - P_m''P_n) - 2x(P_n'P_m - P_m'P_n) + [n(n+1) - m(m+1)]P_nP_m = 0$ (L.10)

Οι δύο πρώτοι όροι της τελευταίας σχέσης γράφονται: $\frac{d}{dx}[(1-x^2)(P_n'P_m - P_m'P_n)]$

Έτσι ολοκληρώνοντας τη σχέση (L.10) από -1 έως 1 έχουμε:

$(1-x^2)(P_n'P_m - P_m'P_n)|_{-1}^{1} = [n(n+1) - m(m+1)]\int_{-1}^{1} P_nP_m\,dx,$

Για $n \neq m$ η τελευταία σχέση συνεπάγεται ότι: $\int_{-1}^{1} P_nP_m\,dx = 0, \forall n,m \in N, n \neq m.$

Ορισμένες βασικές ιδιότητες των πολυωνύμων Legendre δίνονται στις παρακάτω σχέσεις:

1. $P_n(1) = 1\,, P_n(-1) = (-1)^n$
2. $|P_n(x)| \leq 1 \quad \forall n,\ x\epsilon[-1,1]$
3. Το πολυώνυμο $P_n(x)$ έχει n διαφορετικές ρίζες όλες στο διάστημα $[-1,1]$
4. Ισχύει ο αναγωγικός τύπος:

$$(n+1)P_{n+1}(x)+nP_{n-1}(x)=(2n+1)xP_n(x), n=1,2\ldots$$

5. $\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)dx=\begin{cases}0, & n\neq m, \text{ ορθογωνιότητα}\\ \frac{2}{2n+1}, & n=m\end{cases}$

<u>Παράδειγμα 8:</u> Να λυθεί το Π.Α.Τ.:

$$(1-x^2)y''-2xy'+30y=0, \quad y(0)=0, \ y'(0)=1 \qquad (8.1)$$

<u>Επίλυση</u>: Η εξίσωση (8.1) είναι εξίσωση Legendre με $\alpha=5$.

Οι συντελεστές της ΔΕ είναι $p(x)=\frac{-2x}{(1-x^2)}$, $q(x)=\frac{30}{(1-x^2)}$, είναι αναλυτικές συναρτήσεις στο $x_o=0$, άρα το μηδέν είναι ομαλό σημείο της ΔΕ. Επίσης, οι σειρές Taylor των $p(x)$ και $q(x)$ με κέντρο το μηδέν συγκλίνουν για $|x|<1$. Επομένως, οι λύσεις της ΔΕ:

$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ θα έχουν ακτίνα σύγκλισης $\rho\geq 1$. (8.2)

Αντικαθιστώντας την (8.2) στη ΔΕ (8.1), προκύπτει

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}-\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^n-2\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^n+30\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n=0.$$

Αλλάζοντας το δείκτη στον πρώτο όρο και ομαδοποιώντας τους υπόλοιπους, αποκτούμε τη σχέση $\sum_{n=0}^{\infty}\{(n+2)(n+1)a_{n+2}+(-n^2-n+5^2+5)a_n\}x^n=0 \ \forall|x|<\rho$

Άρα $(n+2)(n+1)a_{n+2}+(5^2-n^2+5-n)a_n \Rightarrow$

$$a_{n+2}=-\frac{(5-n)(n+6)}{(n+1)(n+2)}a_n, \ n=0,1,2\ldots \qquad (8.3)$$

Ο αναδρομικός τύπος (8.3) είναι με βήμα 2, επομένως όλοι οι συντελεστές a_{2n} που προσδιορίζονται συναρτήσει του a_o είναι μηδενικοί εφόσον από τις αρχικές συνθήκες έχουμε ότι $a_o=0$. Επίσης, για $n=5$, $a_7=0\Rightarrow a_{2n+1}=0$, $n=3,4,\ldots$, άρα οι μη μηδενικοί συντελεστές με περιττό δείκτη είναι:

Για $n=1$ $\quad a_3=-\frac{4\cdot 7}{2\cdot 3}a_1=-\frac{4\cdot 7}{2\cdot 3}a_1=-\frac{14}{3}a_1$

Για $n=3$ $\quad a_5=-\frac{2\cdot 9}{4\cdot 5}a_3=\frac{2\cdot 9}{4\cdot 5}\frac{14}{3}a_1=\frac{42}{10}a_1$

Άρα η $y_2(x)=a_1x+a_3x^3+a_5x^5=x-\frac{14}{3}x^3+\frac{42}{10}x^5$, $x\in\mathbb{R}$ είναι η λύση στο Π.Α.Τ.

$y_2(1)=1-\frac{14}{3}+\frac{42}{10}=\frac{8}{15}$, επομένως το πολυώνυμο Legendre είναι

$$P_5(x)=\frac{15}{8}\left(x-\frac{14}{3}x^3+\frac{42}{10}x^5\right)=\frac{1}{8}(63x^5-70x^3+15x), \ x\in\mathbb{R}.$$

Β. Κανονικό ιδιάζον σημείο

Η μέθοδος των δυναμοσειρών για την επίλυση διαφορικών εξισώσεων της μορφής

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \qquad (1)$$

εφαρμόζεται όπως διαπιστώσαμε προηγουμένως σε ομαλά σημεία, δηλαδή σε σημεία όπου οι συντελεστές $p(x)$ και $q(x)$ είναι αναλυτικές συναρτήσεις.

Στις εφαρμογές ανακύπτουν διαφορικές εξισώσεις των οποίων οι συντελεστές $p(x)$ και $q(x)$ – ή απλά ο ένας από τους δύο- χάνουν την αναλυτικότητα τους σ' ένα σημείο x_o. Επομένως το σημείο x_o είναι ιδιάζον (ανώμαλο) σημείο της ΔΕ. Αν επιχειρήσουμε να εφαρμόσουμε την μέθοδο των δυναμοσειρών, αναζητώντας λύσεις στη περιοχή του x_o, της μορφής $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(x - x_o)^n$, θα δούμε ότι η μέθοδος θα αστοχήσει (διότι οι λύσεις δεν είναι, εν γένει, αναλυτικές στο x_o και επομένως δεν μπορούν να αναπαρασταθούν ως ανάπτυγμα Taylor δυνάμεων του $(x - x_o)$.

Επειδή τα ιδιάζοντα σημεία είναι λίγα στο πλήθος, θα μπορούσαμε να τα αγνοήσουμε, με δεδομένο ότι γνωρίζουμε πώς να κατασκευάσουμε λύσεις στην περιοχή ομαλών σημείων. Όμως είναι αυτά ακριβώς τα σημεία που παρουσιάζουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον, π.χ. οι γεωμετρικές ιδιομορφίες ενός φυσικού προβλήματος όπως κορυφές, γωνίες, εγκοπές έχουν σαν συνέπεια την ύπαρξη ιδιαζόντων σημείων στη ΔΕ και είναι τα σημεία στα οποία επιβάλλεται η προσεκτική μελέτη της συμπεριφοράς της λύσης. Αν η απόκλιση των συντελεστών $p(x)$ και $q(x)$ από την αναλυτικότητα είναι ανεξέλεγκτη τότε το λογικότερο είναι να μην επιμείνουμε στο προσδιορισμό λύσεων με κέντρο το x_o. Υπάρχουν όμως ΔΕ με συντελεστές των οποίων η ιδιάζουσα συμπεριφορά στο x_o είναι 'ασθενώς' ιδιάζουσα, δηλαδή οι συναρτήσεις $(x - x_o)p(x)$ και $(x - x_o)^2 q(x)$ είναι αναλυτικές συναρτήσεις στο x_o. Τότε το ιδιάζον σημείο x_o καλείται ***κανονικό ιδιάζον (ανώμαλο) (ΚΙΣ)(ΚΑΣ)*** σημείο της ΔΕ. Διαφορετικά καλείται ***μη κανονικό ιδάζον (ανώμαλο) (ΜΚΙΣ)(ΜΚΑΣ)*** σημείο.

Όταν $p(x)$ και $q(x)$ είναι ρητές συναρτήσεις, οι κατάλληλες συνθήκες για να διακρίνουμε αν ένα ιδιάζον σημείο είναι κανονικό ιδιάζον σημείο είναι:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to x_o}(x - x_o)p(x) \\ \lim\limits_{x\to x_o}(x - x_o)^2 q(x) \end{array}\right. \text{ να υπάρχουν και να είναι πεπερασμένα} \qquad (2)$$

Π.χ. α) η εξίσωση Euler: $x^2y'' + xp_oy' + q_oy = 0,\ p_o, q_o \in \mathbb{R}$, έχει συντελεστές $p(x) = \frac{p_o}{x}$ και $q(x) = \frac{q_o}{x^2}$, άρα το ιδιάζον σημείο είναι τα $x_o = 0$. Όμως

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0} xp(x) = p_o \\ \lim\limits_{x\to 0} x^2 q(x) = q_o \end{cases},\ \text{άρα είναι ΚΙΣ}$$

β) Η εξίσωση Legendre: $(1 - x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha + 1)y = 0,\ \alpha \in \mathbb{R}$ έχει συντελεστές $p(x) = \frac{-2x}{(1-x^2)}$ και $q(x) = \frac{\alpha(\alpha+1)}{(1-x^2)}$, άρα τα ιδιάζοντα σημεία είναι τα $x_o = \pm 1$.

Για το σημείο $x_o = 1$ έχουμε: $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1}(x - 1)\frac{(-2x)}{(1-x^2)} = 1 \\ \lim\limits_{x\to 1}(x - 1)^2 \frac{\alpha(\alpha+1)}{(1-x^2)} = 0 \end{cases}$, άρα είναι ΚΙΣ

Για το σημείο $x_o = -1$ έχουμε: $\begin{cases} \lim\limits_{x\to -1}(x+1)\frac{(-2x)}{(1-x^2)} = 1 \\ \lim\limits_{x\to -1}(x+1)^2\frac{\alpha(\alpha+1)}{(1-x^2)} = 0 \end{cases}$, άρα είναι ΚΙΣ

γ) Η εξίσωση $2x(x-2)^2y'' + 3xy' + (x-2)y = 0$, έχει συντελεστές $p(x) = \frac{3}{2(x-2)^2}$ και $q(x) = \frac{1}{2x(x-2)}$, άρα τα ιδιάζοντα σημεία είναι τα $x_o = 0$ και $x_o = 2$.

Για το σημείο $x_o = 0$ έχουμε: $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0} x\frac{3}{2(x-2)^2} = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0} x^2\frac{1}{2x(x-2)} = 0 \end{cases}$, άρα είναι ΚΙΣ

Για το σημείο $x_o = 2$ έχουμε: $\lim\limits_{x\to 2}(x-2)\frac{3}{2(x-2)^2} = \infty$, άρα είναι ΜΚΙΣ

Όταν το σημείο x_o είναι κανονικό ιδιάζον σημείο της ΔΕ (1), τότε μπορούμε να 'αναζητήσουμε' μία γενίκευση της μεθόδου των δυναμοσειρών χωρίς να αλλάξουμε το κέντρο ανάπτυξης αυτών, έτσι ώστε να την εφαρμόσουμε στη περιοχή του ΚΙΣ.
Για ευκολία και χωρίς βλάβη της γενικότητας θα θεωρήσουμε ότι το ΚΙΣ είναι το $x_o = 0$.
Αν το $x_o \neq 0$, μπορούμε να μετασχηματίσουμε την εξίσωση σε μία άλλη θέτοντας $x - x_o = t$.
Εφόσον το $x_o = 0$ είναι ΚΙΣ έπεται ότι οι συναρτήσεις $xp(x)$ και $x^2q(x)$ είναι αναλυτικές στο μηδέν, άρα έχουν ανάπτυγμα Taylor με κέντρο το μηδέν. Έστω ότι

$xp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n$ για $|x| < \rho_1$ [ο πρώτος όρος της σειράς είναι $p_o = \lim\limits_{x\to 0} xp(x)$]

$x^2q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n$ για $|x| < \rho_2$. [ο πρώτος όρος της σειράς είναι $q_o = \lim\limits_{x\to 0} x^2q(x)$]

Προκειμένου να εμφανίσουμε τους όρους $xp(x)$ και $x^2q(x)$ στη ΔΕ (1) πολλαπλασιάζουμε την (1) με x^2, οπότε προκύπτει η ΔΕ

$$x^2y'' + x\big(xp(x)\big)y' + \big(x^2q(x)\big)y = 0 \tag{3}$$

$$x^2y'' + x(p_o + p_1x + \cdots)y' + (q_o + q_1x + \cdots)y = 0 \tag{4}$$

<u>Β1. Εξίσωση Euler</u>

Σαν πρώτη περίπτωση θα θεωρήσουμε ότι όλοι οι συντελεστές $p_i = 0, i = 1,2\ldots$ και $q_i = 0, i = 1,2\ldots$, όποτε η (4) γίνεται

$$x^2y'' + xp_oy' + q_oy = 0,\ p_o, q_o \in \mathbb{R} \tag{5}$$

Η ΔΕ (5) είναι η ***<u>εξίσωση Euler</u>*** με ΚΙΣ το $x_o = 0$.
Επειδή οι συντελεστές της ΔΕ (5) δεν ορίζονται στο μηδέν ενδεχομένως και οι λύσεις να μην ορίζονται στο μηδέν. Θεωρούμε αρχικά ότι $x > 0$.
Στη διαφορική εξίσωση Euler παρατηρούμε ότι σε κάθε όρο η τάξη της εμπλεκόμενης παραγώγου ταυτίζεται με το εκθέτη του συνοδεύοντος μονωνύμου. Συνεπώς ένα τυχαίο μονώνυμο αποτελεί ιδιοσυνάρτηση - με σταθερή ιδιοτιμή - για κάθε όρο της διαφορικής εξίσωσης και αυτό μας προδιαθέτει να δοκιμάσουμε λύσεις της μορφής $y(x) = x^r$. Πιο συγκεκριμένα αντικαθιστώντας μια τέτοια απλή υποψήφια λύση στην (4) παίρνουμε

$$x^2r(r-1)x^{r-2} + xp_orx^{r-1} + q_ox^r = 0 \Rightarrow \{r(r-1) + p_or + q_o\}x^r = 0, \forall x > 0$$

Άρα $\quad f(r) = r(r-1) + p_or + q_o = r^2 + (p_o - 1)r + q_o = 0 \qquad (6)$

Η εξίσωση (6) ονομάζεται ***<u>εξίσωση δεικτών</u>*** *<u>ή</u>* ***<u>δείκτρια εξίσωση</u>*** και προσδιορίζει τους μοναδικούς επιτρεπτούς εκθέτες – που καλούνται ***<u>εκθέτες ιδιομορφίας</u>*** - ώστε η συνάρτηση x^r να ικανοποιεί τη ΔΕ (5).
Διακρίνουμε τρείς χαρακτηριστικές περιπτώσεις:

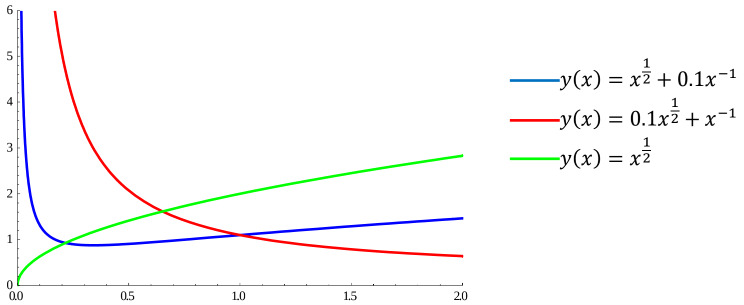
α) Αν $r_1, r_2 \in \mathbb{R}, r_1 \neq r_2$ τότε $y_1(x) = x^{r_1}$ και $y_2(x) = x^{r_2}$ είναι δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της ΔΕ (5) και η γενική λύση γράφεται

$$y(x) = c_1 x^{r_1} + c_2 x^{r_2}, x > 0 \qquad (7)$$

Κοντά στο ιδιάζων σημείο $x = 0$, η συμπεριφορά των λύσεων εξαρτάται εξ ολοκλήρου από τις τιμές των εκθετών r_1 και r_2. Αν το r είναι πραγματικό θετικό, τότε το $x^r \to 0$ καθώς το $x \to 0$ από τα δεξιά. Ενώ, αν το r είναι πραγματικό αρνητικό, τότε το x^r γίνεται μη φραγμένο.

<u>Παράδειγμα 1</u>: Να βρεθεί η γενική λύση της ΔΕ: $2x^2y'' + 3xy' - y = 0,\ x > 0$
<u>Επίλυση</u>: Υποθέτοντας λύσεις της μορφής $y(x) = x^r$ και αντικαθιστώντας στη ΔΕ παίρνουμε τη εξίσωση δεικτών: $r(r-1) + \frac{3}{2}r - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow r_1 = \frac{1}{2},\ r_2 = -1.$

Επομένως, η γενική λύση της ΔΕ είναι: $y(x) = c_1 x^{\frac{1}{2}} + c_2 x^{-1}, x > 0.$
Παρατηρούμε ότι η λύση x^{-1} καθίσταται μη φραγμένη για $x \to 0$.



Σχ. 1

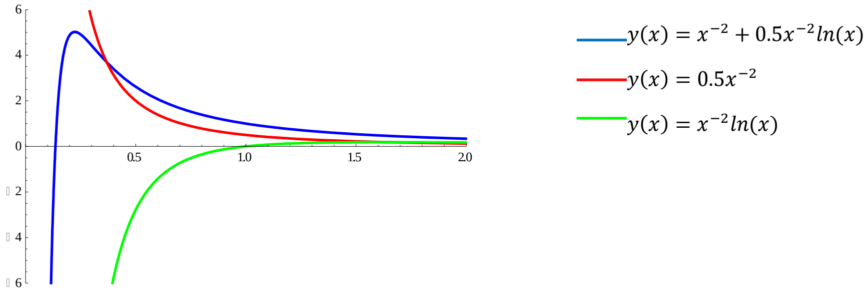
β) Αν $r_1 = r_2$, τότε μία λύση της ΔΕ (5) είναι $y_1(x) = x^{r_1}$. Με την μέθοδο υποβιβασμού τάξης μπορούμε να προσδιορίσουμε το δεύτερο μέλος του θεμελιώδους συνόλου λύσεων της (5), $y_2(x) = x^{r_1} lnx,\ x > 0$.
Ένας διαφορετικός τρόπος να προσδιορίσουμε την $2^η$ λύση είναι ο εξής:
Το αριστερό μέλος της ΔΕ (5) με την βοήθεια του διαφορικού τελεστή:
$L = x^2D^2 + xp_oD + q_o$ γράφεται $L[y(x)]$.
Αν θεωρήσουμε ότι $y(x) = x^r$ τότε έχουμε $L[x^r] = f(r)x^r = (r - r_1)^2 x^r$, στην περίπτωση που $r_1 = r_2$.
Παραγωγίζοντας την τελευταία σχέση ως προς r έχουμε

$$\frac{\partial}{\partial r} L[x^r] = L\left[\frac{\partial x^r}{\partial r}\right] = L\left[\frac{\partial e^{rlnx}}{\partial r}\right] = L[x^r lnx] = 2(r - r_1)x^r + (r - r_1)^2 x^r lnx \qquad (8)$$

Η σχέση (8) για $r = r_1$ μας δίνει ότι $L[x^{r_1} lnx] = 0$, άρα μία δεύτερη λύση της (5) είναι η $y_2(x) = x^{r_1} lnx$.
Η γενική λύση της ΔΕ είναι: $y(x) = c_1 x^{r_1} + c_2 x^{r_1} lnx, \quad x > 0 \qquad (9)$
Καθώς το $x \to 0$ (στο ιδιάζον σημείο), μία λύση της μορφής $x^{r_1} lnx$ τείνει στο μηδέν αν το $r_1 > 0$, ενώ γίνεται μη φραγμένη αν $r_1 \leq 0$.

<u>Παράδειγμα 2:</u> Να βρεθεί η γενική λύση της ΔΕ: $x^2y'' + 5xy' + 4y = 0,\ x > 0.$

<u>Επίλυση</u>: Υποθέτοντας λύσεις της μορφής $y(x) = x^r$ και αντικαθιστώντας στη ΔΕ παίρνουμε τη εξίσωση δεικτών: $r(r-1) + 5r + 4 = 0 \Rightarrow r_1 = r_2 = -2.$
Επομένως, η γενική λύση της ΔΕ είναι: $y(x) = c_1x^{-2} + c_2x^{-2}lnx, \quad x > 0.$
Και οι δύο λύσεις της ΔΕ είναι μη φραγμένες για $x \to 0.$



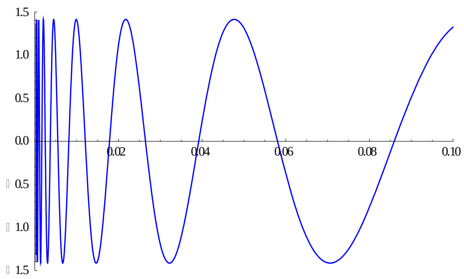
Σχ. 2

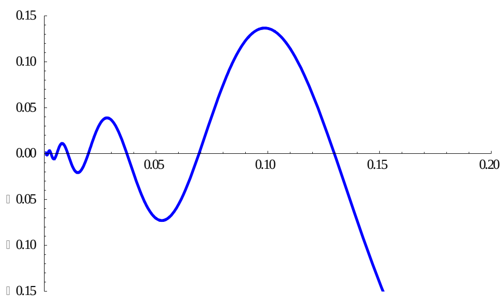
γ) Αν $r_{1,2} = \kappa \pm i\mu$ τότε μία μιγαδική λύση της ΔΕ (5) είναι η

$$\tilde{y}_1(x) = x^{\kappa+i\mu} = x^\kappa x^{i\mu} = x^\kappa e^{i\mu lnx} = x^\kappa(cos(\mu lnx) + isin(\mu lnx)) \qquad (10)$$

Επομένως, έχουμε δύο πραγματικές λύσεις της ΔΕ, οι οποίες είναι γραμμικά ανεξάρτητες, τις $y_1(x) = x^\kappa cos(\mu lnx)$ και $y_2(x) = x^\kappa sin(\mu lnx)$.
Η γενική λύση της ΔΕ είναι: $y(x) = x^\kappa\{c_1cos(\mu lnx) + c_2sin(\mu lnx)\}, \quad x > 0. \qquad (11)$

<u>Παράδειγμα 3:</u> Να βρεθεί η γενική λύση της ΔΕ: $x^2y'' + xy' + y = 0,\ x > 0.$
<u>Επίλυση</u>: Υποθέτοντας λύσεις της μορφής $y(x) = x^r$ και αντικαθιστώντας στη ΔΕ παίρνουμε τη εξίσωση δεικτών: $r(r-1) + r + 1 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = \pm i.$
Επομένως, η γενική λύση της ΔΕ είναι: $y(x) = c_1cos(lnx) + c_2sin(lnx), \quad x > 0,$
που παριστάνει μία ταλάντωση σταθερού πλάτους (εφόσον δεν υπάρχει ο όρος x^κ) με συχνότητα η οποία αυξάνεται καθώς το $x \to 0$. (Σχ.3)





Σχ. 3 Σχ. 4

<u>Παράδειγμα 4:</u> Να βρεθεί η γενική λύση της ΔΕ: $x^2y'' - xy' + 26y = 0,\ x > 0.$
<u>Επίλυση</u>: Υποθέτοντας λύσεις της μορφής $y(x) = x^r$ και αντικαθιστώντας στη ΔΕ παίρνουμε τη εξίσωση δεικτών: $r(r-1) - r + 26 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = 1 \pm 5i.$
Επομένως, η γενική λύση της ΔΕ είναι: $y(x) = x[c_1cos(5lnx) + c_2sin(5lnx)], \quad x > 0,$
που είναι μια συνάρτηση η οποία τείνει στο μηδέν (εφόσον το $\kappa > 0$) και ταλαντώνεται ολοένα ταχύτερα καθώς το $x \to 0$. (Σχ. 4)

Μπορούμε να λάβουμε πραγματικές λύσεις της εξίσωσης Euler στο διάστημα $x < 0$ κάνοντας την ακόλουθη αλλαγή μεταβλητών. Έστω ότι $x = -\xi$, όπου $\xi > 0$ και $y(x) = u(\xi)$. Για τις παραγώγους της συνάρτησης $y(x)$ έχουμε

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\xi}\frac{d\xi}{dx} = -\frac{du}{d\xi}$ και $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{d\xi}\left(-\frac{du}{d\xi}\right)\frac{d\xi}{dx} = \frac{d^2u}{d\xi^2}$

Οπότε η ΔΕ (4) για $x < 0$ παίρνει τη μορφή:

$$\xi^2 u'' - \xi p_o(-u') + q_o u = 0 \Rightarrow$$

$$\xi^2 u'' + \xi p_o u' + q_o u = 0, \;\; \xi > 0 \qquad (12)$$

που είναι της ίδιας μορφής με την (5).

Από τις εξισώσεις (7), (9), και (11) έχουμε

$$u(\xi) = \begin{cases} c_1\xi^{r_1} + c_2\xi^{r_2}, \alpha\nu\; r_1 \neq r_2,\; r_1, r_2 \in \mathbb{R} \\ c_1\xi^{r_1} + c_2\xi^{r_1} ln\xi, \;\; \alpha\nu\; r_1 = r_2 \\ \xi^{\kappa}\{c_1 cos(\mu ln\xi) + c_2 sin(\mu ln\xi)\},\;\; \alpha\nu\;\; r_{1,2} = \kappa \pm i\mu \end{cases} \qquad \gamma\iota\alpha\; \xi > 0 \qquad (13)$$

Για να λάβουμε το u σαν συνάρτηση του x αντικαθιστούμε στις εξισώσεις (13) το ξ με το $(-x)$.

Μπορούμε να γράψουμε τα αποτελέσματα για $x > 0$ και για $x < 0$ με ενιαίο τρόπο ως ακολούθως:

$$y(x) = \begin{cases} c_1|x|^{r_1} + c_2|x|^{r_2}, \;\; \alpha\nu\; r_1 \neq r_2,\; r_1, r_2 \in \mathbb{R} \\ c_1|x|^{r_1} + c_2|x|^{r_1} ln|x|, \;\; \alpha\nu\; r_1 = r_2 \\ |x|^{\kappa}\{c_1 cos(\mu ln|x|) + c_2 sin(\mu ln|x|)\},\;\; r_{1,2} = \kappa \pm i\mu \end{cases} \qquad |x| \neq 0 \;\; (14)$$

Ένας διαφορετικός τρόπος επίλυσης της διαφορικής εξίσωσης Euler βασίζεται στην αλλαγή της ανεξάρτητης μεταβλητής $x = e^t \Rightarrow t = lnx, x > 0$. [Αν $x < 0$ τότε θέτουμε $-x = e^t \Rightarrow t = \ln(-x)$].

Αν $y(x) = u(t)$, τότε έχουμε

$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{du}{dt}e^{-t}$ και $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{du}{dt}e^{-t}\right)\frac{dt}{dx} = \left(\frac{d^2u}{dt^2} - \frac{du}{dt}\right)e^{-2t}$.

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση (5) προκύπτει

$$e^{2t}\left(\frac{d^2u}{dt^2} - \frac{du}{dt}\right)e^{-2t} + e^t p_o \frac{du}{dt}e^{-t} + q_o u = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{d^2u}{dt^2} + (p_o - 1)\frac{du}{dt} + q_o u = 0 \qquad (15)$$

Που είναι μία ΔΕ ως προς $u(t)$ με σταθερούς συντελεστές και η οποία δέχεται λύσεις της μορφής $u(t) = e^{\lambda t}$. Η ΧΕ της (15) είναι $\lambda^2 + (p_o - 1)\lambda + q_o = 0$ η οποία είναι ακριβώς η ίδια με την εξίσωση δεικτών.

Οι λύσεις της (15) ανάλογα με τις ιδιοτιμές της ΔΕ (15) είναι

$$u(t) = \begin{cases} c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}, \;\; \alpha\nu\; \lambda_1 \neq \lambda_2,\; \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \\ c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 t e^{\lambda_1 t}, \;\; \alpha\nu\; \lambda_1 = \lambda_2 \\ e^{kt}\{c_1 cos(\mu t) + c_2 sin(\mu t)\}, \quad \alpha\nu\;\; \lambda_{1,2} = \kappa \pm i\mu \end{cases} \qquad (16)$$

Στις εξισώσεις (16) αν θέσουμε όπου $t = lnx$, θα πάρουμε τις λύσεις (7), (9) και (11) αντίστοιχα για τις τρείς περιπτώσεις, (α), (β) και (γ).

<u>Παράδειγμα 5:</u> Να βρεθεί η γενική λύση της ΔΕ:

$$x^2 y'' - 3xy' + 4y = sin(2lnx) + \frac{x^2}{(lnx)^2}, \;\; x > 0.$$

<u>Επίλυση:</u> Η ΔΕ είναι μία μη ομογενής εξίσωση Euler. Η γενική λύση της θα είναι $y_{γεν}^{μη\ ομ}(x) = y_{γεν}^{ομ}(x) + y_{ειδ}(x)$.

<u>1ος τρόπος επίλυσης</u>: Για την ομογενή θεωρούμε λύσεις της μορφής x^r και αντικαθιστώντας στη ΔΕ παίρνουμε την εξίσωση δεικτών:

$r(r-1) - 3r + 4 = 0 \Rightarrow r_1 = r_2 = 2$ οι εκθέτες ιδιομορφίας

Άρα η γενική λύση της αντίστοιχης ομογενούς είναι

$$y_{γεν}^{ομ}(x) = c_1x^2 + c_2x^2lnx \qquad (17)$$

Για τον προσδιορισμό της ειδικής λύσης θα πρέπει να εργαστούμε με την μέθοδο Lagrange διότι η ΔΕ έχει μεταβλητούς συντελεστές.

$$y_{ειδ}(x) = u_1(x)x^2 + u_2(x)x^2lnx \qquad (18)$$

Η ορίζουσα Wronski των λύσεων της ομογενούς είναι $W(x) = \begin{vmatrix} x^2 & x^2lnx \\ 2x & 2xlnx + x \end{vmatrix} = x^3$

Οι συναρτήσεις $u_1(x)$ και $u_2(x)$ θα προσδιορισθούν από τα ολοκληρώματα:

$$u_1(x) = -\int \frac{x^2lnx}{x^3}\left(\frac{sin(2lnx)}{x^2} + \frac{1}{(lnx)^2}\right)dx = -\int \frac{lnx\,sin(2lnx)}{x^3}dx - \int \frac{1}{xlnx}dx \qquad (19)$$

$$u_2(x) = \int \frac{x^2}{x^3}\left(\frac{sin(2lnx)}{x^2} + \frac{1}{(lnx)^2}\right)dx = \int \frac{sin(2lnx)}{x^3}dx + \int \frac{1}{x(lnx)^2}dx \qquad (20)$$

Ο υπολογισμός των ολοκληρωμάτων στις σχέσεις (19) και (20) είναι αρκετά πολύπλοκος.

<u>2ος τρόπος επίλυσης</u>: Θέτοντας $x = e^t$ και $y(x) = u(t)$, η ΔΕ μετασχηματίζεται σε μία μη ομογενή ΔΕ με σταθερούς συντελεστές

$$\frac{d^2u}{dt^2} - 4\frac{du}{dt} + 4u = sin2t + \frac{e^{2t}}{t^2} \qquad (21)$$

Η γενική λύση της ομογενούς είναι: $u_{γεν}^{ομ}(t) = c_1e^{2t} + c_2te^{2t}$. (22)

Η ορίζουσα Wronski για τις λύσεις e^{2t} και te^{2t} είναι: $W(t) = \begin{vmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ 2e^{2t} & e^{2t} + 2te^{2t} \end{vmatrix} = e^{4t}$

Η ειδική λύση της μη ομογενούς για το μη ομογενή όρο $sin2t$ μπορεί να προσδιορισθεί με την μέθοδο των προσδιοριστέων συντελεστών, ενώ για το μη ομογενή όρο $\frac{e^{2t}}{t^2}$ θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο Lagrange.

Επομένως η μορφή της ειδικής λύσης είναι:

$u_{ειδ}(t) = u_{ειδ1}(t) + u_{ειδ2}(t) = A\,cos(2t) + Bsin(2t) + u_1(t)e^{2t} + u_2(t)te^{2t}$. (23)

Για την $u_{ειδ1}(t) = A\,cos(2t) + Bsin(2t)$ οι συντελεστές A, B προσδιορίζονται αντικαθιστώντας αυτήν στη ΔΕ: $\frac{d^2u}{dt^2} - 4\frac{du}{dt} + 4u = sin2t$, οπότε προκύπτει $A = 1/8$ και $B = 0$. Άρα $u_{ειδ1}(t) = \frac{1}{8}\cos(2t)$. (24)

Για την $u_{ειδ2}(t) = u_1(t)e^{2t} + u_2(t)te^{2t}$, οι συναρτήσεις $u_1(t)$ και $u_2(t)$ προσδιορίζονται από τα ολοκληρώματα

$$u_1(t) = -\int \frac{te^{2t}}{e^{4t}}\frac{e^{2t}}{t^2}dt = -\int \frac{1}{t}\,dt = -lnt$$

$$u_2(t) = \int \frac{e^{2t}}{e^{4t}}\frac{e^{2t}}{t^2}dt = \int \frac{1}{t^2}\,dt = -\frac{1}{t}$$

Άρα $u_{ειδ2}(t) = -e^{2t}lnt - \frac{1}{t}te^{2t} = -e^{2t}lnt - e^{2t}$. (25)

Επομένως, από τις σχέσεις (22), (24), και (25) έχουμε

$$u_{γεν}^{μη\ ομ}(t) = c_1e^{2t} + c_2te^{2t} + \frac{1}{8}cos(2t) - e^{2t}lnt, \qquad (26)$$

όπου ο όρος $-e^{2t}$ στην εξίσωση (25) έχει απορροφηθεί στη λύση της ομογενούς.
Από την εξίσωση (26), θέτοντας όπου $t = lnx$ έχουμε την λύση της αρχικής εξίσωσης

$$y_{\gamma\varepsilon\nu}^{\mu\eta\ o\mu}(x) = c_1x^2 + c_2x^2lnx + \frac{1}{8}cos(2lnx) - x^2ln(lnx). \qquad (27)$$

<u>B2. Λύσεις υπό μορφή δυναμοσειράς στη περιοχή κανονικού ιδιάζοντος σημείου</u>

Μετά από την μελέτη της ΔΕ Euler θα μελετήσουμε το γενικότερο πρόβλημα της επίλυσης της ΔΕ:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \qquad (1)$$

στη περιοχή ενός σημείου x_o το οποίο είναι κανονικό ιδιάζον σημείο της ΔΕ.
Όταν το σημείο x_o είναι κανονικό ιδιάζον σημείο της ΔΕ (1), τότε μπορούμε να 'αναζητήσουμε' μία γενίκευση της μεθόδου των δυναμοσειρών χωρίς να αλλάξουμε το κέντρο ανάπτυξης αυτών, έτσι ώστε να την εφαρμόσουμε στη περιοχή του ΚΙΣ.
Για ευκολία και χωρίς βλάβη της γενικότητας θα θεωρήσουμε ότι το ΚΙΣ είναι το $x_o = 0$.
Αν το $x_o \neq 0$, μπορούμε να μετασχηματίσουμε την εξίσωση σε μία άλλη θέτοντας $x - x_o = t$.
Εφόσον το $x_o = 0$ είναι ΚΙΣ έπεται ότι οι συναρτήσεις $xp(x)$ και $x^2q(x)$ είναι αναλυτικές στο μηδέν, άρα έχουν ανάπτυγμα Taylor με κέντρο το μηδέν. Έστω ότι

$xp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n\, x^n$ για $|x| < \rho_1$ [ο πρώτος όρος της σειράς είναι $p_o = \lim\limits_{x\to 0} xp(x)$]

$x^2q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n\, x^n$ για $|x| < \rho_2$. [ο πρώτος όρος της σειράς είναι $q_o = \lim\limits_{x\to 0} x^2q(x)$]

Προκειμένου να εμφανίσουμε τους όρους $xp(x)$ και $x^2q(x)$ πολλαπλασιάζουμε την ΔΕ (1) με x^2, οπότε προκύπτει η

$$x^2y'' + x\big(xp(x)\big)y' + \big(x^2q(x)\big)y = 0 \qquad (2)$$

$$x^2y'' + x(p_o + p_1x + \cdots)y' + (q_o + q_1x + \cdots)y = 0 \qquad (3)$$

Στη γενικότερη περίπτωση κάποιοι από τους συντελεστές p_i και q_i δεν θα είναι μηδέν.
Αν η (3) γραφεί στη μορφή

$$x^2y'' + xp_o(1 + \frac{p_1}{p_o}x + \cdots)y' + q_o(1 + \frac{q_1}{q_o}x + \cdots)y = 0$$

μπορούμε να δούμε ότι οι συντελεστές της ΔΕ (3) μπορούν να θεωρηθούν ως γινόμενα των συντελεστών της εξίσωσης Euler επί μία δυναμοσειρά. Φαίνεται λοιπόν εύλογο να αναζητήσουμε λύσεις της ΔΕ (2) υπό τη μορφή γινομένου 'λύσεων Euler' και δυναμοσειρών. Υποθέτουμε επομένως ότι η λύσεις της ΔΕ (2) είναι

$$y(x) = x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^{r+n},\ \ x > 0 \qquad (4)$$

όπου θεωρούμε ότι $a_o \neq 0$, ώστε το r να είναι ο εκθέτης του πρώτου όρου της σειράς και το a_o ο συντελεστής του.
[Για $x < 0$, κάνουμε την αντικατάσταση $x = -\xi$ με $\xi > 0$ όπως και στην εξίσωση Euler]

Για την επίλυση της ΔΕ (2) θα πρέπει να προσδιορίσουμε:

(i) τις τιμές του εκθέτη r για τις οποίες η ΔΕ (2) έχει λύσεις της μορφής (4)
(ii) την αναδρομική σχέση για τους συντελεστές a_n
(iii) την ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$

Υποθέτουμε ότι υπάρχει λύση της μορφής (4) και εστιάζουμε στον τρόπο υπολογισμού της.
Παραγωγίζουμε την υποτιθέμενη λύση (4) και έχουμε:

$y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(r+n)a_n\, x^{r+n-1}$, $y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(r+n)(r+n-1)a_n\, x^{r+n-2}$
και αντικαθιστούμε στη ΔΕ (3), οπότε έχουμε:
$\sum_{n=0}^{\infty}(r+n)(r+n-1)a_n\, x^{r+n} + (\sum_{n=0}^{\infty}(r+n)a_n\, x^{r+n})(\sum_{n=0}^{\infty} p_n\, x^n) +$
$(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^{r+n})(\sum_{n=0}^{\infty} q_n\, x^n) = 0.$
Κάνοντας χρήση του γινομένου Cauchy: $(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n)(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\, x^n) =$
$\sum_{n=0}^{\infty}(\sum_{k=0}^{n} a_k\, b_{n-k})x^n$, βρίσκουμε

$\sum_{n=0}^{\infty}(r+n)(r+n-1)a_n\, x^{r+n} + \sum_{n=0}^{\infty}\{\sum_{k=0}^{n}(r+k)a_k p_{n-k}\}x^{r+k+n-k} +$
$\sum_{n=0}^{\infty}\{\sum_{k=0}^{n} a_k q_{n-k}\}x^{r+k+n-k} = 0 \Rightarrow$

$\sum_{n=0}^{\infty}(r+n)(r+n-1)a_n\, x^{r+n} + \sum_{n=0}^{\infty}[\sum_{k=0}^{n}\{(r+k)p_{n-k} + q_{n-k}\}a_k]x^{r+n} = 0.$

Στα δύο αθροίσματα βγάζουμε τους όρους για $n = 0$ (στο 2$^{\text{ο}}$ άθροισμα όταν $n = 0 \Rightarrow k = 0$),

$\underline{r(r-1)a_o x^r} + \sum_{n=1}^{\infty}(r+n)(r+n-1)a_n\, x^{r+n} + \underline{(rp_o + q_o)a_o x^r} +$
$\sum_{n=1}^{\infty}[\sum_{k=0}^{n}\{(r+k)p_{n-k} + q_{n-k}\}a_k]x^{r+n} = 0 \Rightarrow$

$\{r(r-1) + rp_o + q_o\}a_o x^r + \sum_{n=1}^{\infty}[(r+n)(r+n-1)a_n + \sum_{k=0}^{n}\{(r+k)p_{n-k} +$
$q_{n-k}\}a_k]\, x^{r+n} = 0.$

Θέτουμε $r(r-1) + rp_o + q_o = f(r)$, και στο άθροισμα με δείκτη το k υπολογίζουμε το όρο για $k = n$,

$f(r)a_o x^r +$

$\sum_{n=1}^{\infty}\left[(r+n)(r+n-1)a_n + \underline{((r+n)p_o + q_o)a_n} + \sum_{k=0}^{n-1}\{(r+k)p_{n-k} + q_{n-k}\}a_k\right]x^{r+n} = 0 \Rightarrow$

$$f(r)a_o x^r + \sum_{n=1}^{\infty}[f(r+n)a_n + \sum_{k=0}^{n-1}\{(r+k)p_{n-k} + q_{n-k}\}a_k]x^{r+n} = 0 \Rightarrow$$

όπου $f(r+n) = (r+n)(r+n-1) + (r+n)p_o + q_o$.

Η τελευταία σχέση θα πρέπει να ισχύει για κάθε $x > 0$, επομένως έπεται ότι

$$f(r)a_o = 0 \Rightarrow f(r) = 0, \qquad a_o \text{ αυθαίρετο} \tag{5}$$
$$f(r+n)a_n = -\sum_{k=0}^{n-1}\{(r+k)p_{n-k} + q_{n-k}\}a_k\,, \ n \geq 1 \tag{6}$$

όπου $f(r) = r(r-1) + p_o r + q_o = 0$ είναι η εξίσωση δεικτών της οποίας οι ρίζες προσδιορίζουν τους εκθέτες ιδιομορφίας r_1, r_2. Οι εκθέτες ιδιομορφίας καθορίζουν την συμπεριφορά των λύσεων στη περιοχή του ιδιάζοντος σημείου. Οι συντελεστές p_o, q_o είναι οι πρώτοι όροι των σειρών για τις συναρτήσεις $xp(x)$ και $x^2 q(x)$ αντίστοιχα,
[$p_o = \lim_{x\to 0} xp(x)$ και $q_o = \lim_{x\to 0} x^2 q(x)$].
Η σχέση (6) είναι η αναδρομική σχέση η οποία θα εφαρμοστεί για $r = r_1$ και $r = r_2$ για τον προσδιορισμό των συντελεστών $a_n(r_1)$ και $a_n(r_2)$ συναρτήσει των προηγούμενων συντελεστών $a_i, i = 0,1, \dots n-1$.

Θα δείξουμε τώρα ότι η μόνη κοινή εξασφάλιση για όλες τις περιπτώσεις της μορφής των δεικτών, είναι η δυνατότητα να λυθεί ακριβώς μία φορά το αναδρομικό σχήμα και να προσδιορισθεί ακριβώς μία λύση της μορφής: $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^{r+n}$ (4).
Αυτό είναι σαφές στην περίπτωση που η δείκτρια εξίσωση έχει διπλή ρίζα, τότε μία φορά μπορούμε να εφαρμόσουμε την σχέση (6) και επομένως μπορούμε να προσδιορίσουμε μία λύση της μορφής (4).

Όταν έχουμε δύο πραγματικές ρίζες r_1 και r_2, έστω $r_1 > r_2$, των οποίων η διαφορά είναι μη ακέραιος αριθμός τότε είμαστε σίγουροι ότι η αναδρομική σχέση θα είναι παραγωγική και για τους δύο εκθέτες ιδιομορφίας διότι ο πολλαπλασιαστικός παράγοντας κάθε νέου συντελεστή a_n δεν πρόκειται ποτέ να μηδενισθεί επιτρέποντας τον προσδιορισμό του συνοδεύοντος συντελεστή για κάθε $n \geq 1$. Δηλαδή $f(r_1+n) \neq 0,\ \forall n \geq 1$ *και* $f(r_2+n) \neq 0, \forall n \geq 1$ (διότι αν $f(r_2+n) = 0 \Rightarrow r_2+n = r_1 \Rightarrow r_1 - r_2 = n$).
Αντιθέτως, όταν η διαφορά δεικτών $r_1 - r_2$ είναι φυσικός αριθμός $l \in N$, τότε η αναδρομική διαδικασία είναι εξασφαλισμένη για το μεγαλύτερο δείκτη r_1, αλλά αμφισβητούμενη για τον μικρότερο δείκτη. Αυτό συμβαίνει διότι ο πολλαπλασιαστικός παράγοντας $f(r_2+n)$ θα μηδενισθεί όταν το βήμα n θα εξισωθεί με το φυσικό αριθμό l και τότε θα έχουμε να διαπραγματευθούμε την εξίσωση $0 \cdot a_l = \cdots$. Μόνο αν το δεύτερο μέλος είναι συμπτωματικά μηδενικό τότε καταλήγουμε σε ένα αόριστο σχήμα που μπορεί να βγει από το αδιέξοδο. Διαφορετικά καταλήγουμε σε αδύνατη σχέση που ακυρώνει την προσπάθεια μας να εφαρμόσουμε την τεχνική για δεύτερη φορά. Επομένως, στην περίπτωση που $r_1 - r_2 = l \in \mathbb{Z}^+$, το πρόβλημα είναι πιο σύνθετο, όσον αφορά την κατασκευή της 2ης γραμμικά ανεξάρτητης λύσης. Η αντιμετώπιση του προβλήματος αυτού οφείλεται στην ***θεωρία Frobenious***, η οποία είναι ιδιαίτερα πολύπλοκη.
Τα παραπάνω, όπως και τον τρόπο να παρακάμπτουμε την ενδεχόμενη αδυναμία να βρούμε δύο λύσεις της μορφής (4), μπορούμε να τα παρακολουθήσουμε στα επόμενα παραδείγματα.

Παράδειγμα 1: Να προσδιορισθεί το θεμελιώδες σύνολο λύσεων της ΔΕ:

$$xy'' + (x^2-3)y' - 2xy = 0, \qquad 0 < x < L \tag{1.1}$$

όπου $L > 0$.

Επίλυση: Οι συντελεστές της ΔΕ είναι: $p(x) = \frac{(x^2-3)}{x}$ και $q(x) = -2$. Η συνάρτηση $p(x)$ δεν ορίζεται στο $x_o = 0$, άρα δεν είναι αναλυτική στο μηδέν. Επομένως το σημείο $x_o = 0$ είναι ιδιάζον σημείο της ΔΕ. Όμως οι συναρτήσεις $xp(x) = (x^2-3)$ και $x^2q(x) = -2x^2$ είναι αναλυτικές στο μηδέν, άρα το σημείο $x_o = 0$ είναι κανονικό ιδιάζον σημείο της ΔΕ. Επιπλέον,

$\lim_{x\to 0} xp(x) = -3 = p_o$ και $\lim_{x\to 0} x^2q(x) = 0 = q_o$.

Θα αναζητήσουμε λύσεις της ΔΕ της μορφής: $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^{r+n}$ με $a_o \neq 0$. Ο σκοπός είναι να βρεθούν οι τιμές $r_i, i = 1,2$ -οι εκθέτες ιδιομορφίας- και οι αντίστοιχοι συντελεστές $a_n(r_i)$, έτσι ώστε να οδηγηθούμε στον προσδιορισμό δύο γραμμικά ανεξάρτητων λύσεων της ΔΕ: $y_i(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(r_i)\, x^{r_i+n}$. Όπως θα δούμε παρακάτω, ο προσδιορισμός των p_o και q_o μας δίνει την δυνατότητα να βρούμε τους δείκτες ιδιομορφίας χωρίς να λύσουμε τη διαφορική εξίσωση. Επίσης, θα πρέπει να προσδιορισθεί η ακτίνα σύγκλισης των αντίστοιχων δυναμοσειρών $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(r_i)\, x^n$.

Σημείωση: Οι ακτίνες σύγκλισης των δυναμοσειρών αυτών, όπως και στην περίπτωση του ομαλού σημείου, δεν μπορεί να είναι μικρότερη από την ελάχιστη ακτίνα σύγκλισης των δυναμοσειρών που αναπαριστούν τις αναλυτικές συναρτήσεις $xp(x)$ και $x^2q(x)$. Έτσι η ιδιάζουσα συμπεριφορά των λύσεων της ΔΕ στο μηδέν, αν υπάρχει, θα οφείλεται στους συντελεστές x^{r_i} με τους οποίους πολλαπλασιάζονται οι παραπάνω δυναμοσειρές.

Στο συγκεκριμένο παράδειγμα οι συναρτήσεις $xp(x)$ και $x^2q(x)$ είναι πολυωνυμικές και επομένως συγκλίνουν για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επομένως $L = \infty$.

Για να εμφανίσουμε τους συντελεστές $xp(x)$ και $x^2q(x)$ πολλαπλασιάζουμε τη ΔΕ (1.1) με x οπότε προκύπτει η ΔΕ:

$$x^2y'' + x(x^2 - 3)y' - 2x^2y = 0, x > 0 \tag{1.2}$$

Παραγωγίζουμε την υποτιθέμενη λύση: $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^{r+n}$,
$y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(r+n)a_n\, x^{r+n-1},\ y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(r+n)(r+n-1)a_n\, x^{r+n-2}$
και αντικαθιστούμε στη ΔΕ (1.2), οπότε έχουμε:
$\sum_{n=0}^{\infty}(r+n)(r+n-1)a_n\, x^{r+n} + \sum_{n=0}^{\infty}(r+n)a_n\, x^{r+n+2} -$

$3\sum_{n=0}^{\infty}(r+n)a_n\, x^{r+n} - 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^{r+n+2} = 0.$

Στον δεύτερο και στον τελευταίο όρο της παραπάνω εξίσωσης κάνουμε την μετατόπιση του δείκτη ($n + 2 = n' \Rightarrow n = n' - 2$) και μετονομάζοντας $n' = n$ προκύπτει:
$\sum_{n=0}^{\infty}(r+n)(r+n-1)a_n\, x^{r+n} + \sum_{n=2}^{\infty}(r+n-2)a_{n-2}\, x^{r+n} - 3\sum_{n=0}^{\infty}(r+n)a_n\, x^{r+n} -$
$2\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2}\, x^{r+n} = 0.$

Για το 1ο και 3ο άθροισμα υπολογίζουμε τους όρους για $n = 0$ και $n = 1$, οπότε έχουμε:

$\{r(r-1) - 3r\}a_o x^r + \{(r+1)r - 3(r+1)\}a_1 x^{r+1}\ +$
$\sum_{n=2}^{\infty}[\{(r+n)(r+n-1) - 3(r+n)\}a_n + \{(r+n-2) - 2\}a_{n-2}]x^{r+n} = 0 \Rightarrow$

$r(r-4)a_o x^r + (r+1)(r+1-4)a_1 x^{r+1}\ +$
$\sum_{n=2}^{\infty}[(r+n)(r+n-4)a_n + (r+n-4)a_{n-2}]x^{r+n} = 0 \Rightarrow$

$f(r)a_o x^r + f(r+1)a_1 x^{r+1} + \sum_{n=2}^{\infty}[f(r+n)a_n + (r+n-4)a_{n-2}]x^{r+n} = 0,$ (1.3)
όπου $f(r) = r(r-4)$.

Η τελευταία σχέση θα πρέπει να ισχύει για κάθε $x > 0$, επομένως έπεται ότι

$$f(r)a_o = 0 \Rightarrow f(r) = 0, a_o \neq 0, \tag{1.4}$$

$$f(r+1)a_1 = 0 \tag{1.5}$$

$$f(r+n)a_n + (r+n-4)a_{n-2} = 0, n = 2,3, \dots \tag{1.6}$$

Η σχέση (1.4) είναι η εξίσωση δεικτών, της οποίας οι ρίζες προσδιορίζουν τους εκθέτες ιδιομορφίας, ως ακολούθως

$$f(r) = r(r-4) = 0 \Rightarrow r_1 = 4, r_2 = 0. \tag{1.7}$$

Παρατήρηση 1.1: Έχοντας προσδιορίσει τα $p_o = -3, q_o = 0$ η δείκτρια εξίσωση για την αντίστοιχη εξίσωση Euler: $x^2y'' - 3y' = 0$, είναι η $f(r) = r(r-1) + p_o r + q_o = r(r-1) - 3r =$ $r(r-4) = 0$, δηλαδή ακριβώς η ίδια με την εξίσωση (1.7).

Από την σχέση (1.5) για $r = r_1 = 4$, και για $r = r_2 = 0$ έχουμε ότι

$$f(5)a_1 = 0 \Rightarrow a_1(r_1) = 0 \tag{1.8}$$

$$f(1)a_1 = 0 \Rightarrow a_1(r_2) = 0 \tag{1.9}$$

Η σχέση (1.5) είναι το αναδρομικό σχήμα το οποίο θα εφαρμόσουμε για κάθε δείκτη r_i με σκοπό να προσδιορίσουμε τους αντίστοιχους συντελεστές $a_n(r_i)$.

(i) Θα εξετάσουμε την πρώτη περίπτωση $r_1 = 4$. Από την σχέση (1.8) έπεται ότι $a_1 = 0$ διότι η $f(r)$ μηδενίζεται μόνο για $r = 4$ και $r = 0$.
Η σχέση (1.6): $f(r+n)a_n + (r+n-4)a_{n-2} = 0, n = 2,3,\ldots$ για $r_1 = 4$ γίνεται:

$$(r_1+n)(r_1+n-4)a_n = -(r_1+n-4)a_{n-2}, n \geq 2$$

$$(4+n)na_n = -na_{n-2}, \ \ n \geq 2$$

$$a_n = -\frac{a_{n-2}}{(n+4)}, n \geq 2 \qquad (1.10)$$

Η αναδρομική σχέση (1.10) είναι με βήμα 2, επομένως, όλοι οι συντελεστές με περιττό δείκτη $a_{2k+1} = 0, k \geq 1$, εφόσον προσδιορίζονται από το a_1που είναι μηδέν.
Για τους συντελεστές με άρτιο δείκτη, θέτοντας στην αναδρομική σχέση (1.10) όπου $n = 2k$ έχουμε: $a_{2k} = -\frac{a_{2k-2}}{2(k+2)}, k \geq 1$

$$\left.\begin{array}{l} a_2 = -\frac{a_o}{2\cdot 3} \\ a_4 = -\frac{a_2}{2\cdot 4} \\ \vdots \\ a_{2n} = -\frac{a_{2n-2}}{2(n+2)} \end{array}\right\}$$

Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη τις παραπάνω σχέσεις προσδιορίζουμε τα
$a_{2n} = \frac{2(-1)^n a_o}{2^n(n+2)!}$, $n \geq 1$.
Για $a_o = 1$, η πρώτη λύση, $y_1(x)$, του θεμελιώδους συνόλου λύσεων είναι η συνάρτηση:

$$y_1(x) = x^4 \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n x^{2n}}{2^n(n+2)!}\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2(-1)^n x^{2n+4}}{2^n(n+2)!} = 2\cdot 4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{x^2}{2}\right)^{n+2}}{(n+2)!} =$$

$$= 8\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\left(-\frac{x^2}{2}\right)^n}{(n)!} = 8\left\{e^{-\frac{x^2}{2}} - \left(1 - \frac{x^2}{2}\right)\right\}, \forall x \in \mathbb{R} \qquad (1.11)$$

Η τελευταία σχέση προκύπτει κάνοντας χρήση του αναπτύγματος Taylor της συνάρτησης $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$

Για $z = -\frac{x^2}{2}$, $e^{-\frac{x^2}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{x^2}{2}\right)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^n}{2^n n!} = 1 - \frac{x^2}{2\,1!} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-x^2)^n}{2^n n!}$,

θέτοντας $n = n' + 2$, έχουμε,
$e^{-\frac{x^2}{2}} = 1 - \frac{x^2}{2} + \sum_{n'=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^{n'+2}}{2^{n'+2}(n'+2)!} = 1 - \frac{x^2}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^{n+2}}{2^{n+2}(n+2)!} = 1 - \frac{x^2}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+4}}{2^{n+2}(n+2)!} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2^3}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2(-1)^n x^{2n+4}}{2^n(n+2)!} \Rightarrow 8\left\{e^{-\frac{x^2}{2}} - \left(1 - \frac{x^2}{2}\right)\right\} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2(-1)^n x^{2n+4}}{2^n(n+2)!}$.

(ii) Στη δεύτερη περίπτωση, $r_2 = 0$. Από την σχέση (1.9) έχουμε ότι $a_1 = 0$.
Η σχέση (1.6) για $r_2 = 0$ γίνεται:

$$(r_2+n)(r_2+n-4)a_n = -(r_2+n-4)a_{n-2}, n \geq 2$$

$$n(n-4)a_n = -(n-4)a_{n-2}, n \geq 2 \qquad (1.12)$$

Η αναδρομική σχέση (1.12) είναι με βήμα 2, επομένως όλοι οι συντελεστές με περιττό δείκτη $a_{2k+1} = 0, k \geq 1$, εφόσον προσδιορίζονται από το a_1που είναι μηδέν.
Για τους συντελεστές με άρτιο δείκτη, θέτοντας στην αναδρομική σχέση (1.12) όπου $n = 2k$ έχουμε: $2k(2k-4)a_{2k} = -(2k-4)a_{2k-2}, k \geq 1$

Δεν λύνουμε ως προς τον συντελεστή με τον μεγαλύτερο δείκτη πριν να δούμε τι προκύπτει για τις τιμές του k!!!

Για $k = 1, \quad -4a_2 = 2a_o \Rightarrow a_2 = -\frac{a_o}{2}$

Για $k = 2, \quad 0 \cdot a_4 = 0 \cdot a_2$ αόριστη σχέση, a_4 αυθαίρετο.

Αν επιλέξουμε το $a_4 = 0$, τότε όλοι οι επόμενοι συντελεστές μηδενίζονται και επομένως μία δεύτερη λύση της ΔΕ για $a_o = 1$ είναι:

$$y_2(x) = a_o + a_2x^2 = \left(1 - \frac{x^2}{2}\right), \forall x \in \mathbb{R} \tag{1.13}$$

Άρα η γενική λύση της ΔΕ είναι:

$$y(x) = c_1 e^{-\frac{x^2}{2}} + c_2\left(1 - \frac{x^2}{2}\right), x \neq 0 \tag{1.14}$$

Παρατηρήσεις: (α) Το μέρος $\left(1 - \frac{x^2}{2}\right)$ της λύσης $y_1(x)$ έχει απορροφηθεί στην έκφραση $c_2\left(1 - \frac{x^2}{2}\right)$ της εξίσωσης (1.14). Η γραμμική ανεξαρτησία των λύσεων $y_1(x)$ και $y_2(x)$ επιβεβαιώνεται μέσα από τον μη μηδενισμό της ορίζουσας Wronski αυτών:

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{-\frac{x^2}{2}} & 1 - \frac{x^2}{2} \\ -xe^{-\frac{x^2}{2}} & -x \end{vmatrix} = -x^3 e^{-\frac{x^2}{2}} \neq 0, \ x \neq 0.$$

(β) Αν θεωρήσουμε ότι το a_4 είναι αυθαίρετο τότε η $y_2(x)$ θα εμπεριείχε ένα πολλαπλάσιο της $y_1(x)$. Δηλαδή η $y_2(x) = a_o\left(1 - \frac{x^2}{2}\right) + a_4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2(-1)^n x^{2n+4}}{2^n (n+2)!}$, με a_o, a_4 αυθαίρετες σταθερές, που είναι η γενική λύση της ΔΕ.

(γ) Θα μπορούσαμε να ξεκινήσουμε από το μικρότερο δείκτη $r_2 = 0$, και έχοντας προσδιορίσει τη λύση $y_2(x) = \left(1 - \frac{x^2}{2}\right)$, να εφαρμόσουμε τη μέθοδο υποβιβασμού τάξης για να προσδιορίσουμε το άλλο μέλος του θεμελιώδους συνόλου λύσεων, δηλαδή την $y_1(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$. (Μπορείτε να το επιχειρήσετε).

<u>Παράδειγμα 2</u>: Να προσδιορισθεί το θεμελιώδες σύνολο λύσεων της ΔΕ:

$$x(1-x)y'' - 3xy' - y = 0, \ 0 < x < L, \tag{2.1}$$

όπου $L > 0$.

<u>Επίλυση:</u> Οι συντελεστές της ΔΕ είναι: $p(x) = \frac{-3}{1-x}$ και $q(x) = \frac{-1}{x(1-x)}$. Η συνάρτηση $q(x)$ δεν είναι αναλυτική στο $x_o = 0$. Επομένως το σημείο $x_o = 0$ είναι ιδιάζον σημείο της ΔΕ. Εξετάζουμε αν το $x_o = 0$ είναι κανονικό ιδιάζον σημείο της ΔΕ:

$$\lim_{x\to 0} xp(x) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{-3x}{1-x}\right) = 0 = p_o \text{ και } \lim_{x\to 0} x^2 q(x) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{-x}{(1-x)}\right) = 0 = q_o. \text{ (2.2)}$$

Από τις σχέσεις (2.2) έπεται ότι το μηδέν είναι κανονικό ιδιάζον σημείο της ΔΕ. Οι συναρτήσεις $xp(x), x^2q(x)$ είναι αναλυτικές στο μηδέν, και έχουν ανάπτυγμα Taylor γύρω από το μηδέν με ακτίνα σύγκλισης 1. Επομένως, αν αναζητήσουμε λύσει της μορφής $y(x) = x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, οι δυναμοσειρές θα συγκλίνουν τουλάχιστον για $|x| < 1$, δηλαδή το L είναι τουλάχιστον ίσο με 1.

Η δείκτρια εξίσωση για την αντίστοιχη εξίσωση Euler είναι: $f(r) = r(r-1) + p_o r + q_o = r(r-1) = 0 \Rightarrow r_1 = 1, r_2 = 0$ είναι οι εκθέτες ιδιομορφίας.

Για να εμφανίσουμε τους συντελεστές $xp(x)$ και $x^2q(x)$ πολλαπλασιάζουμε τη ΔΕ (2.1) με x οπότε προκύπτει η ΔΕ

$$x^2(1-x)y'' - 3x^2y' - xy = 0 \qquad (2.3)$$

Παραγωγίζουμε την υποψήφια λύση $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^{r+n}$

$y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(r+n)a_n\, x^{r+n-1},\ y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(r+n)(r+n-1)a_n\, x^{r+n-2}$

και αντικαθιστούμε στη ΔΕ (2.3), οπότε έχουμε:

$\sum_{n=0}^{\infty}(r+n)(r+n-1)a_n\, x^{r+n} - \sum_{n=0}^{\infty}(r+n)(r+n-1)a_n\, x^{r+n+1} +$

$-3\sum_{n=0}^{\infty}(r+n)a_n\, x^{r+n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^{r+n+1} = 0 \Rightarrow$

$\sum_{n=0}^{\infty}(r+n)(r+n-1)a_n\, x^{r+n} - \sum_{n=0}^{\infty}[(r+n)(r+n-1) + 3(r+n) + 1]\, a_n x^{r+n+1} = 0.$

Στον 2 όρο της παραπάνω εξίσωσης κάνουμε την μετατόπιση του δείκτη ($n+1 = n'$) και μετονομάζοντας $n' = n$ προκύπτει:

$\sum_{n=0}^{\infty}(r+n)(r+n-1)a_n\, x^{r+n} -$

$\sum_{n=1}^{\infty}[(r+n-1)(r+n-2) + 3(r+n-1) + 1]a_{n-1}\, x^{r+n} = 0 \Rightarrow$

$\{r(r-1)\}a_o x^r +$

$\sum_{n=1}^{\infty}[(r+n)(r+n-1)a_n - \{(r+n-1)(r+n+1) + 1\}a_{n-1}]x^{r+n} = 0 \Rightarrow$

$$f(r)a_o x^r + \sum_{n=1}^{\infty}[f(r+n)a_n - \{(r+n-1)(r+n+1) + 1\}a_{n-1}]x^{r+n} = 0, \quad (2.4)$$

όπου $f(r) = r(r-1)$.

Η τελευταία σχέση θα πρέπει να ισχύει για κάθε $x > 0$, επομένως έπεται ότι

$$f(r)a_o = 0 \Rightarrow f(r) = 0, a_o \neq 0, \qquad (2.5)$$

$$f(r+n)a_n - \{(r+n-1)(r+n+1) + 1\}a_{n-1} = 0, n = 1,2,3,\ldots \qquad (2.6)$$

Η σχέση (2.5) είναι η εξίσωση δεικτών, της οποίας οι ρίζες προσδιορίζουν τους εκθέτες ιδιομορφίας, ως ακολούθως

$$f(r) = r(r-1) = 0 \Rightarrow r_1 = 1, r_2 = 0. \qquad (2.7)$$

Η σχέση (2.6) είναι το αναδρομικό σχήμα το οποίο θα εφαρμόσουμε για κάθε δείκτη r_i με σκοπό να προσδιορίσουμε τους αντίστοιχους συντελεστές $a_n(r_i)$.

(i) Θα εξετάσουμε την πρώτη περίπτωση $r_1 = 1$. Η σχέση (2.6) για $r_1 = 1$ γίνεται:

$$(r_1+n)(r_1+n-1)a_n = \{(r_1+n-1)(r_1+n+1) + 1\}a_{n-1}, n = 1,2,3,\ldots$$

$$(1+n)na_n = \{n(n+2) + 1\}a_{n-1} = (n+1)^2 a_{n-1}, n = 1,2,3,\ldots$$

$$a_n = \frac{(n+1)}{n}a_{n-1}, \qquad n = 1,2,3,\ldots$$

Για $n = 1, a_1 = \frac{2}{1}\cdot a_o$

Για $n = 2, a_2 = \frac{3}{2}\cdot a_1$

$\vdots$

Για $n = n, a_n = \frac{(n+1)}{n}a_{n-1}$

Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη τις παραπάνω σχέσεις, προκύπτει ότι:

$$a_n = \frac{(n+1)!}{n!}a_{n-1} = (n+1)a_o, \qquad n \geq 1$$

Επιλέγοντας $a_o = 1$, η πρώτη λύση, $y_1(x)$, του θεμελιώδους συνόλου λύσεων της ΔΕ είναι η συνάρτηση:

$$y_1(x) = x[1 + \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)x^n] = x\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n \qquad (2.8)$$

Εφαρμόζοντας το κριτήριο του λόγου, $\lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)}{n+1} = 1$, έχουμε ότι η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς $y_1(x) = x\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$ είναι ίση με 1.
Η $y_1(x)$ μπορεί να γραφεί σε κλειστή μορφή αν κάνουμε χρήση του αναπτύγματος Taylor της συνάρτησης $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$. Πολλαπλασιάζοντας με x έχουμε $\frac{x}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^{n+1}$ και παραγωγίζοντας ως προς x, $\left(\frac{x}{1-x}\right)' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^{n+1}\right)' \Rightarrow \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$.
Άρα $y_1(x) = \frac{x}{(1-x)^2}$, $x \neq 1$, είναι λύση της ΔΕ και έξω από το διάστημα που αυτή γράφεται στη $x\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$.

(ii) Στη δεύτερη περίπτωση $r_2 = 0$. Η αναδρομική σχέση (2.6) για $r_2 = 0$ γίνεται:

$$(r_2+n)(r_2+n-1)a_n = \{(r_2+n-1)(r_2+n+1)+1\}a_{n-1}, n = 1,2,3,\dots$$
$$n(n-1)a_n = \{(n-1)(n+1)+1\}a_{n-1}, n = 1,2,3\dots$$
$$n(n-1)a_n = n^2 a_{n-1}, n = 1,2,3\dots$$
$$(n-1)a_n = n a_{n-1}, n = 1,2,3\dots$$

Για $n = 1 \quad 0 \cdot a_1 = a_o \Rightarrow a_o = 0$, άτοπο διότι $a_o \neq 0$
<u>Επομένως, δεν υπάρχει λύση η οποία μπορεί να γραφεί υπό μορφή δυναμοσειράς.</u>

Για να προσδιορίσουμε την δεύτερη λύση θα μπορούσαμε να εφαρμόσουμε την μέθοδο του υποβιβασμού τάξης.

<u>*Μέθοδος υποβιβασμού τάξης*</u>

$$y_2(x) = u(x)y_1(x) \Rightarrow y_2' = u'\,y_1 + uy_1' \Rightarrow y_2'' = u''\,y_1 + 2u'y_1' + uy_1''$$

Αντικαθιστούμε στη ΔΕ και έχουμε:

$$x(1-x)(u''\,y_1 + 2u'y_1' + uy_1'') - 3x(u'\,y_1 + uy_1') - uy_1 = 0 \Rightarrow$$
$$u''x(1-x)\,y_1 + u'(2x(1-x)\,y_1' - 3x\,y_1) + u(x(1-x)y_1'' - 3xy_1' - y_1) = 0 \Rightarrow$$
$$u''x(1-x)\,y_1 + u'(2x(1-x)\,y_1' - 3x) = 0 \Rightarrow$$
$$u'' + u'\left(\frac{2\,y_1'}{y_1} - 3\frac{y_1}{(1-x)}\right) = 0 \Rightarrow u' = e^{-\int\left(\frac{2\,y_1'}{y_1} - 3\frac{1}{(1-x)}\right)dx} = y_1^{-2}\frac{1}{(x-1)^3} = \frac{x-1}{x^2} \Rightarrow$$
$$u = \int \frac{x-1}{x^2}dx = ln|x| + \frac{1}{x}$$

Άρα $y_2(x) = u(x)y_1(x) = y_1(x)ln|x| + y_1(x)\frac{1}{x} = \frac{x}{(1-x)^2}ln|x| + \frac{1}{(1-x)^2}$
Παρατηρούμε ότι η $y_2(x)$ δεν είναι της μορφής $x^r\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ διότι περιλαμβάνει τον λογαριθμικό όρο $y_1(x)ln|x|$.
Η γενική λύση της ΔΕ είναι:

$$y(x) = c_1\frac{x}{(1-x)^2} + c_2\left[\frac{x}{(1-x)^2}ln|x| + \frac{1}{(1-x)^2}\right], x \neq 0,1$$

Μπορεί να αποδειχθεί ότι όταν η διαφορά των δεικτών $r_1 - r_2 \in \mathbb{N}$, τότε η δεύτερη λύση είναι της μορφής:

$$y_2(x) = \alpha y_1(x)lnx + x^{r_2}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n(r_2)x^n\right], \quad x > 0 \qquad (2.9)$$

όπου η σταθερά α μπορεί να είναι μηδέν ή $\alpha \neq 0$. Αν $\alpha = 0$, υπάρχει λύση $y_2(x)$ υπό μορφή γενικευμένης δυναμοσειράς. Αν $\alpha \neq 0$, τότε η $y_2(x)$ περιλαμβάνει πάντα τον λογαριθμικό όρο.

Στο παράδειγμα 2, για τον προσδιορισμό της $y_2(x)$ εναλλακτικά μπορούμε να αντικαταστήσουμε την (2.9) στη ΔΕ και να προσδιορίσουμε τόσο τους συντελεστές b_nαλλά και τη σταθερά α.

<u>**Παράδειγμα 3**</u>: Να προσδιορισθεί το θεμελιώδες σύνολο λύσεων της ΔΕ:

$$xy'' - (x+2)y' + 3y = 0,\ \ 0 < x < L, \tag{3.1}$$

όπου $L > 0$.

<u>Επίλυση:</u> Οι συντελεστές της ΔΕ είναι: $p(x) = \frac{-(x+2)}{x}$ και $q(x) = \frac{3}{x}$. Οι συναρτήσεις $p(x)$ και $q(x)$ δεν είναι αναλυτικές στο $x_o = 0$. Επομένως το σημείο $x_o = 0$ είναι ιδιάζον σημείο της ΔΕ. Εξετάζουμε αν το $x_o = 0$ είναι κανονικό ιδιάζον σημείο της ΔΕ:

$$\lim_{x\to 0} xp(x) = \lim_{x\to 0}(-x-2) = -2 = p_o \text{ και } \lim_{x\to 0} x^2 q(x) = \lim_{x\to 0} 3x = 0 = q_o. \tag{3.2}$$

Από τις σχέσεις (3.2) έπεται ότι το μηδέν είναι κανονικό ιδιάζον σημείο της ΔΕ. Οι συναρτήσεις $xp(x), x^2q(x)$ ως πολυωνυμικές συγκλίνουν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και επομένως $L = \infty$.

Η δείκτρια εξίσωση για την αντίστοιχη εξίσωση Euler είναι: $f(r) = r(r-1) + p_o r + q_o = r(r-1) - 2r = 0 \Rightarrow r(r-3) = 0 \Rightarrow r_1 = 3, r_2 = 0$ είναι οι εκθέτες ιδιομορφίας.

Για να εμφανίσουμε τους συντελεστές $xp(x)$ και $x^2q(x)$ πολλαπλασιάζουμε τη ΔΕ (3.1) με x οπότε προκύπτει η ΔΕ

$$x^2y'' - x(x+2)y' + 3xy = 0 \tag{3.3}$$

Παραγωγίζουμε την υποτιθέμενη λύση $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^{r+n}$

$y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(r+n)a_n\, x^{r+n-1},\ \ y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(r+n)(r+n-1)a_n\, x^{r+n-2}$

και αντικαθιστούμε στη ΔΕ (3.3), οπότε έχουμε:

$\sum_{n=0}^{\infty}(r+n)(r+n-1)a_n\, x^{r+n} - \sum_{n=0}^{\infty}(r+n)a_n\, x^{r+n+1} - 2\sum_{n=0}^{\infty}(r+n)a_n\, x^{r+n} + 3\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^{r+n+1} = 0.$

Στον δεύτερο και στον τελευταίο όρο της παραπάνω εξίσωσης κάνουμε την μετατόπιση του δείκτη ($n+1 = n'$) και μετονομάζοντας $n' = n$ προκύπτει:

$\sum_{n=0}^{\infty}(r+n)(r+n-1)a_n\, x^{r+n} - \sum_{n=1}^{\infty}(r+n-1)a_{n-1}\, x^{r+n} - 2\sum_{n=0}^{\infty}(r+n)a_n\, x^{r+n} + 3\sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}\, x^{r+n} = 0 \Rightarrow$

$\{r(r-1) - 2r\}a_o x^r + \sum_{n=1}^{\infty}[\{(r+n)(r+n-1) - 2(r+n)\}a_n - \{(r+n-1) - 3\}a_{n-1}]x^{r+n} = 0 \Rightarrow$

$\{r(r-3)\}a_o x^r + \sum_{n=1}^{\infty}[(r+n)(r+n-3)a_n - (r+n-4)a_{n-1}]x^{r+n} = 0 \Rightarrow$

$$f(r)a_o x^r + \sum_{n=1}^{\infty}[f(r+n)a_n - (r+n-4)a_{n-1}]x^{r+n} = 0,\ \ x > 0. \tag{3.4}$$

όπου $f(r) = r(r-3)$.

Η τελευταία σχέση θα πρέπει να ισχύει για κάθε $x > 0$, επομένως έπεται ότι

$$f(r)a_o = 0 \Rightarrow f(r) = 0, a_o \neq 0, \tag{3.5}$$

$$f(r+n)a_n - (r+n-4)a_{n-1} = 0, n = 1,2,3,\dots \tag{3.6}$$

Η σχέση (3.5) είναι η εξίσωση δεικτών, της οποίας οι ρίζες προσδιορίζουν τους εκθέτες ιδιομορφίας, ως ακολούθως

$$f(r) = r(r-3) = 0 \Rightarrow r_1 = 3, r_2 = 0. \tag{3.7}$$

Η σχέση (3.6) είναι το αναδρομικό σχήμα το οποίο θα εφαρμόσουμε για κάθε δείκτη r_i με σκοπό να προσδιορίσουμε τους αντίστοιχους συντελεστές $a_n(r_i)$.
(ii) Θα εξετάσουμε την πρώτη περίπτωση $r_1 = 3$. Η σχέση (3.6) για $r_1 = 3$ γίνεται:

$$(r_1+n)(r_1+n-3)a_n = (r_1+n-4)a_{n-1}, n = 1,2,3,\ldots$$

$$(3+n)na_n = (n-1)a_{n-1}, n = 1,2,3,\ldots$$

$$a_n = \frac{(n-1)}{n(n+3)}a_{n-1}, \qquad n = 1,2,3,\ldots$$

Για $n = 1, a_1 = 0 \cdot a_o = 0$. Επομένως, όλοι οι συντελεστές είναι μηδενικοί εκτός από το a_o. Επιλέγοντας $a_o = 1$, η πρώτη λύση, $y_1(x)$, του θεμελιώδους συνόλου λύσεων της ΔΕ είναι η συνάρτηση:

$$y_1(x) = x^3, x \in \mathbb{R} \tag{3.8}$$

(iii) Στη δεύτερη περίπτωση $r_2 = 0$. Η αναδρομική σχέση (3.6) για $r_2 = 0$ γίνεται:

$$(r_2+n)(r_2+n-3)a_n = (r_2+n-4)a_{n-1}, n = 1,2,3\ldots$$

$$n(n-3)a_n = (n-4)a_{n-1}, n = 1,2,3\ldots$$

Για $n = 1 \quad (-2)a_1 = (-3)a_o \Rightarrow a_1 = \frac{3}{2}a_o$

Για $n = 2 \quad (-2)a_2 = (-2)a_1 \Rightarrow a_2 = a_1 = \frac{3}{2}a_0$

Για $n = 3 \qquad 0 \cdot a_3 = (-1)a_2$ αδύνατον, διότι αν το $a_2 = 0 \Rightarrow a_0 = 0$.
<u>Επομένως, δεν υπάρχει λύση η οποία μπορεί να γραφεί υπό μορφή δυναμοσειράς.</u>

Για να προσδιορίσουμε την δεύτερη λύση θα μπορούσαμε να εφαρμόσουμε την μέθοδο του υποβιβασμού τάξης.

Εναλλακτικά, αποδεικνύεται ότι όταν η διαφορά των δεικτών $r_1 - r_2 \in \mathbb{N}$, τότε η δεύτερη λύση είναι της μορφής:

$$y_2(x) = \alpha y_1(x)lnx + x^{r_2}[1 + \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n(r_2)x^n], \quad x > 0 \tag{3.9}$$

όπου η σταθερά α μπορεί να είναι μηδέν. Αντικαθιστώντας τη (3.9) στη ΔΕ προσδιορίζουμε τους συντελεστές b_nαλλά και τη σταθερά α.

-Στη προκειμένη περίπτωση θα εφαρμόσουμε την μέθοδο υποβιβασμού τάξης.
Υποθέτουμε ότι $y_2(x) = u(x)x^3$
και αντικαθιστούμε στη ΔΕ (3.1), οπότε προκύπτει ότι: $u'' + \left(\frac{4}{x} - 1\right)u' = 0$. Επιλύοντας τη τελευταία ΔΕ, βρίσκουμε ότι $u' = e^x x^{-4} \Rightarrow u = \int e^x x^{-4}dx = \int \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n-4}}{n!}dx =$
$\int (\frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{2!x^2} + \frac{1}{3!x} + \sum_{n=4}^{\infty} \frac{x^{n-4}}{n!})dx = -\frac{1}{3x^3} - \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{2!x} + \frac{1}{3!}lnx + \sum_{n=4}^{\infty} \frac{x^{n-3}}{(n-3)n!}$

Άρα $y_2(x) = u(x)x^3 = \frac{1}{3!}x^3 lnx - \frac{1}{3} - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2!} + \sum_{n=4}^{\infty} \frac{x^n}{(n-3)n!}, \ x > 0$ (3.10)

Η γενική λύση της ΔΕ είναι:

$$y(x) = c_1x^3 + c_2\left(\frac{1}{3!}x^3 lnx - \frac{1}{3} - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2!} + \sum_{n=4}^{\infty} \frac{x^n}{(n-3)n!}\right), \ x > 0 \tag{3.11}$$

<u>Παράδειγμα 4</u>: Να προσδιορισθεί το θεμελιώδες σύνολο λύσεων της ΔΕ:

$$xy'' + (1-x)y' - y = 0, \ \ 0 < x < L, \tag{4.1}$$

όπου $L > 0$.

Επίλυση: Οι συντελεστές της ΔΕ είναι: $p(x)=\frac{(1-x)}{x}$ και $q(x)=\frac{-1}{x}$. Οι συναρτήσεις $p(x)$ και $q(x)$ δεν είναι αναλυτικές στο $x_o=0$. Επομένως το σημείο $x_o=0$ είναι ιδιάζον σημείο της ΔΕ.
Εξετάζουμε αν το $x_o=0$ είναι κανονικό ιδιάζον σημείο της ΔΕ:

$\lim_{x\to 0} xp(x)=\lim_{x\to 0}(1-x)=1=p_o$ και $\lim_{x\to 0} x^2q(x)=\lim_{x\to 0}(-x)=0=q_o$. (4.2)
Από τις σχέσεις (4.2) έπεται ότι το μηδέν είναι κανονικό ιδιάζον σημείο της ΔΕ. Οι συναρτήσεις $xp(x), x^2q(x)$ ως πολυωνυμικές συναρτήσεις συγκλίνουν για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και επομένως $L=\infty$.

Η δείκτρια εξίσωση για την αντίστοιχη εξίσωση Euler είναι: $f(r)=r(r-1)+p_or+q_o=r(r-1)+r=0\Rightarrow r_1=0, r_2=0$ είναι οι εκθέτες ιδιομορφίας.

Για να εμφανίσουμε τους συντελεστές $xp(x)$ και $x^2q(x)$ πολλαπλασιάζουμε τη ΔΕ (1) με x οπότε προκύπτει η ΔΕ:

$$x^2y''+x(1-x)y'-xy=0 \tag{4.3}$$

Παραγωγίζουμε την υποτιθέμενη λύση $y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\,x^{r+n}$
$y'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(r+n)a_n\,x^{r+n-1},\ y''(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(r+n)(r+n-1)a_n\,x^{r+n-2}$
και αντικαθιστούμε στη ΔΕ (4.3), οπότε έχουμε:
$\sum_{n=0}^{\infty}(r+n)(r+n-1)a_n\,x^{r+n}+\sum_{n=0}^{\infty}(r+n)a_n\,x^{r+n}-\sum_{n=0}^{\infty}(r+n)a_n\,x^{r+n+1}-\sum_{n=0}^{\infty}a_n\,x^{r+n+1}=0.$

Στους δύο τελευταίους όρους της παραπάνω εξίσωσης κάνουμε την μετατόπιση του δείκτη $(n+1=n')$ και μετονομάζοντας $n'=n$ προκύπτει:
$\sum_{n=0}^{\infty}(r+n)(r+n-1)a_n\,x^{r+n}+\sum_{n=0}^{\infty}(r+n)a_n\,x^{r+n}-\sum_{n=1}^{\infty}(r+n-1)a_{n-1}\,x^{r+n}-\sum_{n=1}^{\infty}a_{n-1}\,x^{r+n}=0\Rightarrow\{r(r-1)+r\}a_ox^r+\sum_{n=1}^{\infty}[\{(r+n)(r+n-1)+(r+n)\}a_n-(r+n)a_{n-1}]x^{r+n}=0\Rightarrow r^2a_ox^r+\sum_{n=1}^{\infty}[(r+n)^2a_n-(r+n)a_{n-1}]x^{r+n}=0\Rightarrow$

$$f(r)a_ox^r+\sum_{n=1}^{\infty}[f(r+n)a_n-(r+n)a_{n-1}]x^{r+n}=0, \tag{4.4}$$

όπου $f(r)=r^2$.

Η τελευταία σχέση θα πρέπει να ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$, επομένως έπεται ότι

$$f(r)a_o=0\Rightarrow f(r)=0, a_o\neq 0, \tag{4.5}$$

$$f(r+n)a_n-(r+n)a_{n-1}=0, n=1,2,3,\ldots \tag{4.6}$$

Η σχέση (4.5) είναι η εξίσωση δεικτών, της οποίας οι ρίζες προσδιορίζουν τους εκθέτες ιδιομορφίας, ως ακολούθως

$$f(r)=r^2=0\Rightarrow r_1=r_2=0. \tag{4.7}$$

Η σχέση (4.6) για $r_1=0$ γίνεται:

$$(r_1+n)^2a_n=(r_1+n)a_{n-1}, n=1,2,3,\ldots$$
$$n^2a_n=na_{n-1}, n=1,2,3,\ldots$$
$$a_n=\frac{1}{n}a_{n-1},\qquad n=1,2,3,\ldots$$

Επομένως, όλοι οι συντελεστές a_n προσδιορίζονται συναρτήσει του a_o, από τη σχέση:

$$a_n=\frac{1}{n!}a_o,\qquad n=1,2,3\ldots$$

Επιλέγοντας $a_o = 1$, η πρώτη λύση, $y_1(x)$, του θεμελιώδους συνόλου λύσεων της ΔΕ είναι η συνάρτηση:

$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x, \; x \in \mathbb{R}$ (4.8)

Ο προσδιορισμός της δεύτερης λύσης μπορεί να προκύψει με υποβιβασμό τάξης, αλλά θα αναφέρουμε εδώ μία τεχνική που είναι κατ' ουσία ίδια με εκείνη που εφαρμόσαμε για να βρούμε τη δεύτερη λύση της εξίσωσης Euler όταν οι ρίζες της δείκτριας εξίσωσης είναι ίσες. Θεωρούμε τη συνάρτηση $y(x;r) = x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$ με r μία συνεχή μεταβλητή και βρίσκουμε τα a_n συναρτήσει του r επιλύοντας την αναδρομική σχέση (4.6) .
Οι συντελεστές $a_n(r)$ οφείλουν να ικανοποιούν τις σχέσεις:

$a_n(r) = \frac{1}{(r+n)} a_{n-1}, n \geq 1$ (4.9)

Από την τελευταία σχέση για $n = 1,2,3 \dots n$ έπεται

$$\left.\begin{aligned} a_1(r) &= \frac{a_o}{(r+1)} \\ a_2(r) &= \frac{a_1(r)}{(r+2)} \\ &\vdots \\ a_n(r) &= \frac{a_{n-1}(r)}{(r+n)} \end{aligned}\right\}$$

Οπότε $a_n(r) = \frac{a_o}{(r+1)(r+2)\dots(r+n)}, n = 1,2,3 \dots$ (4.10)

Αν επιδράσουμε με τον τελεστή, $L = x^2 \frac{d^2}{dx^2} + x(x-1)\frac{d}{dx} - x$, επί της συνάρτησης $y(x;r)$ παίρνουμε

$L(y(x;r)) = f(r)a_o x^r + \sum_{n=1}^{\infty}[f(r+n)a_n - (r+n)a_{n-1}]\, x^{r+n}$, με $f(r) = r^2$

Δηλαδή, $L(y(x;r)) = f(r)a_o x^r + \sum_{n=1}^{\infty}[(r+n)a_n - a_{n-1}]\, x^{r+n}$.

Επιλέγοντας τους συντελεστές $a_n(r)$ να ικανοποιούν τη αναδρομική σχέση (4.9) προκύπτει

$$L(y(x;r)) = f(r)a_o x^r, \forall x > 0$$

Παραγωγίζοντας την παραπάνω σχέση μερικώς ως προς r και αξιοποιώντας το γεγονός ότι οι παραγωγίσεις ως προς τις ανεξάρτητες μεταβλητές μετατίθενται, βρίσκουμε:

$$\frac{\partial}{\partial r}L(y(x;r)) = L\left(\frac{\partial y(x;r)}{\partial r}\right) = f'(r)a_o x^r + f(r)a_o x^r lnx = 2ra_o x^r + r^2 a_o x^r lnx$$

Με δεδομένο ότι για $r = r_1 = 0$ το δεύτερο μέλος της παραπάνω εξίσωσης μηδενίζεται.
Έτσι προκύπτει ότι μία δεύτερη λύση της ΔΕ είναι η: $y_2(x) = \left.\frac{\partial y(x;r)}{\partial r}\right|_{r=r_1=0} =$
$\left.\frac{\partial}{\partial r}\left(x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n(r)\, x^n\right)\right|_{r=r_1=0} = x^r lnx \sum_{n=0}^{\infty} a_n(r)\, x^n\big|_{r=r_1=0} + x^r \sum_{n=1}^{\infty} a_n{}'(r)\, x^n\big|_{r=r_1=0} =$
$lnx \sum_{n=0}^{\infty} a_n(0)\, x^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_n{}'(0)\, x^n = y_1(x)lnx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n{}'(0)\, x^n$. Άρα

$y_2(x) = y_1(x)lnx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n{}'(0)\, x^n, \quad x > 0$ (4.11)

Για να προσδιορίσουμε τους συντελεστές $a_n{}'(0)$, παραγωγίζουμε τη σχέση (4.10) ως προς r οπότε

$$\frac{d}{dr}a_n(r) = \frac{d}{dr}\left(\frac{a_o}{(r+1)(r+2)\dots(r+n)}\right), n = 1,2,3 \dots$$

$$a_n{}'(r) = -a_o\left[\frac{(r+2)(r+3)\dots(r+n) + \dots + (r+1)(r+2)\dots(r+n-1)}{(r+1)^2(r+2)^2\dots(r+n)^2}\right]$$

$$= -a_o\left[\frac{1}{(r+1)^2(r+2)\ldots(r+n)} + \cdots + \frac{1}{(r+1)(r+2)\ldots(r+n)^2}\right]$$
$$= \frac{-a_o}{(r+1)(r+2)\ldots(r+n)}\left[\frac{1}{(r+1)} + \cdots + \frac{1}{(r+n)}\right]$$
$$= -a_n(r)\left[\frac{1}{(r+1)} + \cdots + \frac{1}{(r+n)}\right]$$

Για $r = 0$ έχουμε

$$a_n{}'(0) = -a_n(0)\left[\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right] = -\frac{a_o}{n!}H_n$$

όπου $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$.

Θέτοντας $a_o = 1$, η δεύτερη λύση της εξίσωσης είναι:

$$y_2(x) = e^x lnx - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}H_n\, x^n, \quad x > 0 \qquad (4.12)$$

Η γενική λύση της ΔΕ είναι : $y(x) = c_1e^x + c_2\left(e^x lnx - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}H_n\, x^n\right), x > 0$ (4.13)

<u>Παρατήρηση 4.1</u>:Μπορείτε να εφαρμόσετε την μέθοδο υποβιβασμού τάξης και να διαπιστώσετε ότι η δεύτερη λύση δίνεται από τη σχέση (4.12).

5. Εξίσωση Bessel τάξης *p*

Θα μελετήσουμε την εξίσωση Bessel τάξης p:

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - p^2)y = 0, \quad x > 0 \qquad (5.1)$$

για διάφορές τιμές της παραμέτρου p. Είναι μία εξίσωση που ανακύπτει σε πολλά προβλήματα της Μαθηματικής Φυσικής όπως στη μελέτη δυναμικών φαινομένων με χαρακτήρα ταλάντωσης – σε δομές περιγραφόμενες από την κυλινδρική γεωμετρία, όπου η ανεξάρτητη μεταβλητή αφορά την πολική απόσταση.

Προφανώς κάθε ΔΕ Bessel έχει το σημείο $x_o = 0$ ως κανονικό ιδιάζον σημείο και
$\lim_{x\to 0} xp(x) = 1 = p_o$, $\lim_{x\to 0} x^2q(x) = \lim_{x\to 0}(x^2 - p^2) = -p^2 = q_o$.
Η δείκτρια εξίσωση είναι $f(r) = r(r-1) + r - p^2 = r^2 - p^2 = 0$ και επομένως οι δείκτες ιδιομορφίας είναι $r_1 = p, r_2 = -p$.

Όταν $r_1 - r_2 = 2p \notin \mathbb{Z}^+$ τότε υπάρχει μία δεύτερη λύση γραμμικά ανεξάρτητη που αντιστοιχεί στη ρίζα $r_2 = -p$, της μορφής: $y_2(x) = x^{-p}\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$

Όταν $r_1 - r_2 = 2p \in \mathbb{Z}^+$ τότε διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

(α) $p = m + \frac{1}{2}, m = 0,1,2\ldots$

Στην περίπτωση αυτή, βρίσκουμε πάλι μία δεύτερη λύση γραμμικά ανεξάρτητη της πρώτης της μορφής: $y_2(x) = x^{-p}\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$

(β) $p = n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Στην περίπτωση αυτή, υπάρχει μία δεύτερη λύση , γραμμικά ανεξάρτητη της πρώτης της μορφής:

$$y_2(x) = \alpha y_1(x)lnx + x^{-n}\sum_{k=0}^{\infty} b_k\, x^k$$

<u>Εξίσωση Bessel τάξης ½</u>: Να προσδιορισθεί το θεμελιώδες σύνολο λύσεων της ΔΕ:

$$x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)y = 0, x > 0 \qquad (5.2)$$

<u>Επίλυση</u>: Για τη ΔΕ (5.2) ισχύει:

$p(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow xp(x) = 1 = p_o$

$q(x) = \frac{x^2-\frac{1}{4}}{x^2} \Rightarrow x^2 q(x) = x^2 - \frac{1}{4} \rightarrow -\frac{1}{4} = q_o$, καθώς το $x \rightarrow 0$.
Επομένως, η δείκτρια εξίσωση είναι: $f(r) = 0 \Rightarrow r(r-1) + rp_o + q_o = 0 \Rightarrow$
$r(r-1) + r - \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow \left(r+\frac{1}{2}\right)\left(r-\frac{1}{2}\right) = 0$, με ρίζες τους δείκτες $r_1 = \frac{1}{2}, r_2 = -\frac{1}{2}$.
Η διαφορά δεικτών είναι ακέραιος και αυτό μας προειδοποιεί για προσεκτική αντιμετώπιση του μικρότερου δείκτη. Όμως $p = \frac{1}{2}$, οπότε είναι η περίπτωση (α) για $m = 0$.
Αντικαθιστώντας στη ΔΕ τη συνάρτηση $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^{r+n}$ έχουμε:
$\sum_{n=0}^{\infty}(r+n)(r+n-1)a_n\, x^{r+n} + \sum_{n=0}^{\infty}(r+n)a_n\, x^{r+n} - \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^{r+n} +$
$\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^{r+n+2} = 0$.
Κάνοντας την μετατόπιση του δείκτη στον τελευταίο όρο προκύπτει:
$\sum_{n=0}^{\infty}(r+n)(r+n-1)a_n\, x^{r+n} + \sum_{n=0}^{\infty}(r+n)a_n\, x^{r+n} - \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^{r+n} +$
$\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2}\, x^{r+n} = 0 \Rightarrow \left\{r(r-1) + r - \frac{1}{4}\right\} a_o x^r + \left\{(r+1)r + (r+1) - \frac{1}{4}\right\} a_1 x^{r+1} +$
$\sum_{n=2}^{\infty}\left[\left\{(r+n)(r+n-1) + (r+n) - \frac{1}{4}\right\} a_n + a_{n-2}\right] x^{r+n} = 0,$
η οποία γράφεται
$f(r)a_o x^r + f(r+1)a_1 x^{r+1} + \sum_{n=2}^{\infty}[f(r+n)a_n + a_{n-2}]\, x^{r+n} = 0,$
όπου $f(r) = \left(r-\frac{1}{2}\right)\left(r+\frac{1}{2}\right)$.
Επομένως,

$$f(r)a_o = 0 \Rightarrow f(r) = 0 \;\; (a_o \neq 0) \tag{5.3}$$

$$f(r+1)a_1 = 0 \tag{5.4}$$

Η αναδρομική σχέση είναι: $f(r+n)a_n + a_{n-2} = 0,\; n \geq 2$ ή

$$\left(r+n+\frac{1}{2}\right)\left(r+n-\frac{1}{2}\right) a_n = -a_{n-2}, n \geq 2 \tag{5.5}$$

Η σχέση (5.3) προσδιορίζει τους εκθέτες ιδιομορφίας $r_1 = \frac{1}{2}, r_2 = -\frac{1}{2}$.
(i) Ας εξετάσουμε την πρώτη περίπτωση $r_1 = \frac{1}{2}$. Από την σχέση (5.4) έχουμε ότι $a_1 = 0$.
Η σχέση (5.5) για $r_1 = \frac{1}{2}$ γίνεται:

$$\left(r_1+n+\frac{1}{2}\right)\left(r_1+n-\frac{1}{2}\right) a_n = -a_{n-2}, n \geq 2$$

$$(n+1)na_n = -a_{n-2}, n \geq 2 \text{ (αναδρομική σχέση με βήμα 2).} \tag{5.6}$$

Επομένως, όλοι οι συντελεστές με περιττό δείκτη $a_{2k+1} = 0, k \geq 1$, εφόσον προσδιορίζονται από το a_1 που είναι μηδέν.
Για τους συντελεστές με άρτιο δείκτη, θέτοντας στην αναδρομική σχέση (5.6) όπου $n = 2k$ έχουμε: $a_{2k} = -\frac{a_{2k-2}}{2k(2k+1)}, k \geq 1$

$$\left.\begin{array}{l} a_2 = -\frac{a_o}{2\cdot 3} \\ a_4 = -\frac{a_2}{4\cdot 5} \\ \vdots \\ a_{2n} = -\frac{a_{2n-2}}{2n(2n+1)} \end{array}\right\}$$

Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη τις παραπάνω σχέσεις προσδιορίζουμε τα

$a_{2n} = \frac{(-1)^n a_o}{(2n+1)!}$, $n \geq 1.$

Η πρώτη λύση $y_1(x)$, του θεμελιώδους συνόλου είναι η συνάρτηση

$y_1(x) = a_o x^{\frac{1}{2}} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)!}\right] = a_o x^{\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)!} = a_o x^{-\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \Rightarrow$

$$y_1(x) = a_o \frac{sinx}{\sqrt{x}}, x > 0 \tag{5.7}$$

Επιλέγοντας $a_o = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$, η λύση $y_1(x)$ συμβολίζεται με $J_{1/2}(x)$

$$J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} sinx$$

και ονομάζεται ***συνάρτηση Bessel πρώτου είδους ½ τάξης.***

Παρατηρούμε ότι $J_{1/2}(x) \to 0$, καθώς το $x \to 0$.

(ii) Στη δεύτερη περίπτωση: $r_2 = -\frac{1}{2}$, η αναδρομική σχέση (5.5) γίνεται

$$a_n = -\frac{a_{n-2}}{(n-1)n}, n \geq 2 \tag{5.8}$$

Από τη σχέση (5.4) παρατηρούμε ότι

$f(r_2 + 1)a_1 = f\left(-\frac{1}{2} + 1\right) a_1 = f\left(\frac{1}{2}\right) a_1 = 0 \Rightarrow 0 \cdot a_1 = 0 \Rightarrow a_1$αυθαίρετο.

Έχουμε επομένως την ευχέρεια να επιλέξουμε $a_1 = 0$, γεγονός που οδηγεί στο μηδενισμό όλων των συντελεστών με περιττό δείκτη

Για τους συντελεστές με άρτιο δείκτη, θέτοντας στην αναδρομική σχέση (5.8) όπου $n = 2k$, έχουμε: $a_{2k} = -\frac{a_{2k-2}}{(2k-1)2k}, k \geq 1$

$$\left.\begin{aligned} a_2 &= -\frac{a_o}{1 \cdot 2} \\ a_4 &= -\frac{a_2}{3 \cdot 4} \\ &\vdots \\ a_{2n} &= -\frac{a_{2n-2}}{(2n-1)2n} \end{aligned}\right\}$$

Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη τις παραπάνω σχέσεις προσδιορίζουμε τα

$a_{2n} = \frac{(-1)^n a_o}{(2n)!}$, $n \geq 1.$

Η δεύτερη λύση $y_2(x)$ του θεμελιώδους συνόλου είναι η συνάρτηση

$$y_2(x) = a_o x^{-\frac{1}{2}} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}\right] = a_o x^{-\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = \frac{cosx}{\sqrt{x}},\ x > 0 \tag{5.9}$$

η οποία για $a_o = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$, γράφεται $J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} cosx.$

Παρατηρούμε ότι $J_{-1/2}(x) \to \infty$ καθώς $x \to 0$.

Η γενική λύση της ΔΕ είναι:

$$y(x) = c_1 J_{1/2}(x) + c_2 J_{-1/2}(x),\ \ x > 0 \tag{5.10}$$

<u>Παρατήρηση 5.1</u>: Είναι ενδιαφέρον ότι στο προηγούμενο παράδειγμα, στην περίπτωση (ii) $r_2 = -\frac{1}{2}$ θα μπορούσαμε να επιλέξουμε $a_1 \neq 0$. Σε αυτή την περίπτωση, από την αναδρομική σχέση (5.8) οι συντελεστές με περιττό δείκτη θα μας οδηγήσουν στη λύση $\frac{sinx}{\sqrt{x}}$, στην οποία οδηγηθήκαμε ούτως ή άλλως στηριζόμενη στο μεγαλύτερο δείκτη $r_1 = \frac{1}{2}$.

<u>**Εξίσωση Bessel μηδενική τάξης**</u>: Να προσδιορισθεί το θεμελιώδες σύνολο λύσεων της ΔΕ:

$$x^2y'' + xy' + x^2y = 0, \quad x > 0 \qquad (5.11)$$

<u>Επίλυση</u>: Για τη ΔΕ (5.11) ισχύει:

$p(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow xp(x) = 1 = p_o$,

$q(x) = 1 \Rightarrow x^2q(x) = x^2 \to 0 = q_o$, καθώς το $x \to 0$.

Επομένως η δείκτρια εξίσωση είναι $f(r) = 0 \Rightarrow r(r-1) + rp_o + q_o = 0 \Rightarrow$

$f(r) = r(r-1) + r = 0 \Rightarrow f(r) = r^2 = 0$, με ρίζες τους δείκτες $r_1 = r_2 = 0$.

Αντικαθιστώντας στη ΔΕ τη συνάρτηση $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^{r+n}$ έχουμε:

$\sum_{n=0}^{\infty}(r+n)(r+n-1)a_n\, x^{r+n} + \sum_{n=0}^{\infty}(r+n)a_n\, x^{r+n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^{r+n+2} = 0.$

Κάνοντας την μετατόπιση στον τελευταίο όρο προκύπτει:

$\sum_{n=0}^{\infty}(r+n)(r+n-1)a_n\, x^{r+n} + \sum_{n=0}^{\infty}(r+n)a_n\, x^{r+n} + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2}\, x^{r+n} = 0 \Rightarrow$

$r^2a_ox^r + (r+1)^2a_1x^{r+1} + \sum_{n=2}^{\infty}[(r+n)^2a_n + a_{n-2}]\, x^{r+n} = 0.$

Η τελευταία γράφεται

$f(r)a_ox^r + f(r+1)a_1x^{r+1} + \sum_{n=2}^{\infty}[f(r+n)a_n + a_{n-2}]\, x^{r+n} = 0.$

Επομένως,

$$f(r)a_o = 0 \Rightarrow f(r) = r^2 = 0 \Rightarrow r_1 = r_2 = 0 \;\; (a_o \neq 0) \qquad (5.12)$$

$$f(r+1)a_1 = 0 \Rightarrow \quad (r+1)^2a_1 = 0 \Rightarrow a_1 = 0 \qquad (5.13)$$

και η αναδρομική σχέση: $f(r+n)a_n + a_{n-2} = 0,\; n \geq 2$

$$(r+n)^2a_n = -a_{n-2}, n \geq 2 \qquad (5.14)$$

Αν αντικαταστήσουμε στη (5.14) το $r = 0$ και επικεντρωθούμε στους συντελεστές με άρτιο δείκτη θα έχουμε: $a_{2k} = -\frac{a_{2k-2}}{2^2k^2}, k \geq 1$.

$$\left.\begin{array}{l} a_2 = -\frac{a_o}{2^2\cdot 1} \\ a_4 = -\frac{a_2}{2^2\cdot 2^2} \\ \vdots \\ a_{2n} = -\frac{a_{2n-2}}{2^2n^2} \end{array}\right\}$$

Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη τις παραπάνω σχέσεις προσδιορίζουμε τα

$a_{2n} = \frac{(-1)^n a_o}{2^{2n}(n!)^2}$, $n \geq 1$.

Επομένως, προκύπτει μία λύση

$$y_1(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}, \; x \in \mathbb{R} \qquad (5.15)$$

Η δυναμοσειρά λύση (5.15) συγκλίνει για κάθε $x \in \mathbb{R}$, και είναι αναλυτική στο $x = 0$. Η λύση αυτή ονομάζεται ***συνάρτηση Bessel πρώτου είδους μηδενικής τάξης*** και συμβολίζεται με $J_o(x)$.

$$J_o(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}, \; x \in \mathbb{R}. \qquad (5.16)$$

Ο προσδιορισμός της δεύτερης λύσης μπορεί να προκύψει με υποβιβασμό τάξης, αλλά θα αναφερθούμε στη τεχνική που παρουσιάστηκε στο Παράδειγμα 3 (όπου οι ρίζες της δείκτριας εξίσωσης είναι ίσες). Θεωρούμε τη συνάρτηση $y(x;r) = x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$ με r μία συνεχή μεταβλητή και βρίσκουμε τα a_n συναρτήσει του r επιλύοντας τις σχέσεις (5.13) και (5.14). Οι συντελεστές $a_n(r)$ οφείλουν να ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$a_{2k+1}(r) = 0, k = 1,2,3 \dots \tag{5.17}$$

$$a_{2k}(r) = -\frac{a_{2k-2}(r)}{(r+2k)^2}, k \geq 1 \tag{5.18}$$

Από την τελευταία σχέση για $k = 1,2,3 \dots n$ έπεται

$$\left.\begin{aligned} a_2(r) &= -\frac{a_o}{(r+2)^2} \\ a_4(r) &= -\frac{a_2(r)}{(r+4)^2} \\ &\vdots \\ a_{2n}(r) &= -\frac{a_{2n-2}(r)}{(r+2n)^2} \end{aligned}\right\}$$

Οπότε $a_{2n}(r) = \frac{(-1)^n a_o}{(r+2)^2(r+4)^2 \dots (r+2n)^2}, n = 1,2,3 \dots$ (5.19)

Αν επιδράσουμε με τον τελεστή $L = x^2 \frac{d^2}{dx^2} + x\frac{d}{dx} + x^2$ επί της συνάρτησης $y(x;r)$ παίρνουμε

$L(y(x;r)) = f(r)a_o x^r + f(r+1)a_1 x^{r+1} + \sum_{n=2}^{\infty}[f(r+n)a_n + a_{n-2}]\, x^{r+n}$, με $f(r) = r^2$

Επιλέγοντας τους συντελεστές $a_n(r)$ να ικανοποιούν τις σχέσεις (5.17) και (5.18) προκύπτει

$$L(y(x;r)) = f(r)a_o x^r, \forall x \in \mathbb{R}$$

Παραγωγίζοντας την παραπάνω σχέση μερικώς ως προς r και αξιοποιώντας το γεγονός ότι οι παραγωγίσεις ως προς τις ανεξάρτητες μεταβλητές μετατίθενται, βρίσκουμε

$$\frac{\partial}{\partial r}L(y(x;r)) = L\left(\frac{\partial y(x;r)}{\partial r}\right) = f'(r)a_o x^r + f(r)a_o x^r lnx = 2ra_o x^r + r^2 a_o x^r lnx.$$

Με δεδομένο ότι για $r = r_1 = 0$ το δεύτερο μέλος της παραπάνω εξίσωσης μηδενίζεται έτσι προκύπτει ότι μία δεύτερη λύση της ΔΕ είναι η:

$$w(x) = \left.\frac{\partial y(x;r)}{\partial r}\right|_{r=r_1=0} =$$

$$\left.\frac{\partial}{\partial r}\left(x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n\right)\right|_{r=r_1=0} = x^r lnx \sum_{n=0}^{\infty} a_n(r)\, x^n|_{r=r_1=0} + x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n{}'(r)\, x^n|_{r=r_1=0} =$$

$$lnx \sum_{n=0}^{\infty} a_n(0)\, x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n{}'(0)\, x^n = J_o(x)lnx + \sum_{n=0}^{\infty} a_n'(0)\, x^n.$$

Επικαλούμενοι τη σχέση (5.19) έχουμε ότι

$$\begin{aligned} a_{2n}{}'(r) &= (-1)^{n+1}2a_o\left[\frac{(r-2)(r+4)^2 \dots (r+2n)^2 \dots + (r+2)^2(r+4)^2 \dots (r+2n)}{(r+2)^4(r+4)^4 \dots (r+2n)^4}\right] \\ &= (-1)^{n+1}2a_o\left[\frac{1}{(r+2)^3(r+4)^2 \dots (r+2n)^2} + \dots + \frac{1}{(r+2)^2(r+4)^2 \dots (r+2n)^3}\right] \\ &= \frac{(-1)^{n+1}2a_o}{(r+2)^2(r+4)^2 \dots (r+2n)^2}\left[\frac{1}{(r+2)} + \dots + \frac{1}{(r+2n)}\right] \\ &= -2a_{2n}(r)\left[\frac{1}{(r+2)} + \dots + \frac{1}{(r+2n)}\right] \end{aligned}$$

Για $r = 0$ έχουμε

$$a_n{}'(0) = -2a_{2n}(0)\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n}\right] = -2\frac{(-1)^n a_o}{2^{2n}(n!)^2 2}H_n = \frac{(-1)^{n+1}a_o}{2^{2n}(n!)^2}H_n$$

όπου $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$.

Θέτοντας $a_o = 1$, η δεύτερη λύση της εξίσωσης Bessel μηδενικής τάξης είναι:
$w(x) = J_o(x)lnx + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^{2n}(n!)^2} H_n\, x^{2n}, \quad x > 0.$
Στις εφαρμογές για λόγους συγκεκριμένης κανονικοποίησης, η δεύτερη λύση δεν είναι ακριβώς η $w(x)$ αλλά ένας γραμμικός συνδυασμός των $J_o(x)$ και $w(x)$:
$\frac{2}{\pi} w(x) + \frac{2}{\pi}(\gamma - ln2)J_o(x)$ η οποία ονομάζεται ***συνάρτηση Bessel δευτέρου είδους μηδενικής τάξης***, συμβολίζεται με $Y_o(x)$ και υπολογίζεται τελικά ως

$$Y_o(x) = \frac{2}{\pi}\left[\left(ln\frac{x}{2} + \gamma\right)J_o(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^{2n}(n!)^2} H_n\, x^{2n}\right], x > 0 \qquad (5.20)$$

Όπου $\gamma = 0.5772 \ldots$ είναι μία σταθερά γνωστή ως σταθερά Euler.
Η γενική λύση της ΔΕ Bessel μηδενικής τάξης για $x > 0$ είναι

$$y(x) = c_1 J_o(x) + c_2 Y_o(x), x > 0$$

Παρατηρούμε ότι η $J_o(x) \to 1$ καθώς το $x \to 0$, ενώ η $Y_o(x)$ έχει λογαριθμική ιδιομορφία στο $x = 0$. Αν επιθυμούμε λύσεις ομαλές στο $x_o = 0$, αυτές δεν μπορεί να είναι παρά πολλαπλάσια αποκλειστικά της συνάρτησης $J_o(x)$.

<u>Εξίσωση Bessel πρώτης τάξης</u>: Να προσδιορισθεί το θεμελιώδες σύνολο λύσεων της ΔΕ:

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - 1)y = 0, x > 0. \qquad (5.21)$$

<u>Επίλυση</u>: Για τη ΔΕ (5.21) ισχύει:
$p(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow xp(x) = 1 = p_o,$
$q(x) = \frac{x^2-1}{x^2} \Rightarrow x^2q(x) = x^2 - 1 \to -1 = q_o$, καθώς το $x \to 0$.
Επομένως η δείκτρια εξίσωση είναι $f(r) = 0 \Rightarrow r(r-1) + rp_o + q_o = 0 \Rightarrow$
$r(r-1) + r - 1 = 0 \Rightarrow (r+1)(r-1) = 0$, με ρίζες τους δείκτες $r_1 = 1, r_2 = -1$.
Η διαφορά δεικτών είναι ακέραιος και αυτό μας προειδοποιεί και πάλι για προσεκτική αντιμετώπιση του μικρότερου δείκτη.
Αντικαθιστώντας στη ΔΕ τη συνάρτηση $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^{r+n}$ έχουμε:
$\sum_{n=0}^{\infty}(r+n)(r+n-1)a_n\, x^{r+n} + \sum_{n=0}^{\infty}(r+n)a_n\, x^{r+n} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^{r+n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^{r+n+2} = 0.$
Κάνοντας την μετατόπιση στον τελευταίο όρο προκύπτει:
$\sum_{n=0}^{\infty}(r+n)(r+n-1)a_n\, x^{r+n} + \sum_{n=0}^{\infty}(r+n)a_n\, x^{r+n} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^{r+n} + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2}\, x^{r+n} = 0 \Rightarrow \{r(r-1) + r - 1\}a_o x^r + \{(r+1)r + (r+1) - 1\}a_1 x^{r+1} + \sum_{n=2}^{\infty}[\{(r+n)(r+n-1) + (r+n) - 1\}a_n + a_{n-2}]\, x^{r+n} = 0,$
Η οποία γράφεται
$f(r)a_o x^r + f(r+1)a_1 x^{r+1} + \sum_{n=2}^{\infty}[f(r+n)a_n + a_{n-2}]\, x^{r+n} = 0.$
Επομένως,

$$f(r)a_o = 0 \Rightarrow f(r) = 0 \Rightarrow (r-1)(r+1) = 0 \;\; (a_o \neq 0) \qquad (5.22)$$

$$f(r+1)a_1 = 0 \qquad (5.23)$$

Η αναδρομική σχέση είναι: $f(r+n)a_n + a_{n-2} = 0, \;\; n \geq 2$ ή

$$(r+n+1)(r+n-1)a_n = -a_{n-2}, \quad n \geq 2 \qquad (5.24)$$

Η σχέση (5.22) προσδιορίζει τους εκθέτες ιδιομορφίας $r_1 = 1, r_2 = -1$.
(i) Ας εξετάσουμε την πρώτη περίπτωση, $r_1 = 1$. Από την σχέση (5.23) έχουμε ότι $a_1 = 0$.
Η σχέση (5.24) για $r_1 = 1$ γίνεται:

$$(r_1+n+1)(r_1+n-1)a_n=-a_{n-2}, n\geq 2$$

$(n+2)na_n=-a_{n-2}, n\geq 2$ (η αναδρομική σχέση με βήμα 2). (5.25)

Επομένως, όλοι οι συντελεστές με περιττό δείκτη $a_{2k+1}=0, k\geq 1$, εφόσον προσδιορίζονται από το a_1 που είναι μηδέν.

Για τους συντελεστές με άρτιο δείκτη, θέτοντας στην αναδρομική σχέση (5.25) όπου $n=2k$ έχουμε: $a_{2k}=-\frac{a_{2k-2}}{2k(2k+2)}=-\frac{a_{2k-2}}{2^2k(k+1)}, k\geq 1$

$$\left.\begin{array}{l} a_2=-\frac{a_o}{2^2\cdot 1\cdot 2} \\ a_4=-\frac{a_2}{2^2\cdot 2\cdot 3} \\ \vdots \\ a_{2n}=-\frac{a_{2n-2}}{2^2n(n+1)} \end{array}\right\}$$

Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη τις παραπάνω σχέσεις προσδιορίζουμε τα

$a_{2n}=\frac{(-1)^n a_o}{2^{2n}n!(n+1)!}$, $n\geq 1.$

Επιλέγοντας $a_o=\frac{1}{2}$, η πρώτη λύση $y_1(x)$ του θεμελιώδους συνόλου, συμβολίζεται με $J_1(x)$ και ονομάζεται ***συνάρτηση Bessel πρώτου είδους πρώτης τάξης,***

$$J_1(x)=\frac{x}{2}\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}n!(n+1)!}\right]=\frac{x}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{2n}n!(n+1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}, x\in\mathbb{R} \quad (5.26)$$

Η σειρά (5.26) συγκλίνει απολύτως για κάθε x, οπότε η $J_1(x)$ είναι παντού αναλυτική.

(ii) Για να βρούμε τη δεύτερη λύση εξετάζουμε την περίπτωση για $r_2=-1$.

Από τη σχέση (5.23) έπεται

$$f(r+1)a_1=0\Rightarrow f(r_2+1)a_1=0\Rightarrow f(0)a_1=0\Rightarrow a_1=0$$

Η σχέση (5.24) για $r_2=-1$ γίνεται:

$$(r_2+n+1)(r_2+n-1)a_n=-a_{n-2}, n\geq 2$$

$n(n-2)a_n=-a_{n-2}, n\geq 2$ (η αναδρομική σχέση με βήμα 2). (5.27)

Επομένως, όλοι οι συντελεστές με περιττό δείκτη $a_{2k+1}=0, k\geq 1$, εφόσον προσδιορίζονται από το a_1 που είναι μηδέν.

Στην αναδρομική σχέση (5.27) παρατηρούμε ότι για $n=2$ έχουμε $0\cdot a_2=-a_o$. Όμως $a_o\neq 0$, οπότε συμπεραίνουμε ότι δεν υπάρχει λύση στη μορφή: $y(x)=x^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$.

Σε αυτή την περίπτωση ο προσδιορισμός της δεύτερης λύσης είναι πολύ πιο πολύπλοκος και δεν θα δοθεί εδώ. Μπορεί να δειχθεί ότι η μορφή της δεύτερης λύσης είναι:

$$y_2(x)=\alpha J_1(x)lnx+x^{-1}\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}b_n x^n\right] \quad (5.28)$$

Ο προσδιορισμός της σταθεράς α και των συντελεστών b_n μπορεί να γίνει με απευθείας αντικατάσταση της έκφρασης (5.28) στην ΔΕ (5.21). Πραγματοποιώντας την αντικατάσταση αυτή βρίσκουμε ότι $\alpha=-1$, $b_{2n+1}=0$ (εφόσον $a_1=0$) και $b_{2n}=\frac{(-1)^{n+1}(H_n+H_{n-1})}{2^{2n}n!(n-1)!}$, $n=1,2\ldots$

Επομένως, $y_2(x)=-J_1(x)lnx+x^{-1}\left[1-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(H_n+H_{n-1})}{2^{2n}n!(n-1)!}x^{2n}\right]$, $x>0$ όπου $H_o=0$.

Η δεύτερη λύση της εξίσωσης Bessel συμβολίζεται με $Y_1(x)$ και λαμβάνεται συνήθως ως ένας γραμμικός συνδυασμός των $J_1(x)$ και $y_2(x)$. Η $Y_1(x)$ ορίζεται ως

$$Y_1(x) = \frac{2}{\pi}[(\gamma - ln2)J_1(x) - y_2(x)] =$$

$$\frac{2}{\pi}\left[\left(\gamma + ln\left(\frac{x}{2}\right)\right)J_1(x) - x^{-1}\left[1 - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(H_n + H_{n-1})}{2^{2n}n!\,(n-1)!}x^{2n}\right]\right], x > 0$$

και ονομάζεται ***συνάρτηση Bessel δευτέρου είδους πρώτης τάξης***.
Η γενική λύση της ΔΕ (5.21) είναι

$$y(x) = c_1J_1(x) + c_2Y_1(x), \qquad x > 0$$

Παρατηρούμε ότι, ενώ η J_1 είναι αναλυτική στο $x = 0$, η Y_1 γίνεται μη φραγμένη καθώς το $x \to 0$.

Παρατηρήσεις: (i) Στις εφαρμογές χρειαζόμαστε λύσεις της εξίσωσης Bessel που είναι φραγμένες στην περιοχή του μηδενός. Οι συναρτήσεις Bessel δευτέρου είδους δεν είναι φραγμένες στην περιοχή του μηδενός, τόσο όταν το p δεν είναι ακέραιος διότι υπάρχει ο όρος x^{-p}, όσο και όταν το p ακέραιος λόγω του λογαριθμικού όρου. Έτσι συνήθως χρησιμοποιούμε συναρτήσεις Bessel πρώτου είδους.
(ii) Μία από τις βασικές ιδιότητες των συναρτήσεων Bessel πρώτου είδους είναι:

$$J_{p+1}(x) = \frac{2\pi}{x}J_p(x) - J_{p-1}(x)$$

Έτσι όλες οι συναρτήσεις Bessel τάξης $n \in N \cup \{0\}$ μπορούν να εκφραστούν συναρτήσει των $J_o(x)$ και $J_1(x)$.
(iii) Οι συναρτήσεις Bessel πρώτου είδους $J_p(x)$, είναι φραγμένες στο $\mathbb{R}^+$, περιελίσσονται άπειρες φορές γύρω από τον άξονα x (άρα έχουν άπειρες ρίζες) και μοιάζουν με αποσβεννύμενες συνημιτονοειδείς συναρτήσεις. Ασυμπτωτικά, προσεγγίζονται από την συνάρτηση: $\sqrt{\frac{2}{\pi x}}cos\left(x - (2p+1)\frac{\pi}{4}\right), x \to +\infty$.
Οι συναρτήσεις Bessel δευτέρου είδους $Y_n(x)$, παρουσιάζουν την ίδια κατάσταση με τις $J_p(x)$, παντού στο $\mathbb{R}^+$, εκτός από την περιοχή του μηδενός όπου απειρίζονται. Ασυμπτωτικά, προσεγγίζονται από την συνάρτηση:
$\sqrt{\frac{2}{\pi x}}sin\left(x - (2n+1)\frac{\pi}{4}\right), n = 0,1,2\ldots, x \to +\infty$.
Οι ρίζες των $J_p(x)$ και $Y_p(x)$ είναι ακανόνιστα κατανεμημένες όχι όμως εντελώς. Εφ' όσον ασυμπτωτικά προσεγγίζονται από συνημίτονο και ημίτονο, η απόσταση μεταξύ διαδοχικών ριζών, τείνει να γίνει ίση με π.