ΑΡΧΗ ΜΕΓΙΣΤΟΥ

$$D(z_0, R) = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < R \},$$

$z_0 \in \mathbb{C}$, $0 < R < \infty$.

<u>Λήμμα 1:</u> Έστω f ολόμορφη στον $D(z_0, R)$.

Υποθέτουμε ότι η $|f|$ λαμβάνει μέγιστο στο $\overbrace{\underline{\text{κέντρο}}}^{z_0}$ του $D(z_0, R)$, δηλ.

$$|f(z_0)| = \max_{z \in D(z_0, R)} |f(z)|.$$

Τότε, $f =$ σταθερή στον $D(z_0, R)$.

<u>Απόδειξη:</u> Θα δ.ο. $|f(z)| = |f(z_0)|$,

$\forall z \in D(z_0, R)$.

Έστω $z \in D(z_0, R)$.

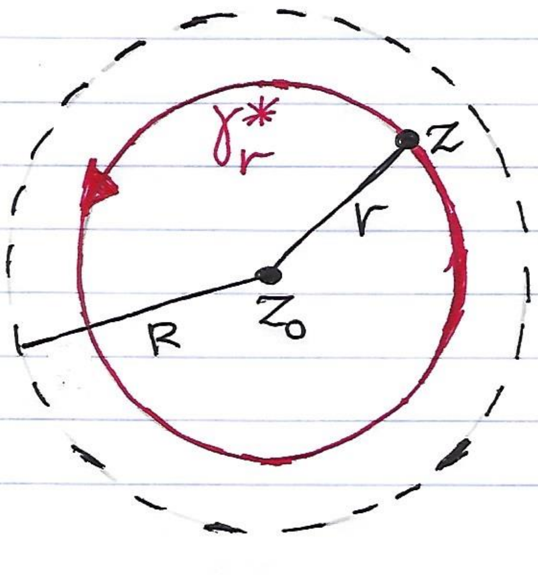
Θέτουμε

$r = |z - z_0|$

και

$\gamma_r(t) = z_0 + re^{it}$,

$t \in [0, 2\pi]$.



Προφανώς, $\gamma_r^* \subset D(z_0, R)$.

Ολοκλ. τύπος Cauchy $\Longrightarrow$

$$\Rightarrow f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r} \frac{f(w)}{w-z_0}\,dw$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{f(z_0+re^{it})}{re^{it}}\, ire^{it}\,dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0+re^{it})\,dt.$$

Λόγω της υπόθεσης, έχουμε

$$|f(z_0+re^{it})| \le |f(z_0)|, \ \forall t\in[0,2\pi],$$

οπότε

$$|f(z_0)| \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z_0+re^{it})|\,dt$$

$$\le |f(z_0)|$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z_0+re^{it})|\,dt = |f(z_0)|$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Big[\,|f(z_0)| - |f(z_0+re^{it})|\,\Big]\,dt = 0.$$

Όμως, η συνάρτηση $\varphi : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$

με $\varphi(t) = |f(z_0)| - |f(z_0 + re^{it})|$

είναι <u>συνεχής</u>, <u>μη αρνητική</u> και

$$\int_0^{2\pi} \varphi(t)\,dt = 0$$

$$\Longrightarrow \quad \varphi(t) = 0, \quad \forall t \in [0, 2\pi]$$

$$\Longrightarrow \quad \forall w \in \gamma_r^*, \quad |f(w)| = |f(z_0)|$$

$$\Longrightarrow \quad |f(z)| = |f(z_0)|.$$

Η τελευταία <u>ισχύει</u> $\forall z \in D(z_0, R)$

$\Longrightarrow$ $|f| =$ σταθερή στον $D(z_0, R) =$ πεδίο

$\Longrightarrow$ $f =$ σταθερή στον $D(z_0, R)$.

$\boxtimes$

<u>Λήμμα 2:</u> Έστω $U \subseteq \mathbb{C}$ πεδίο (= ανοικτό, <u>συνεκτικό</u>) και V_1, V_2 ανοικτά ώστε

$$U = V_1 \cup V_2, \quad V_1 \cap V_2 = \emptyset.$$

Τότε, κάποιο εκ των V_1, V_2 είναι $\emptyset$.

(Η απόδειξη παραλείπεται.)

<u>Λήμμα 3:</u> Έστω $U \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό και $f: U \to \mathbb{C}$ συνεχής, $\rho > 0$. Τότε, το σύνολο

$$V_1 = \{ z \in U \mid |f(z)| < \rho \}$$

είναι ανοικτό.

<u>Απόδειξη:</u> Έστω $z_1 \in V_1$. Επιλέγουμε $\varepsilon > 0$ με $0 < \varepsilon < \rho - |f(z_1)|$. Επειδή $|f|$ συνεχής στο $z_1 \in U$ = ανοικτό, $\exists\, \delta > 0 \mid$ $D(z_1, \delta) \subset U$, $\forall z \in D(z_1, \delta)$, $|f(z)| < |f(z_1)| + \varepsilon$

$$< \rho$$

$\Rightarrow D(z_1, \delta) \subset V_1$

$\Rightarrow z_1$ εσωτερικό σημείο του V_1. $\boxtimes$

Θεώρημα 4 (Αρχή Μεγίστου, 1η μορφή):

Έστω $U \subseteq \mathbb{C}$ πεδίο (= ανοικτό, συνεκτικό) και $f : U \to \mathbb{C}$ ολόμορφη, μη σταθερή. Τότε, η $|f|$ δεν λαμβάνει μέγιστο στο U.

Απόδειξη: Υποθέτουμε αντιθέτως ότι $\exists\, z_0 \in U$ ώστε $|f(z_0)| = \max\limits_{z \in U} |f(z)|$.

Τότε, $\forall z \in U$, $|f(z)| \leq |f(z_0)|$.

Θέτουμε

$$V_1 = \{ z \in U : |f(z)| < |f(z_0)| \},$$

$$V_2 = \{ z \in U : |f(z)| = |f(z_0)| \}.$$

Τότε, $U = V_1 \cup V_2$, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ και V_1 ανοικτό (βλ. Λήμμα 3), $V_2 \neq \emptyset$.

Ισχυριζόμαστε ότι και V_2 ανοικτό.

Πράγματι· έστω $z_2 \in V_2$. Αφού $z_2 \in U =$ ανοικτό, $\exists\, \delta > 0 \,|\, D(z_2, \delta) \subset U$.

Έχουμε

$$\forall z \in D(z_2, \delta), \quad |f(z)| \leq |f(z_0)| = |f(z_2)|$$

$$\Longrightarrow$$

$$\Rightarrow |f(z_2)| = \max_{z \in D(z_2, \delta)} |f(z)|$$

$\xRightarrow{(\text{Λήμμα}1)}$ f σταθερή στο $D(z_2, \delta)$, δηλ.

$$\forall z \in D(z_2, \delta), \quad f(z) = f(z_2)$$

$$\Rightarrow |f(z)| = |f(z_2)| = |f(z_0)|, \forall z \in D(z_2, \delta)$$

$$\Rightarrow D(z_2, \delta) \subseteq V_2$$

$\Rightarrow$ z_2 εσωτερικό σημείο του V_2.

Δείξαμε λοιπόν ότι V_2 ανοικτό.
Συνοψίζοντας έχουμε ότι

$U = V_1 \cup V_2$, V_1, V_2 ανοικτά, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, $V_2 \neq \emptyset$.

Λήμμα 2 $\xRightarrow{(U \text{ πεδίο})}$ $V_1 = \emptyset$

$$\Rightarrow U = V_2 \Rightarrow \forall z \in U, \; |f(z)| = |f(z_0)|$$

$\Rightarrow |f| =$ σταθερή στο U

$\Rightarrow f =$ " " " (ΑΤΟΠΟ!)

$\boxtimes$

Θεώρημα 5 (Αρχή Ελαχίστου, 1^{η} εκδοχή)

Έστω $U \subseteq \mathbb{C}$ πεδίο και $f: U \to \mathbb{C}$ ολόμορφη μη σταθερή, ώστε

$$f(z) \neq 0, \quad \forall z \in U.$$

Τότε, η $|f|$ δεν λαμβάνει ελάχιστη τιμή στο U.

Απόδειξη: Θέτουμε $g = 1/f \in \mathcal{H}(U)$.

Ας υποθέσουμε αντιθέτως ότι $\exists z_0 \in U \,|$

$$|f(z_0)| = \min_{z \in U} |f(z)|.$$

Τότε,

$$|g(z_0)| = \max_{z \in U} |g(z)|$$

$\overset{\Theta.4}{\underset{\text{(Αρχή Μεγίστου)}}{\Longrightarrow}}$ $g =$ σταθερή $\Rightarrow f =$ σταθερή (Άτοπο!) $\boxtimes$

Σχόλιο: Η υπόθεση "$f(z) \neq 0, \forall z \in U$" στο Θ.5 δεν μπορεί να παραλειφθεί. Π.χ.

$$f(z) = z, \qquad z \in D(0,1).$$

Τότε, f ολόμορφη, μη σταθερή, ενώ

$$\min_{|z|<1} |f(z)| = 0 = f(0).$$

Θεώρημα 6 (Αρχή Μεγίστου, 2η εκδοχή):

Έστω $U \subset \mathbb{C}$ φραγμένο πεδίο με σύνορο ∂U.

Θέτουμε
$$\overline{U} = U \cup \partial U \ (= \text{κλειστό, φραγμένο})$$
και
$$f : \overline{U} \to \mathbb{C} \quad \text{συνεχής}$$
με
$$f|_U \in \mathcal{H}(U).$$
Τότε,
$$\max_{z \in \overline{U}} |f(z)| = \max_{z \in \partial U} |f(z)|. \qquad (1)$$

Εάν επιπλέον f μη σταθερή, τότε το $\max\limits_{z \in \overline{U}} |f(z)|$ λαμβάνεται μόνο σε σημεία του ∂U.

Απόδειξη: Η $|f|$ είναι συνεχής στο κλειστό κ' φραγμένο σύνολο $\overline{U}$, οπότε υπάρχει το
$$\max_{z \in \overline{U}} |f(z)| = M.$$

- Εάν f = σταθερή, η (1) προφανώς ισχύει.
- Εάν f μη σταθερή, το M δεν λαμβάνεται σε σημεία του U (Θ. 4 – Αρχή Μεγίστου, 1η εκδοχή), οπότε λαμβάνεται μόνο στο ∂U ($\Rightarrow$ ισχύει η (1)). $\boxtimes$

<u>Θεώρημα 7 (Αρχή Ελαχίστου, 2η εκδοχή):</u>

Έστω U, f όπως στο Θ. 6. Υποθέτουμε επιπλέον ότι

$$f(z) \neq 0, \quad \forall z \in U.$$

Τότε,

$$\min_{z \in \overline{U}} |f(z)| = \min_{z \in \partial U} |f(z)|. \qquad (2)$$

Εάν επιπλέον f <u>μη σταθερή</u>, τότε το $\min_{z \in \overline{U}} |f(z)|$ λαμβάνεται <u>μόνο</u> σε σημεία του ∂U.

<u>Απόδειξη:</u> Η $|f|$ είναι συνεχής στο κλειστό κ' φραγμένο σύνολο $\overline{U}$, οπότε υπάρχει το

$$\min_{z \in \overline{U}} |f(z)| = m.$$

- Εάν f = σταθερή, η (2) προφανώς ισχύει.
- Εάν f μη σταθερή, επειδή
$$f(z) \neq 0 \quad \forall z \in U,$$
η Αρχή Ελαχίστου – 1η εκδοχή (Θ.5) μας δίνει ότι το $m = \min_{z \in \overline{U}} |f(z)|$ <u>δεν</u> λαμβάνεται σε σημεία του U, οπότε λαμβάνεται μόνο σε σημεία του ∂U ($\Longrightarrow$ ισχύει η (2)).

$\boxtimes$

Ασκήσεις:

(1) Εάν $f(z)=z^2+z-1$, $z\in\mathbb{C}$, να βρεθούν τα

$$\max_{|z|\leq 1}|f(z)|, \quad \min_{|z|\leq 1}|f(z)|,$$

καθώς κ' τα σημεία z πάνω στα οποία τα παραπάνω max, min λαμβάνονται.

Λύση: Θέτουμε $U=\{z\in\mathbb{C} : |z|<1\}$.

Τότε, $\overline{U}=\{z\in\mathbb{C} : |z|\leq 1\}$, $\partial U=\{z\in\mathbb{C} : |z|=1\}$.

f συνεχής στο $\overline{U}$, f ολόμορφη στο U και f μη σταθερή.

Από την Αρχή Μεγίστου – 2η εκδοχή (Θ. 6) έπεται ότι το

$$\max_{|z|\leq 1}|f(z)| = M$$

λαμβάνεται μόνο σε σημεία $z\in\partial U$.

$\forall z\in\partial U$, έχουμε $\bar{z}=1/z$ και

$$|f(z)| = \left|z\left(z+1-\frac{1}{z}\right)\right| = |1+z-\bar{z}|$$

$$= |1+2i\,\mathrm{Im}(z)| = \sqrt{1+4(\mathrm{Im}z)^2}.$$

Εάν $z\in\partial U$, $\exists\,\theta\in(-\pi,\pi] \mid z=e^{i\theta}$, οπότε

$$|f(z)| = \sqrt{1+4\sin^2\theta} \leq \sqrt{5}.$$

Το "=" στην παραπάνω ανισότητα ισχύει μόνο για

$$\sin^2\theta = \quad \Leftrightarrow \quad |\sin\theta| = 1$$

$$\Leftrightarrow \theta = \pi/2 \text{ ή } -\pi/2$$

$$\Leftrightarrow \quad z = \pm i.$$

Άρα, $\max\limits_{|z|\leq 1} |f(z)| = \sqrt{5}$ κ' λαμβάνεται <u>μόνο για $z = \pm i$</u>.

Για τον υπολογισμό του $\min\limits_{|z|\leq 1} |f(z)|$ <u>δεν</u> πρέπει να βιαστούμε να εφαρμόσουμε την Αρχή του Ελαχίστου, πριν εξετάσουμε αν η f έχει ρίζες στο $U = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

Έχουμε

$$f(z) = 0 \Leftrightarrow z^2 + z - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad z = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Επειδή $\left|\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right| < 1 < \left|\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right|$,

η f έχει (μοναδική) ρίζα στο U την $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

$\Rightarrow$ <u>δεν</u> εφαρμόζεται η Αρχή Ελαχίστου.

Προφανώς, $\min\limits_{|z|\leq 1} |f(z)| = 0 = f\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$.

2) Εάν $f(z)=e^{z^2}$, να βρείτε το $\min\limits_{1\leq|z|\leq 2}|f(z)|$, καθώς κ' τα σημεία στα οποία το παραπάνω min λαμβάνεται.

<u>Λύση:</u> Θέτουμε $U=\{z\in\mathbb{C} : 1<|z|<2\}$. Τότε,

$$\bar{U}=\{z\in\mathbb{C} : 1\leq|z|\leq 2\},$$

$$\partial U=\{z\in\mathbb{C} : |z|=1 \text{ ή } |z|=2\}.$$

$f\neq$ σταθερή κ' $f(z)\neq 0$, $\forall z\in U$, οπότε, από την Αρχή Ελαχίστου, το $m=\min\limits_{z\in\bar{U}}|f(z)|$ λαμβάνεται <u>μόνο</u> σε σημεία του ∂U. Τότε

$$m=\min\left\{\min_{|z|=1}|f(z)|,\ \min_{|z|=2}|f(z)|\right\}.$$

Έστω $r>0$ κ' $z\in\mathbb{C}$ με $|z|=r$. Τότε,

$$z=re^{i\theta}, \text{ για κάποιο } \theta\in(-\pi,\pi].$$

$$\Rightarrow |f(z)|=e^{Re(z^2)}=e^{r^2\cos(2\theta)}$$

$$\geq e^{-r^2}$$

και το "=" ισχύει μόνο για

$$\cos(2\theta)=-1 \Leftrightarrow 2\theta=\pm\pi \Leftrightarrow \theta=\pm\pi/2$$

$$\Leftrightarrow z=\pm ri.$$

Άρα, $\min\limits_{|z|=r}|f(z)|=e^{-r^2}$ κ' το "=" λαμβάνεται μόνο για $z=\pm ri$.

Άρα,

$$\min_{1\leq|z|\leq 2} |f(z)| = \min\{e^{-1}, e^{-4}\} = e^{-4} = f(\pm 2i).$$

3) Έστω $U \subset \mathbb{C}$ φραγμένο πεδίο και $f : \overline{U} \to \mathbb{C}$ συνεχής, $f|_U \in \mathcal{H}(U)$, ώστε $f|_{\partial U}$ σταθερή. Αν η f είναι μη σταθερή, να δείξετε ότι $\exists z_0 \in U \,|\, f(z_0) = 0$.

<u>Λύση:</u> Έστω $f|_{\partial U} = c \in \mathbb{C}$. Υποθέτουμε ότι $f(z) \neq 0$, $\forall z \in U$. Από Αρχή Μεγίστου–Ελαχίστου, παίρνουμε

$$\max_{\overline{U}} |f| = \max_{\partial U} |f| = |c|,$$

$$\min_{\overline{U}} |f| = \min_{\partial U} |f| = |c|$$

$$\Longrightarrow \max_{\overline{U}} |f| = \min_{\overline{U}} |f| \Rightarrow |f| = \text{σταθερή στο } U$$

$$\Rightarrow f = \text{σταθερή}.$$

(4) Έστω πολυώνυμο

$$P(z)=\sum_{k=0}^{n} a_k z^k,\ a_k\in\mathbb{C},\ 0\le k\le n,\ a_n\neq 0,$$

ώστε $|P(z)|\le M$, $(+)$ για κάθε z με $|z|=1$.

Να δ.ο. $|P(z)|\le M\cdot|z|^n$, για $|z|\geq 1$.

(Υπόδειξη: Να δ.ο. $\exists$ πολυώνυμο $Q(z)$ ώστε

$$P(z)=z^n Q(1/z),\ \forall z\neq 0.)$$

Λύση: $\forall z\neq 0$,

$$P(z)=a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$$

$$= z^n\left(a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + \dots + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \frac{a_0}{z^n}\right).$$

Θέτουμε $Q(w)=a_0 w^n + a_1 w^{n-1} + \dots + a_{n-1} w + a_n$, $w\in\mathbb{C}$

$$\Longrightarrow \underline{P(z)=z^n Q(1/z),\ \forall z\neq 0,}$$

$$\overset{(w=1/z)}{\Longrightarrow} \underline{Q(w)=w^n P(1/w),\ \forall w\neq 0.}$$

Αρχή Μεγίστου (2η εκδοχή) $\Longrightarrow \max_{|w|\le 1}|Q(w)| =$

$$= \max_{|w|=1}|Q(w)| = \max_{|w|=1}|P(1/w)| \overset{(\text{υπόθεση})}{\le} M$$

$$\Rightarrow \text{για } |z|\geq 1,\ |P(z)|=|z|^n|Q(1/z)|\le M|z|^n.$$

Θεώρημα 8 (Θεμελιώδες Θεώρημα Άλγεβρας):

Κάθε μη σταθερό πολυώνυμο με συντελεστές στο $\mathbb{C}$, έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $\mathbb{C}$.

Απόδειξη: Έστω πολυώνυμο

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0,$$

όπου $a_k \in \mathbb{C}$, $0 \leq k \leq n$, $a_n \neq 0$, $n \geq 1$.

Ισχυρισμός: $\lim\limits_{|z| \to \infty} |P(z)| = +\infty$.

Πράγματι $\forall\, z \neq 0$,

$$|P(z)| = |z|^n \cdot \left| a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + \dots + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \frac{a_0}{z^n} \right|$$

$$\geq |z|^n \left(|a_n| - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{|a_k|}{|z|^{n-k}} \right).$$

Για $0 \leq k \leq n-1 < n$, έχουμε

$$\lim_{|z| \to \infty} \frac{1}{|z|^{n-k}} = 0$$

$$\Longrightarrow \lim_{|z| \to \infty} \left(|a_n| - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{|a_k|}{|z|^{n-k}} \right) = |a_n| > 0$$

$$\Longrightarrow \lim_{|z| \to \infty} |P(z)| = +\infty.$$

Στη συνέχεια, υποθέτουμε αντίθετα ότι

$$P(z) \neq 0, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Τότε, $|P(0)| > 0$. Λόγω του Ισχυρισμού, $\exists\, R > 0 \mid \forall z \in \mathbb{C}$ με $|z| \geq R$, ισχύει

$$|P(z)| > |P(0)|.$$

Από την Αρχή του Ελαχίστου (2η εκδοχή — Θεώρημα 7) έπεται ότι

$$\min_{|z| \leq R} |P(z)| = \min_{|z| = R} |P(z)| > |P(0)|$$

$$\Longrightarrow \quad |P(0)| > |P(0)| \text{ (Άτοπο!)}. \qquad \boxtimes$$

<u>Πόρισμα 9</u>: Εάν $P(z)$ πολυώνυμο βαθμού $n \geq 1$, το $P(z)$ έχει ακριβώς n ρίζες στο $\mathbb{C}$ (όχι κατ' ανάγκη διαφορετικές ανά δύο).

Η απόδειξη γίνεται με επαγωγή στο n.