ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΟ ΜΙΓΑΔΙΚΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

I. Ολοκλήρωμα της μορφής $\int_a^b \varphi(t)\,dt$, $\varphi:[a,b]\to\mathbb{C}$ συνεχής

Ορισμός I.1. Έστω $\varphi:[a,b]\to\mathbb{C}$ ($a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$) κ' $u=\mathrm{Re}\,\varphi$, $v=\mathrm{Im}\,\varphi$. Εάν u,v συνεχείς, ορίζουμε

$$\int_a^b \varphi(t)\,dt=\int_a^b u(t)\,dt+i\int_a^b v(t)\,dt.$$

Π.χ. $\varphi(t)=t^2+it^3$, $t\in[0,1]$,

$$\int_0^1 \varphi(t)\,dt=\int_0^1 t^2\,dt+i\int_0^1 t^3\,dt$$
$$=1/3+i/4.$$

Πρόταση I.2. Έστω $F:[a,b]\to\mathbb{C}$ διαφορίσιμη με F' συνεχή. Τότε,

$$\int_a^b F'(t)\,dt=F(b)-F(a)\doteq F(t)\Big|_a^b.$$

Απόδειξη: Αν $F_1=\mathrm{Re}\,F$, $F_2=\mathrm{Im}\,F$, τότε

$$\int_a^b F'(t)\,dt=\int_a^b F_1'(t)\,dt+i\int_a^b F_2'(t)\,dt$$

$$=[F_1(b)-F_1(a)]+i[F_2(b)-F_2(a)]\ \text{κλπ.}$$

$\boxtimes$

<u>Π.χ.</u> $\displaystyle\int_0^{\pi} e^{it}dt = \frac{1}{i} e^{it}\Big|_0^{\pi} =$

$\displaystyle = \frac{1}{i}\left(e^{i\pi}-1\right) = -\frac{2}{i} = 2i.$

<u>Βασικές ιδιότητες:</u>

<u>(i) (Γραμμικότητα)</u>. Εάν $\varphi, \psi : [a,b] \to \mathbb{C}$ συνεχείς κ' $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, τότε

$$\int_a^b [\lambda\varphi(t)+\mu\psi(t)]dt = \lambda\int_a^b \varphi(t)dt + \mu\int_a^b \psi(t)dt$$

<u>(ii)</u> Εάν $a<\gamma<b$, τότε

$$\int_a^b \varphi(t)dt = \int_a^{\gamma}\varphi(t)dt + \int_{\gamma}^b \varphi(t)dt.$$

<u>(iii)</u> $$\int_a^b \overline{\varphi(t)}dt = \overline{\int_a^b \varphi(t)dt}.$$

Επιπλέον, έχουμε την παρακάτω

<u>Πρόταση I.3.</u> Εάν $\varphi : [a,b] \to \mathbb{C}$ συνεχής, τότε

$$\left|\int_a^b \varphi(t)dt\right| \le \int_a^b |\varphi(t)|dt.$$

<u>Απόδειξη (μη τετριμμένη!)</u>

Θέτω $z = \int_a^b \varphi(t)\,dt$.

- Εάν $z=0$, προφανώς ισχύει η αποδεικτέα.
- Έστω $z \neq 0$. Τότε, $\exists\, \theta \in \mathbb{R} \,|$
$$z = |z| e^{i\theta}.$$

Τότε, $|z| = e^{-i\theta} \cdot z = \int_a^b e^{-i\theta} \varphi(t)\,dt$

$$\overset{|z| \in \mathbb{R}}{\Longrightarrow} \quad |z| = Re\left[\int_a^b e^{-i\theta}\varphi(t)\,dt\right]$$

$$= \int_a^b Re\left[e^{-i\theta}\varphi(t)\right]dt$$

$$\leq \int_a^b |e^{-i\theta}\varphi(t)|\,dt$$

$$= \int_a^b |\varphi(t)|\,dt. \quad \boxtimes$$

II. Μιγαδικό ολοκλήρωμα

<u>Ορισμός II.1.</u> Έστω $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ λεία καμπύλη κ' $f:\gamma^*\to\mathbb{C}$ συνεχής.

Το <u>μιγαδικό ολοκλήρωμα της f πάνω στην γ</u> είναι το

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,dt.$$

<u>Παραδείγματα:</u>

<u>(i)</u> Έστω $z_0\in\mathbb{C}$, $R>0$ κ'

$\gamma_R(t)=z_0+Re^{it}$, $t\in[0,2\pi]$. Τότε,

$$\int_{\gamma_R}\frac{1}{z-z_0}\,dz=\int_0^{2\pi}\frac{1}{Re^{it}}\,iRe^{it}\,dt$$

$$=\int_0^{2\pi} i = 2\pi i$$

(Καλό είναι να το θυμόμαστε κ' σαν θεωρία!!)

<u>(ii)</u> Έστω γ_R ο κύκλος του παραδ. (i) κ' $n \in \mathbb{Z}$.
Τότε,
$$\int_{\gamma_R} (z-z_0)^n dz = \begin{cases} 0, & n \neq -1 \\ 2\pi i, & n=-1 \end{cases}$$

Πράγματι για $n=-1$, βλ. παράδ. (i).

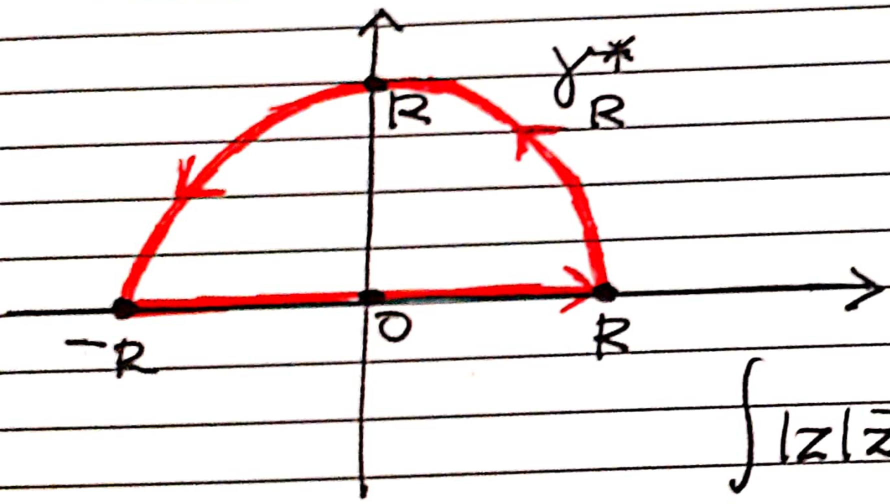
Για $n \neq -1$, έχουμε
$$\int_{\gamma_R} (z-z_0)^n dz = \int_0^{2\pi} (Re^{it})^n iRe^{it} dt$$
$$= R^{n+1} \int_0^{2\pi} i e^{i(n+1)t} dt$$
$$= \frac{R^{n+1}}{n+1} e^{i(n+1)t} \Big|_0^{2\pi} =$$
$$= \frac{R^{n+1}}{n+1} \left[e^{2(n+1)\pi i} - 1 \right] = \frac{R^{n+1}}{n+1}(1-1) = 0.$$

<u>Ορισμός II.2.</u> Έστω γ τμηματικά λεία καμπύλη με $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_n$ $(n \geq 1)$, όπου $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ διαδοχικές <u>λείες</u> καμπύλες. Εάν $f : \gamma^* \to \mathbb{C}$ συνεχής,
$$\int_\gamma f(z) dz = \sum_{k=1}^{n} \int_{\gamma_k} f(z) dz.$$

Παράδειγμα: Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int_{\Gamma_R} |z|\bar{z}\,dz$, όπου

$\Gamma_R = \gamma_R + [-R, R]$, $\gamma_R(t) = Re^{it}$, $t \in [0, \pi]$ $(R>0)$.

Λύση: Η Γ_R είναι τμηματικά λεία.



Το ολοκλήρωμα γράφεται

$$\int_{\gamma_R} |z|\bar{z}\,dz + \int_{-R}^{R} |z|z\,dz =$$

$$= \int_0^{\pi} |Re^{it}|\, Re^{-it}\, iRe^{it}\,dt + \underbrace{\int_{-R}^{R} |t|t\,dt}_{0}$$

$$= \int_0^{\pi} iR^3\,dt = \pi i R^3.$$

(Σημ. η $t \mapsto |t|t$ είναι περιττή!)

<u>Πρόταση II.4.</u> Έστω γ τμηματικά λεία καμπύλη, $f, g : \gamma^* \to \mathbb{C}$ συνεχείς κ' $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. Τότε,

$$\int_\gamma [\lambda f(z) + \mu g(z)]dz =$$

$$= \lambda \int_\gamma f(z)dz + \mu \int_\gamma g(z)dz.$$

<u>Απόδειξη:</u> Εάν $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ <u>λεία</u>, το ολοκλ. του α' μέλους γράφεται

$$\int_a^b [\lambda f(\gamma(t)) + \mu g(\gamma(t))]\gamma'(t)dt =$$

$$= \lambda \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt + \mu \int_a^b g(\gamma(t))\gamma'(t)dt$$

$$= \lambda \int_\gamma f(z)dz + \mu \int_\gamma g(z)dz.$$

Εάν γενικότερα, $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_n$ $(n \geq 1)$ όπου $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ διαδοχικές <u>λείες</u>, τότε το ολοκλ. του α' μέλους γράφεται

$$\sum_{k=1}^{n} \int_{\gamma_k} [\lambda f(z) + \mu g(z)]dz =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left[\lambda \int_{\gamma_k} f(z)\,dz + \mu \int_{\gamma_k} g(z)\,dz\right]$$

$$= \lambda \sum_{k=1}^{n} \int_{\gamma_k} f(z)\,dz + \mu \sum_{k=1}^{n} \int_{\gamma_k} g(z)\,dz$$

$$= \lambda \int_{\gamma} f(z)\,dz + \mu \int_{\gamma} g(z)\,dz. \qquad \boxtimes$$

<u>Πρόταση ΙΙ.5.</u> Έστω $\gamma, \tilde{\gamma}$ δύο διαδοχικές τμηματικά λείες καμπύλες κ'

$$f : \gamma^* \cup \tilde{\gamma}^* \to \mathbb{C} \text{ συνεχής.}$$

Τότε,

$$\int_{\gamma + \tilde{\gamma}} f(z)\,dz = \int_{\gamma} f(z)\,dz + \int_{\tilde{\gamma}} f(z)\,dz.$$

Απόδειξη: Έστω

$$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_n, \quad \tilde{\gamma} = \tilde{\gamma}_1 + \tilde{\gamma}_2 + \dots + \tilde{\gamma}_m,$$

όπου $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ διαδοχικές λείες,

$\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2, \dots, \tilde{\gamma}_m$ " " $(n, m \geq 1)$.

Επειδή $\gamma, \tilde{\gamma}$ διαδοχικές, το πέρας της γ ταυτίζεται με την αρχή της $\tilde{\gamma}$. Ταυτόχρονα όμως, το πέρας της γ είναι το πέρας της γ_n κ' η αρχή της $\tilde{\gamma}$ ταυτίζεται με την αρχή της $\tilde{\gamma}_1$.

Άρα, οι $\gamma_n, \tilde{\gamma}_1$ είναι διαδοχικές, οπότε κ' οι $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n, \tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2, \dots, \tilde{\gamma}_m$ είναι διαδοχικές κ'

$$\gamma + \tilde{\gamma} = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k + \sum_{k=1}^{m} \tilde{\gamma}_k$$

$$\Rightarrow \int_{\gamma+\tilde{\gamma}} f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \int_{\gamma_k} f(z)dz + \sum_{k=1}^{m} \int_{\tilde{\gamma}_k} f(z)dz$$

$$= \int_{\gamma} f(z)dz + \int_{\tilde{\gamma}} f(z)dz. \quad \boxtimes$$

<u>Πρόταση II.6.</u> Έστω γ τμηματικά λεία κ' $f:\gamma^* \to \mathbb{C}$ συνεχής. Τότε, $\int_{-\gamma} f(z)dz = -\int_{\gamma} f(z)dz$.

Θα χρειαστούμε το παρακάτω

<u>Λήμμα:</u> Εάν γ_1, γ_2 διαδοχικές καμπύλες, τότε

$$-(\gamma_1+\gamma_2) = (-\gamma_2) + (-\gamma_1).$$

Γενικότερα, αν $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ $(n \geq 1)$ διαδοχικές καμπύλες, τότε

$$-(\gamma_1+\gamma_2+\dots+\gamma_n) = (-\gamma_n)+\dots+(-\gamma_1).$$

<u>Απόδειξη:</u> Έστω $\gamma_1, \gamma_2 : [a,b] \to \mathbb{C}$. Τότε,

$$(\gamma_1+\gamma_2)(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t-a), & t\in\left[a, \frac{a+b}{2}\right] \\ \gamma_2(2t-b), & t\in\left[\frac{a+b}{2}, b\right] \end{cases}$$

• $\forall t \in \left[a, \frac{a+b}{2}\right]$, έχουμε $a+b-t \in \left[\frac{a+b}{2}, b\right]$

$$\Rightarrow -(\gamma_1+\gamma_2)(t) = (\gamma_1+\gamma_2)(a+b-t) =$$

$$= \gamma_2(2(a+b-t)-b) = \gamma_2(2a+b-2t)$$

$$= \gamma_2((a+b)-(2t-a))$$

$$= (-\gamma_2)(2t-a).$$

• Όμοια, $\forall t \in \left[\frac{a+b}{2}, b\right]$,

$$-(\gamma_1+\gamma_2)(t) = (-\gamma_1)(2t-a).$$

Άρα, $-(\gamma_1+\gamma_2) = (-\gamma_2)+(-\gamma_1)$.

Η γενίκευση προκύπτει επαγωγικά. $\boxtimes$

<u>Απόδειξη Πρότ. II.6.</u>

Υποθέτουμε αρχικά ότι $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ <u>λεία</u>. Ελέγχεται εύκολα ότι η $(-\gamma)$ είναι επίσης λεία κ'

$$(-\gamma)'(t) = -\gamma'(a+b-t), \quad \forall t \in [a,b].$$

Άρα,
$$\int_{-\gamma} f(z)dz = -\int_a^b f(\gamma(a+b-t))\gamma'(a+b-t)dt$$

$\underline{\underline{s=a+b-t}}$
$$\int_b^a f(\gamma(s))\gamma'(s)\,ds = -\int_\gamma f(z)dz.$$

Γενικά, έστω $\gamma = \gamma_1+\gamma_2+\cdots+\gamma_n$ $(n \geq 1)$

όπου $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ διαδοχικές λείες.

Τότε, $-\gamma = (-\gamma_n) + \cdots + (-\gamma_1)$ (βλ. λήμμα)

$$\Rightarrow \int_{-\gamma} f(z)dz = \int_{-\gamma_n} f(z)dz + \cdots + \int_{-\gamma_1} f(z)dz$$

$$= -\int_{\gamma_n} f(z)dz - \cdots - \int_{\gamma_1} f(z)dz$$

$$= -\left(\int_{\gamma_1} f + \cdots + \int_{\gamma_n} f\right) = -\int_{\gamma} f. \quad \boxtimes$$

(M−L ανισότητα!)

Πρόταση II. 7. Έστω γ τμηματικά λεία καμπύλη και $f : \gamma^* \to \mathbb{C}$ συνεχής. Έστω $M \geq 0$ ώστε $|f(z)| \leq M, \ \forall z \in \gamma^*$.

Τότε, $\left|\int_{\gamma} f(z)dz\right| \leq M \cdot \|\gamma\|$, όπου

$\|\gamma\|$ το μήκος της γ.

Απόδειξη: Υποθέτουμε αρχικά ότι γ λεία : $[a,b] \to \mathbb{C}$.

Τότε,

$$\left|\int_\gamma f(z)dz\right| = \left|\int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt\right|$$

(Πρόταση I.3) $\leq \int_a^b |f(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)|dt$

$$= \int_a^b |f(\gamma(t))|\cdot|\gamma'(t)|dt$$

$$\leq M\int_a^b |\gamma'(t)|dt = M\cdot\|\gamma\|.$$

Γενικά, έστω $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_n$ $(n \geq 1)$, όπου $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ <u>διαδοχικές</u> <u>λείες</u> καμπύλες.

Τότε, $\left|\int_\gamma f(z)dz\right| = \left|\sum_{k=1}^{n}\int_{\gamma_k} f(z)dz\right| \leq$

$$\leq \sum_{k=1}^{n}\left|\int_{\gamma_k} f(z)dz\right| \leq M\sum_{k=1}^{n}\|\gamma_k\|$$

$$= M\cdot\|\gamma\|.$$

$\boxtimes$

<u>Σημαντικό σχόλιο!!</u> <u>Δεν ισχύει</u> <u>γενικά ότι</u> $\left|\int_\gamma f(z)dz\right| \leq \int_\gamma |f(z)|dz.$

Π.χ. $\gamma(t)=e^{it}$, $t\in[0,2\pi]$,

$f(z)=1/z$, $z\in\gamma^*$.

Τότε, $\int_\gamma f(z)dz=\int_0^{2\pi}\frac{1}{e^{it}}ie^{it}dt$

$=2\pi i$

$\Rightarrow \left|\int_\gamma f(z)dz\right|=2\pi$,

ενώ $\int_\gamma |f(z)|dz=\int_\gamma\frac{1}{|z|}dz=$

$=\int_\gamma 1dz=\int_0^{2\pi}ie^{it}dt=e^{it}\Big|_0^{2\pi}$

$=1-1=0.$

Άρα, $\int_\gamma |f(z)|dz<\left|\int_\gamma f(z)dz\right|$!!

Παραδείγματα:

(i) $\left|\int_\gamma e^{\bar z \operatorname{Im} z}dz\right|\leq 2\pi\sqrt{e}$, όπου

$\gamma(t)=e^{it}$, $t\in[0,2\pi]$.

Πράγματι: $\forall\, z=x+iy\in\gamma^*$,

$\bar z\operatorname{Im} z=(x-yi)y=xy-iy^2$

$\Rightarrow \left|e^{\bar z\operatorname{Im} z}\right|=e^{\operatorname{Re}(\bar z\operatorname{Im} z)}=e^{xy}\leq$

$$\leq e^{\frac{1}{2}(x^2+y^2)} = e^{1/2} = \sqrt{e}.$$

[Σημ. $\forall z = x+iy \in \gamma^*$, είναι $|z|=1 \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2+y^2=1$.]

Επομένως,

(ML-ανισότητα) $\Rightarrow \left|\int_\gamma e^{\bar{z} \operatorname{Im} z} dz\right| \leq$

$\leq \sqrt{e}\,\|\gamma\| = 2\pi\sqrt{e}$.

(ii) $\left|\int_\gamma \frac{dz}{4+3z}\right| \leq 2\pi$, όπου $\gamma(t)=e^{it}$, $t\in[0,2\pi]$.

Πράγματι: $\forall z \in \gamma^*$, $|4+3z| \geq 4-3|z| = 1$

$$\Rightarrow \left|\frac{1}{4+3z}\right| \leq 1 \xRightarrow{\text{(ML-ανισ.)}}$$

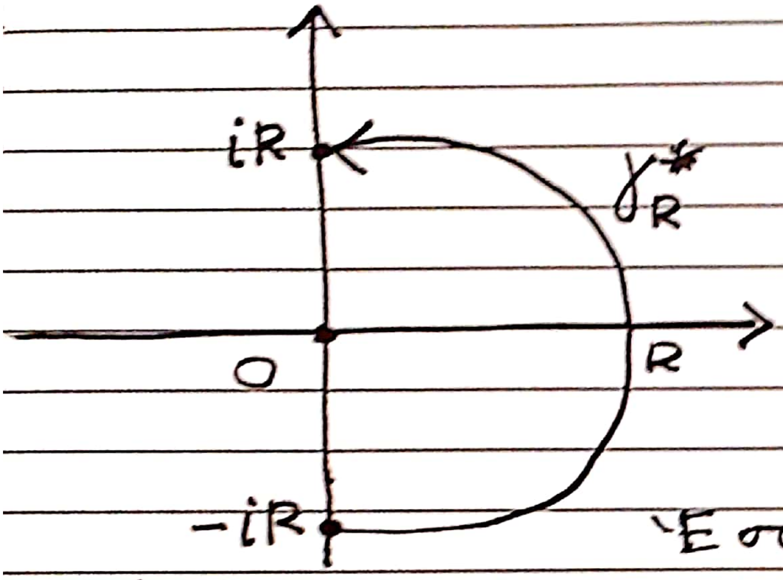
$$\Rightarrow \left|\int_\gamma \frac{1}{4+3z}dz\right| \leq 1\cdot 2\pi = 2\pi.$$

(iii) Να δ.ο. $\lim\limits_{R\to+\infty} \left|\int_{\gamma_R} \frac{\operatorname{Log} z}{z^2}dz\right| = 0$,

όπου $\gamma_R(t) = Re^{it}$, $t\in[-\pi/2, \pi/2]$ $(R>0)$.

Πράγματι: Κατ' αρχήν παρατηρούμε

ότι η $z \mapsto \mathrm{Log}\, z$ είναι συνεχής πάνω στο γ_R^*, διότι το γ_R^* δεν τέμνει τον αρνητικό ημιάξονα $(-\infty, 0]$.



Άρα, ορίζεται το ολοκλ.

$$\int_{\gamma_R} \frac{\mathrm{Log}\, z}{z^2}\, dz.$$

Έστω $R > 1$.

$\forall z \in \gamma_R^*$, έχουμε $\mathrm{Arg}\, z \in [-\pi/2, \pi/2]$

$$\Rightarrow |\mathrm{Log}\, z| = |\ln|z| + i\,\mathrm{Arg}\, z|$$

$$\leq \ln R + |\mathrm{Arg}\, z|$$

$$\leq \ln R + \pi/2$$

$$\Rightarrow \left| \frac{\mathrm{Log}\, z}{z^2} \right| \leq \frac{\ln R + \pi/2}{R^2}$$

(ML-ανισ.)

$$\Rightarrow \underline{\forall R > 1}, \quad \left| \int_{\gamma_R} \frac{\mathrm{Log}\, z}{z^2}\, dz \right| \leq \pi R \cdot \frac{\ln R + \frac{\pi}{2}}{R^2} =$$

$$= \pi \cdot \frac{\ln R + \pi/2}{R} \xrightarrow{R \to +\infty} 0.$$

Scanned with CamScanner

Παράγουσα - Ολοκλήρωμα ανεξάρτητο του δρόμου

Ορισμός II.8. Έστω $U \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό κ' $f: U \to \mathbb{C}$. Μια ολόμορφη συνάρτηση $F: U \to \mathbb{C}$ λέγεται παράγουσα της f ανν

$$F'(z) = f(z), \quad \forall z \in U.$$

Π.χ. • Η e^{z^2} είναι παράγουσα της $2ze^{z^2}$ στο $\mathbb{C}$.

• Η $-1/z$ είναι παράγουσα της $1/z^2$ στο $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

• Η $\mathrm{Log}\, z$ είναι παράγουσα της $1/z$ στο $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$.

Πρόταση II.9: Έστω $U \subseteq \mathbb{C}$ πεδίο (δηλ. ανοικτό, συνεκτικό), $f: U \to \mathbb{C}$ κ' F, G παράγουσες της f. Τότε,

$$\exists\, c \in \mathbb{C} \mid \quad F(z) = G(z) + c, \; \forall z \in U.$$

Απόδειξη: $(F - G)' = 0$ στο U = πεδίο

$\Rightarrow$ $F - G$ = σταθερή στο U. $\boxtimes$

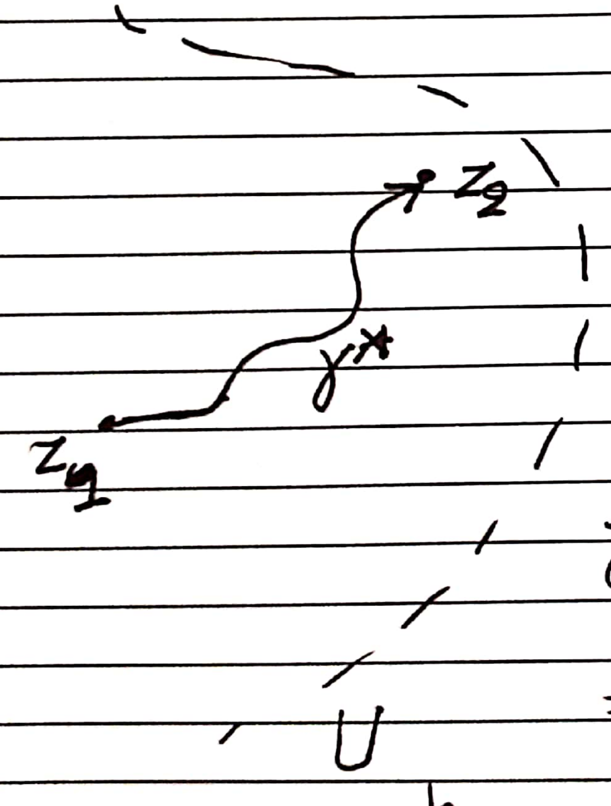
Scanned with CamScanner

<u>Πρόταση ΙΙ.10:</u> Έστω F παράγουσα της f στο ανοικτό $U \subseteq \mathbb{C}$ κ' $z_1, z_2 \in U$. Τότε,

$$\int_\gamma f(z)dz = F(z_2) - F(z_1),$$

για οποιαδήποτε τμηματικά λεία καμπύλη γ με $\gamma^* \subset U$, που έχει αρχή το z_1 κ' πέρας το z_2.

<u>Απόδειξη:</u>



Υποθέτουμε αρχικά ότι $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ <u>λεία</u> με $\gamma(a) = z_1, \gamma(b) = z_2$.

Τότε,

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt$$

$$= \int_a^b F'(\gamma(t))\gamma'(t)dt$$

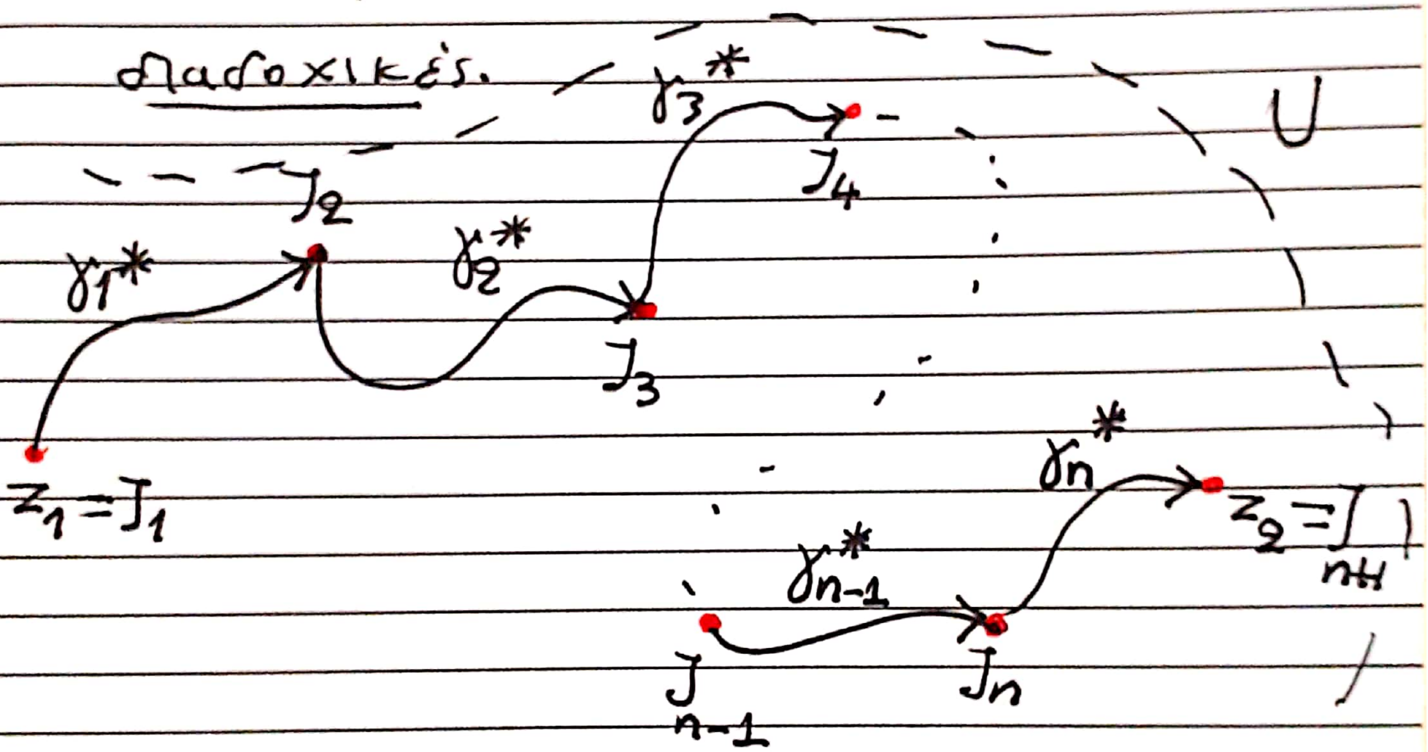
$$= \int_a^b \frac{d}{dt}\left[F(\gamma(t))\right]dt =$$

$$= F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) = F(z_2) - F(z_1).$$

Ας υποθέσουμε γενικά ότι γ τμηματικά λεία καμπύλη με αρχή το z_1 και πέρας το z_2, ώστε

$$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_n \quad (n \geq 2),$$

όπου $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ <u>λείες καμπύλες</u> <u>διαδοχικές</u>.



$\forall\, k \in \{1, 2, \dots, n\}$, θέτουμε

$J_k =$ η αρχή της γ_k,

$J_{k+1} =$ το πέρας της γ_k.

Τότε, $J_1 = z_1$, $J_{n+1} = z_2$.

Έχουμε

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_{\gamma_1} f + \int_{\gamma_2} f + \int_{\gamma_3} f + \dots + \int_{\gamma_{n-1}} f + \int_{\gamma_n} f =$$

$$= [\cancel{F(J_2)} - F(J_1)] + [\cancel{F(J_3)} - \cancel{F(J_2)}] +$$
$$+ [F(J_4) - \cancel{F(J_3)}] + \dots + [\cancel{F(J_n)} - F(J_{n-1})] +$$
$$+ [F(J_{n+1}) - \cancel{F(J_n)}] =$$
$$= F(J_{n+1}) - F(J_1) = F(z_2) - F(z_1).$$ ⊠

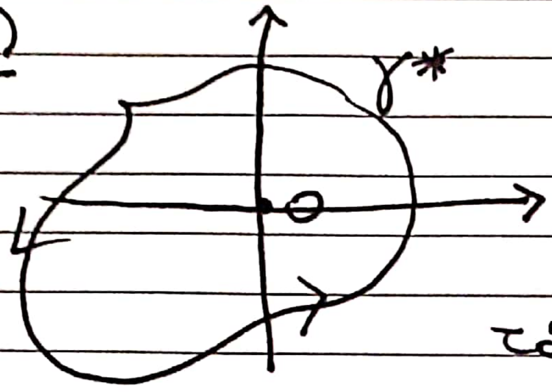
<u>Πόρισμα II.11</u>: Έστω γ <u>κλειστή τμηματικά λεία</u> καμπύλη με $\gamma^* \subset U$, όπου $U \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό. Εάν $f: U \to \mathbb{C}$ με παράγουσα, τότε $\int_\gamma f(z)dz = 0$.

<u>Απόδειξη</u>: Έστω F παράγουσα της f στο U. Εάν γ κλειστή τμ. λεία με $\gamma^* \subset U$, τότε η αρχή z_1 και το πέρας z_2 της γ ταυτίζονται

$$\xRightarrow{(\text{Πρότ. II.10})} \int_\gamma f(z)dz = F(z_2) - F(z_1) = 0.$$ ⊠

Παραδείγματα:

(i)



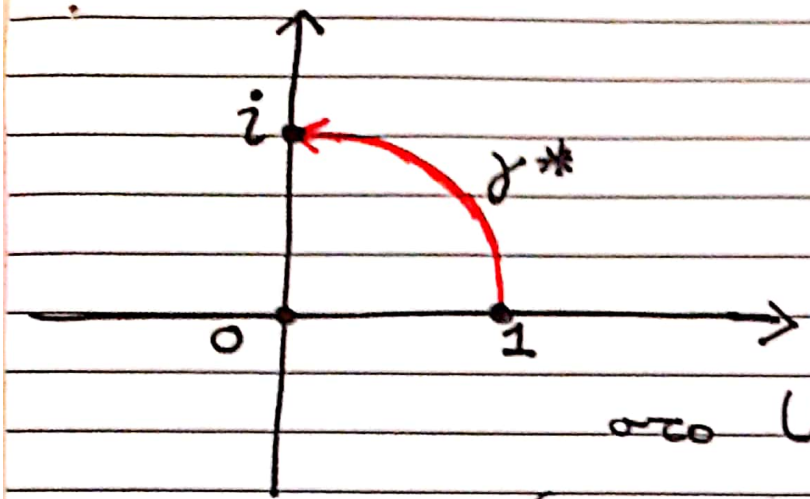
Εάν γ τμημ. λεία κλειστή καμπύλη με 0 ∉ γ^*, τότε $\int_\gamma \frac{dz}{z^2} = 0$.

Πράγματι: $\gamma^* \subset U = \mathbb{C}\setminus\{0\}$ = ανοικτό κ' η $\frac{1}{z^2}$ έχει παράγουσα στο U (π.χ. την $-1/z$.)

(ii) $\int_\gamma \frac{dz}{z} = 2\pi i$, $\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

Έπεται ότι η $1/z$ δεν έχει παράγουσα στο $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ (αλλιώς θα έπρεπε $\int_\gamma \frac{dz}{z} = 0$). Φυσικά, έχει παράγουσα στο $\mathbb{C}\setminus(-\infty, 0]$, την $\mathrm{Log}\, z$.

(iii) Να υπολογιστεί το $\int_\gamma \frac{\mathrm{Log}^3 z}{z}\, dz$, όπου $\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0, \pi/2]$.



$\gamma^* \subset U = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$

Η $z \mapsto \frac{1}{4} \mathrm{Log}^4 z$ είναι ολόμορφη στο U κι'

$$\left(\frac{1}{4} \mathrm{Log}^4 z\right)' = \frac{\mathrm{Log}^3 z}{z}, \quad \forall z \in U$$

$$\Rightarrow \int_\gamma \frac{\mathrm{Log}^3 z}{z}\, dz = \frac{1}{4}\left(\mathrm{Log}^4 i - \underbrace{\mathrm{Log}^4 1}_{0}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left[\ln|i| + i\,\mathrm{Arg}(i)\right]^4 = \frac{1}{4}\left(\frac{i\pi}{2}\right)^4$$

$$= \frac{\pi^4}{64}.$$

<u>(iv)</u> Έστω f ολόμορφη στον ανοικτό δίσκο

$$D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$$

ώστε

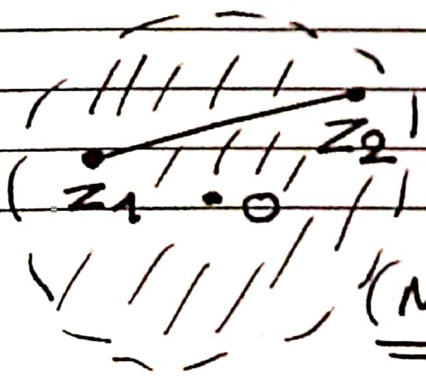
$$|f'(z)| \leq M, \quad \forall z \in D,$$

όπου $M > 0$ σταθερά.

Τότε,

$$|f(z_1) - f(z_2)| \leq M |z_1 - z_2|,$$

$\forall\, z_1, z_2 \in D$. Πράγματι: έστω $z_1, z_2 \in D$.



Τότε, $[z_1, z_2] \subset D$

$$\Rightarrow f(z_2) - f(z_1) = \int_{[z_1, z_2]} f'(z)\, dz$$

$\xRightarrow{\text{(ML-ανισ.)}}$ κ.λ.π.