ΒΑΣΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΟΛΟΜΟΡΦΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

1. Προαπαιτούμενα

Ορισμός 1.1. Έστω $I \subseteq \mathbb{R}$ ανοικτό διάστημα, $\varphi: I \to \mathbb{C}$ κ' $t_0 \in I$.

Η φ λέγεται διαφορίσιμη στο t_0 ανν οι συναρτήσεις $u = \mathrm{Re} f$, $v = \mathrm{Im} f$ είναι παραγωγίσιμες στο t_0.

Σ' αυτή την περίπτωση γράφουμε

$$\varphi'(t_0) = u'(t_0) + i v'(t_0).$$

Οι διαφορίσιμες συναρτήσεις της μορφής $\varphi(t) = u(t) + i v(t)$, $t \in I$ ($I \subseteq \mathbb{R}$ ανοικτό διάστημα)

έχουν όλες τις ιδιότητες που έχουν οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις πάνω σε διαστήματα, εκτός από το Θ. Rolle

Π.χ. $\varphi(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$

$\varphi(0) = \varphi(2\pi) = 1$ αλλά $\varphi'(t) = ie^{it} \neq 0$ $\forall t \in (0, 2\pi)$.

Παρατήρηση 1.2. Εάν $\varphi(t) = u(t) + iv(t)$, $t \in I$, διαφορίσιμη στο I με $\varphi'(t) = 0$, $\forall t \in I$, τότε $\varphi =$ σταθερή στο I.

Πράγματι σ' αυτή την περίπτωση, $u'(t) = v'(t) = 0$, $t \in I \Rightarrow u, v$ σταθερές στο I.

Πρόταση 1.3. Έστω $U \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό, $f : U \to \mathbb{C}$ ολόμορφη κ' $\varphi : I \to U$ διαφορ. ($I \subseteq \mathbb{R}$ ανοικτό). Τότε,

$$\frac{d}{dt}[f(\varphi(t))] = f'(\varphi(t))\varphi'(t), \quad t \in I.$$

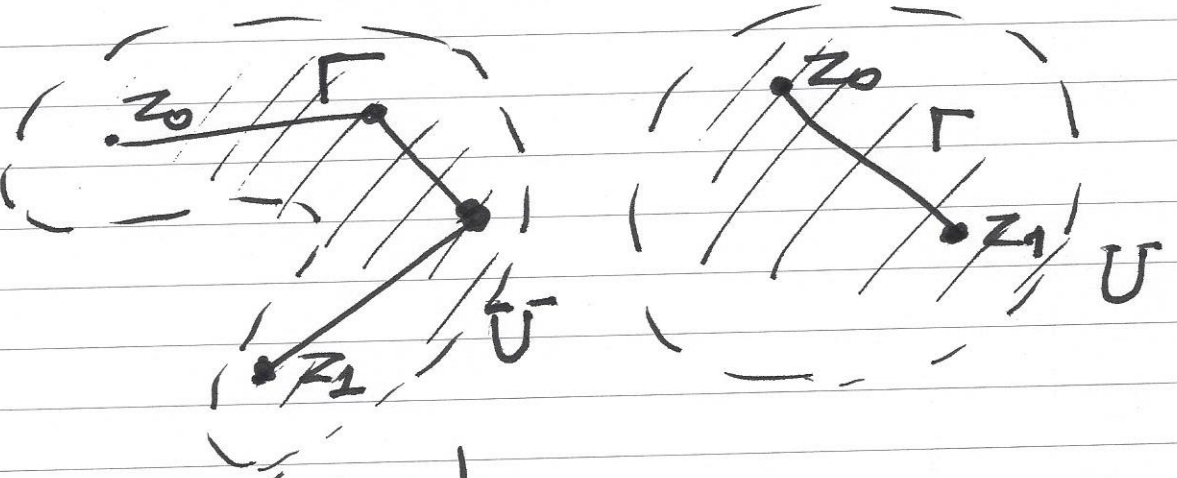
Έστω $z_0, z_1 \in \mathbb{C}$. Το ευθ. τμήμα με αρχή το z_0 κ' πέρας το z_1 είναι το

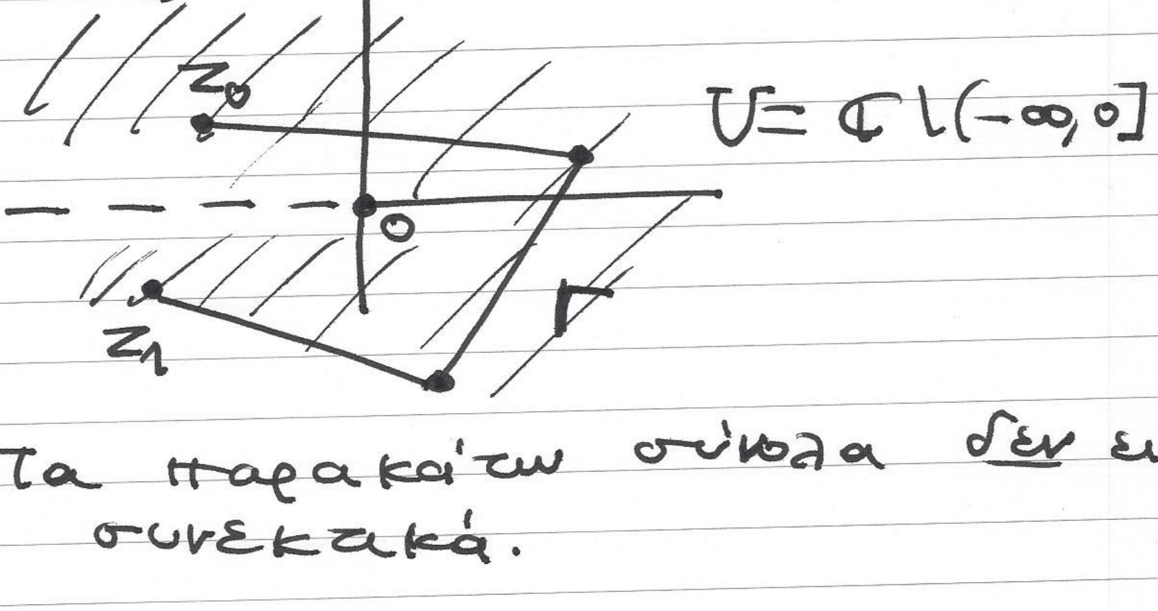
$$[z_0, z_1] = \{(1-t)z_0 + tz_1 \mid t \in [0,1]\}$$

<u>Ορισμός 1.4</u>. Έστω $U \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό.

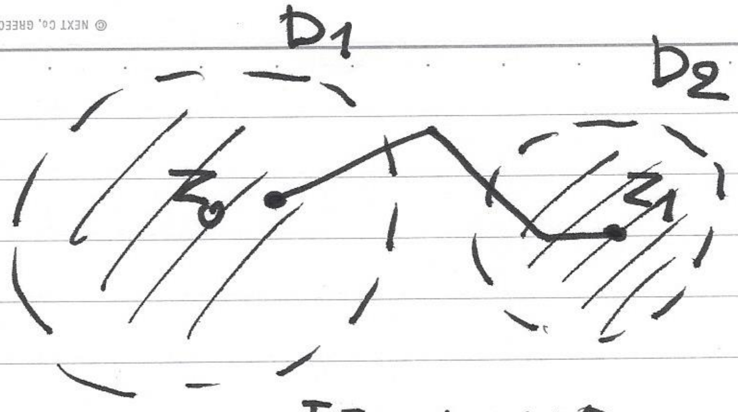
Το U λέγεται <u>συνεκτικό</u> ανν $\forall z_0, z_1 \in U$ $\exists$ τεθλασμένη γραμμή $\Gamma \subset U$ που συνδέει τα z_0, z_1.

<u>Π.χ.</u> τα παρακάτω σύνολα είναι συνεκτικά.

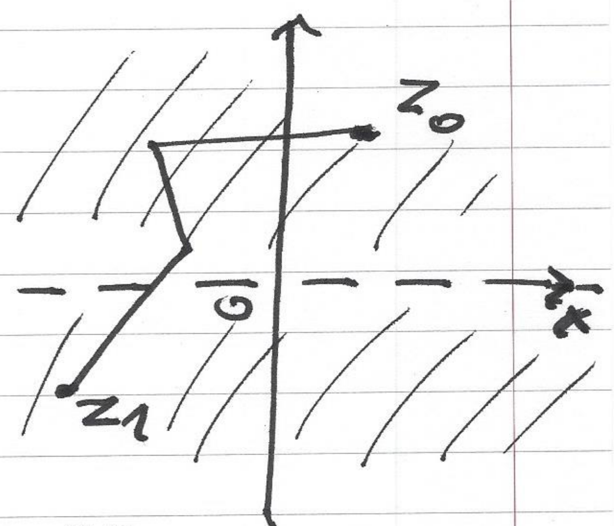




Τα παρακάτω σύνολα <u>δεν</u> είναι συνεκτικά.



$U = D_1 \cup D_2$



$U = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$

Και στις δύο περιπτώσεις, κάθε τεθλασμένη γραμμή που συνδέει τα $z_0, z_1 \in U$ έχει σημεία της εκτός του U.

<u>Σχόλιο</u>: Τα συνεκτικά ανοικτά υποσύνολα του $\mathbb{R}$ είναι τα ανοικτά διαστήματα. Η έννοια του συνεκτικού συνόλου στο $\mathbb{C}$ επεκτείνει την έννοια του διαστήματος.

<u>Πρόταση 1-5.</u>: Έστω U <u>ανοικτό</u>, <u>συνεκτικό</u> $\subseteq \mathbb{C}$ κ' $f \in H(U)$ με $f'(z) = 0$, $\forall z \in U$. Τότε, f σταθερή στο U.

Απόδειξη:

Ισχυρισμός: Εάν $z_0, z_1 \in U$ με $[z_0, z_1] \subset U$, τότε η f είναι σταθερή στο $[z_0, z_1]$.

[Πράγματι· $\forall t \in (0,1)$,

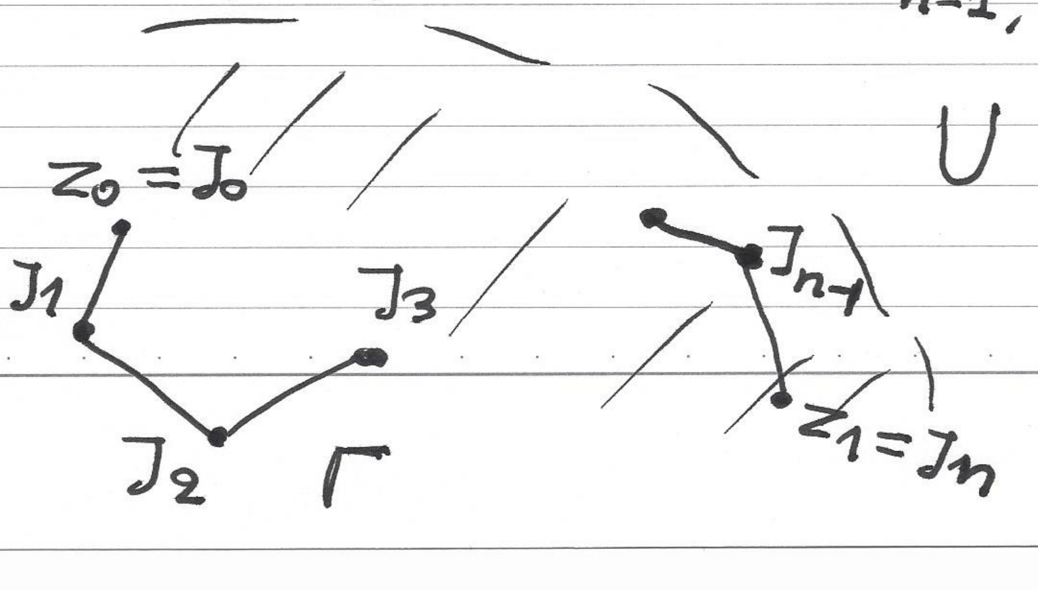
$$\frac{d}{dt}\left[f((1-t)z_0 + tz_1)\right] =$$

$$= f'((1-t)z_0 + tz_1) \cdot \frac{d}{dt}\left[(1-t)z_0 + tz_1\right]$$

$$= f'((1-t)z_0 + tz_1) \cdot (z_1 - z_0) = 0,$$ αφού $f' = 0$, στο U.]

Έστω τώρα $z_0, z_1 \in U$. Εφόσον U συνεκτικό, $\exists$ τεθλασμένη γραμμή $\Gamma \subset U$ με κορυφές

$J_0 = z_0,\ J_1,\ J_2,\ \dots,\ J_{n-1},\ J_n = z_1\ (n \geq 2)$



Λόγω του Ισχυρισμού, η f είναι σταθερή στα διαστήματα

$$[z_0, J_1], [J_1, J_2], \dots, [J_{n-2}, J_{n-1}],$$
$$[J_{n-1}, z_1].$$

Άρα,

$$f(z_0) = f(J_1),\ f(J_1) = f(J_2), \dots,$$
$$f(J_{n-2}) = f(J_{n-1}),\ f(J_{n-1}) = f(z_1)$$
$$\Rightarrow f(z_0) = f(z_1),\ \forall z_0, z_1 \in U.$$

Επομένως, f σταθερή. $\boxtimes$

<u>Σχόλιο</u>: Η συνεκτικότητα του U στην Πρόταση 1.5 <u>δεν μπορεί να παραλειφθεί γενικά</u>.

<u>Π.χ.</u> $D_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$, $D_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 2\}$,
$U = D_1 \cup D_2$.

Το U είναι ανοικτό, <u>μη</u> συνεκτικό. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : U \to \mathbb{C}$ με

$$f(z) = \begin{cases} 1, & z \in D_1 \\ 0, & z \in D_2 \end{cases}.$$ Τότε,

$f \in \mathcal{H}(U)$, $f' \equiv 0$, στο U κι' f μη σταθερή.

<u>Ορισμός 1-6.</u> <u>Πεδίο</u> στο $\mathbb{C}$, είναι ένα ανοικτό, συνεκτικό σύνολο $\subseteq \mathbb{C}$.

<u>Πρόταση 1.7:</u> Έστω $U \subseteq \mathbb{C}$ πεδίο κ' $f \in \mathcal{H}(U)$. Ισχύουν τα παρακάτω:

<u>(i)</u> Εάν $\mathrm{Re}f$ ή $\mathrm{Im}f$ σταθερή, τότε f σταθερή.

<u>(ii)</u> Εάν $\overline{f} \in \mathcal{H}(U)$, τότε f σταθερή.

<u>(iii)</u> Εάν $|f|$ σταθερή, τότε f σταθερή.

<u>Απόδειξη:</u> <u>(i)</u> $u = \mathrm{Re}f$, $v = \mathrm{Im}f$.

Ας υποθέσουμε ότι u = σταθερή. Τότε, $u_x = u_y = 0$, στο U. Από συνθήκες (C-R) παίρνουμε $v_x = -u_y = 0$, στο U

$\Rightarrow f' = u_x + i v_x = 0$, στο U

$\xRightarrow{\text{(Πρότ. 1.5)}}$ f σταθερή. [Όμοια, αν v σταθερή.]

<u>(ii)</u> $\overline{f} = u - iv$, $u = \mathrm{Re}f$, $v = \mathrm{Im}f$

(C-R) για την f: $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$

(C-R) " " $\overline{f}$: $u_x = -v_y$, $u_y = v_x$.

Έπεται ότι $u_x = v_x = 0 \Rightarrow f' = 0$, στο U

$\xRightarrow{\text{(Πρότ. 1-5)}}$ f = σταθερή.

(iii) Έστω $|f| = c =$ σταθερή $\in [0, +\infty)$.

- αν $c = 0$, τότε $f = 0$, στο U.
- Έστω ότι $c \neq 0$. Τότε, $\forall z \in U$,

$$|f(z)|^2 = c^2 \Rightarrow f(z) \cdot \overline{f(z)} = c^2$$

$$\Rightarrow \overline{f(z)} = \frac{c^2}{f(z)}, \forall z \in U \Rightarrow \overline{f} \in \mathcal{H}(U)$$

$$\overset{(ii)}{\Longrightarrow} \quad f \text{ σταθερή.}$$

$\boxtimes$

Άσκηση 1: Έστω $U \subseteq \mathbb{C}$ πεδίο και $f \in \mathcal{H}(U)$.

(i) Αν $e^f =$ σταθερή, τότε $f =$ σταθερή.
(ii) Αν $f(z) \cdot f'(z) = 0$, $\forall z \in U$, τότε $f =$ σταθερή.

Απόδειξη: (i) $(e^f)' = 0 \Rightarrow f' e^f = 0$ στο U $\Longrightarrow f' = 0$, στο U
$\Longrightarrow f =$ σταθερή.

(ii) Θέτω $g = f^2$. Τότε, $g' = 2f \cdot f' = 0$

$\Rightarrow g =$ σταθερή στο U, έστω $g = c \in \mathbb{C}$.
Τότε,
$$|f|^2 = |g| = |c| \Rightarrow |f| = \sqrt{|c|}$$

$$\Rightarrow |f| = \text{σταθερή} \overset{(\text{Προτ. } 1.7)}{\Longrightarrow} f = \text{σταθερή.}$$

$\boxtimes$

Άσκηση 2: Έστω $U \subseteq \mathbb{C}$ πεδίο κ' $f, g \in \mathcal{H}(U)$ ώστε $f(z)+\overline{g(z)} \in \mathbb{R}, \forall z \in U$.

Να δ.ο. $\exists\, c \in \mathbb{R} \mid f(z)=c+g(z), \forall z \in U$.

Απόδειξη: Θέτω $h=f-g$.

Τότε, $\forall z \in U$, $f(z)+\overline{g(z)} = \overline{f(z)+\overline{g(z)}} =$

$$= \overline{f(z)} + \overline{\overline{g(z)}} = \overline{f(z)} + g(z)$$

$$\Rightarrow h(z) = \overline{h(z)}, \forall z \in U \Rightarrow h, \overline{h} \in \mathcal{H}(U)$$

$\xRightarrow{\text{Πρότ. 1.7}}$ $h = c =$ σταθερή. Αλλά, $\overline{c} = c$

$\Rightarrow c \in \mathbb{R}$. ⊠

Άσκηση 3: Έστω $U \subseteq \mathbb{C}$ πεδίο κ' $f : U \to \mathbb{C}$ μια συνάρτηση ώστε $f^3 \in \mathcal{H}(U)$, $\overline{f}^2 \in \mathcal{H}(U)$.

Να δ.ο. f σταθερή.

Απόδειξη: $f^6 = (f^3)^2 \in \mathcal{H}(U)$,

$$\overline{f^6} = (\overline{f}^2)^3 \in \mathcal{H}(U) \xRightarrow{(\text{Πρότ. 1.7})} f^6 = \text{σταθερή}.$$

Τότε, $|f|^6 = |f^6| =$ σταθερή

$\Rightarrow |f| =$ σταθερή

$\Rightarrow |f| = c \geq 0$.

Τότε, $|f^3| = c^3$, $|\bar{f}^2| = |\bar{f}|^2 = |f|^2 = c^2$

$\xRightarrow{(\text{Πρότ. } 1.7)}$ $f^3 = c_1 \in \mathbb{C}$, $f^2 = c_2 \in \mathbb{C}$. $^{(+)}$

$\Rightarrow$ $c_1 = c_2 \cdot f(z)$, $\forall z \in U$.

- Αν $c_2 = 0$, τότε $f = 0$, στο U.
- Αν $c_2 \neq 0$, τότε $f(z) = c_1/c_2$, $\forall z \in U$.

Άρα, $f =$ σταθερή σε κάθε περίπτωση.

(+) Είναι $\bar{f}^2 \in \mathcal{H}(U)$ κ' $|\bar{f}^2| =$ σταθερή

$\xRightarrow{\text{Πρότ. } 1.7}$ $\bar{f}^2 =$ σταθερή

$\Rightarrow$ $f^2 =$ σταθερή.