ΑΣΚΗΣΕΙΣ (Άλγεβρα Μιγαδικών) (10/03/2021)

(1) Έστω $a, z \in \mathbb{C}$ με $|a|<1$, $|z|=1$ κ'

$w = \dfrac{z-a}{1-\bar{a}\cdot z}$. Να δ.ο. $|w|=1$.

Λύση: $|\bar{a}\cdot z| = |\bar{a}|\cdot|z| = |a| < 1 \Rightarrow 1-\bar{a}\cdot z \neq 0.$

$|w|=1$ ανν $|w|^2=1$ ανν $w\cdot\bar{w}=1$ ανν $\bar{w}=\frac{1}{w}$

Έχουμε

$$\bar{w} = \frac{\bar{z}-\bar{a}}{1-a\bar{z}} \overset{(|z|=1)}{=} \frac{\frac{1}{z}-\bar{a}}{1-\frac{a}{z}} = \frac{1-\bar{a}z}{z-a} = \frac{1}{w}$$

$\Rightarrow |w|=1.$

(2) Να δ.ο.

$$\left(\frac{1+i\tan\varphi}{1-i\tan\varphi}\right)^n = \frac{1+i\tan(n\varphi)}{1-i\tan(n\varphi)}, \quad \forall n\in\mathbb{N}^*, \forall\varphi\in\left(-\pi/2n, \pi/2n\right).$$

Λύση:

$$\frac{1+i\tan\varphi}{1-i\tan\varphi} = \frac{\cos\varphi+i\sin\varphi}{\cos\varphi-i\sin\varphi} = \frac{e^{i\varphi}}{e^{-i\varphi}} = e^{2i\varphi}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1+i\tan\varphi}{1-i\tan\varphi}\right)^n = \left(e^{2i\varphi}\right)^n = \underline{\underline{e^{2in\varphi}}}.$$

Όμοια,
$$\frac{1+i\tan(n\varphi)}{1-i\tan(n\varphi)} = \underline{\underline{e^{2in\varphi}}}$$

(3) Να λυθεί η εξίσωση $e^{z} = \sqrt{3}+i$.

$w = e^{\mathrm{Log}\, w}$ $\forall w \neq 0$

Λύση: $|\sqrt{3}+i| = 2$, $\sqrt{3}+i = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right) =$

$= 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) \Longrightarrow \mathrm{Arg}(\sqrt{3}+i) = \pi/6$

$\Rightarrow \mathrm{Log}(\sqrt{3}+i) = \ln 2 + i\frac{\pi}{6}$.

Η εξίσωση γράφεται $e^{z} = e^{\mathrm{Log}(\sqrt{3}+i)} =$

$= e^{\ln 2 + i\frac{\pi}{6}}$

$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \mid z = \ln 2 + i\frac{\pi}{6} + 2k\pi i$.

[4] (και σαν θεωρία!) $\quad |x+iy| = \sqrt{x^2+y^2} \geq \begin{cases} |x| \\ |y| \end{cases}$

Εάν $z, w \in \mathbb{C}$, να δ.ο. $|z+w| \leq |z|+|w|$.

Εάν επιπλέον $z \neq 0$, $w \neq 0$, η ισότητα ισχύει ανν $\exists\, c>0 \,|\, w = cz$.

Λύση: $(|z|+|w|)^2 - |z+w|^2 = |z|^2+|w|^2+2|z|\cdot|w| -$

$- \left(|z|^2+|w|^2+2\mathrm{Re}(z\cdot\bar{w})\right) = 2\left[|z\cdot w| - \mathrm{Re}(z\bar{w})\right].$

Αλλά $\mathrm{Re}(z\bar{w}) \leq |z\cdot\bar{w}| = |z||\bar{w}| = |z||w| = |zw|$

Άρα, $|z|+|w| \geq |z+w|$.

Υποθέτουμε ότι $z \neq 0$, $w \neq 0$, $|z+w| = |z| + |w|$.

Τότε,
$$\underline{\mathrm{Re}(z\bar{w}) = |z| \cdot |w|.}$$

$\forall\, c \in \mathbb{R}$,

$$|w - cz|^2 = |w|^2 + |cz|^2 - 2\,\mathrm{Re}(c z \bar{w})$$
$$= |w|^2 + c^2 |z|^2 - 2c\,\mathrm{Re}(z\bar{w})$$
$$= |w|^2 + c^2 |z|^2 - 2c|w| \cdot |z|$$
$$= \left(|w| - c|z|\right)^2.$$

Άρα, για $c = |w|/|z|$, παίρνω $w = cz$.

⑤ $|z+w| \geq \big||z|-|w|\big|, \quad \forall z, w \in \mathbb{C}$

Εάν $z \neq 0$, $w \neq 0$, να ελέγξετε πότε ισχύει η ισότητα. (H- W).

⑥ Να βρεθεί το $\max\{|z^2+z-1| : |z|=1\}$, καθώς κι' τα z στα οποία το max λαμβάνεται.

$|z^2+z-1| \leq |z^2|+|z|+|-1| = 3$, για $|z|=1$

$\max = 3$?? όχι ΑΠΑΡΑΙΤΗΤΑ!!

Για $z \in \mathbb{C}$ με $|z| = 1$ ($\Leftrightarrow$ $\bar{z} = 1/z$), έχουμε

$$|z^2 + z - 1| = \left| z\left(z + 1 - \frac{1}{z}\right)\right| = |z| \cdot |z + 1 - \bar{z}| =$$

$$= |1 + (z - \bar{z})| = |1 + 2i\,\mathrm{Im}\, z|$$

$$= \sqrt{1 + 4(\mathrm{Im} z)^2}.$$

$$|z| = 1 \Rightarrow z = e^{i\varphi} \rightarrow \cos\varphi + i\sin\varphi, \text{ για } \varphi \in (-\pi, \pi].$$

$$\mathrm{Im}\, z = \sin\varphi$$

$$\sqrt{1 + 4\sin^2\varphi} \leq \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$

Το "=" ισχύει για $\sin^2\varphi = 1 \Leftrightarrow \sin\varphi = \pm 1$

$\Leftrightarrow \quad \underline{\varphi = \pm \pi/2}$

Άρα $\max\{ |z^2 + z - 1| : |z| = 1 \} = \underline{\underline{\sqrt{5}}} \quad (< 3)$

κ' λαμβάνεται για

$z = e^{i\varphi}$ με $\varphi = \pm \pi/2$ δηλ. για $\boxed{\underline{z = \pm i}}$

(7) (α) Εάν $w \in \mathbb{C}$ με $|w| = 1$ κ' $\mathrm{Re}\,w \neq 1$, να δ.ο.

$$\frac{w+1}{w-1} = i \, \frac{\mathrm{Im}\,w}{\mathrm{Re}\,w - 1}$$

Λύση του (α)

$$\frac{w+1}{w-1} = \frac{(w+1)(\overline{w}-1)}{|w-1|^2} = \frac{\cancel{|w|^2} - w + \overline{w} - \cancel{1}}{|w|^2+1-2\mathrm{Re}(w)} = -\frac{w-\overline{w}}{2-2\mathrm{Re}\,w}$$

$$= -\frac{2i\,\mathrm{Im}\,w}{2(1-\mathrm{Re}\,w)} = i\,\frac{\mathrm{Im}\,w}{\mathrm{Re}\,w-1}.$$

(β) Να λυθεί η εξίσωση $w^6 = -1$.

Λύση του (β) $\quad -1 = e^{i\pi} = \left(e^{i\pi/6}\right)^6$

Μία ρίζα είναι το $\rho = e^{i\pi/6} = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}$

$$\Rightarrow \qquad \rho = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

Επειδή το πολυώνυμο $P(w) = w^6 + 1$ έχει πραγματικούς συντελεστές, το $\bar{\rho} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$ είναι επίσης ρίζα.

Επιπλέον, στο $P(w)$ εμφανίζονται δυνάμεις του w με άρτιο εκθέτη $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ οι $-\rho$, $-\bar{\rho}$ θα είναι ρίζες

$\pm\rho$, $\pm\bar{\rho}$ $\longleftarrow$ 4 ρίζες, $\rho = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} i$

Επίσης, $i^6 = (i^2)^3 = (-1)^3 = -1$

$\Rightarrow$ κ' οι $\pm i$ είναι ρίζες

Συνολικά 6 ρίζες:

$$\boxed{\pm i, \ \pm\rho, \ \pm\bar{\rho}, \text{ όπου } \rho = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} i.}$$

(γ) Να λυθεί η εξίσωση $(z+1)^6+(z-1)^6=0$.

Λύση: Θέτουμε $w=\dfrac{z+1}{z-1}$ $(z\neq 1)$

Η εξίσωση γράφεται $w^6=-1$

$\Leftrightarrow$ $w=\pm i, \ \pm\rho, \ \pm\bar{\rho}, \quad \rho=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i$

$w=\dfrac{z+1}{z-1} \Leftrightarrow wz-w=z+1 \Leftrightarrow wz-z=w+1$

$\Leftrightarrow z(w-1)=w+1 \Leftrightarrow z=\dfrac{w+1}{w-1}$

$\xrightarrow[(α)]{|w|=1}$ $z=i\dfrac{\operatorname{Im}w}{\operatorname{Re}w-1}$

- Αν $w = i$, τότε $\boxed{z = -i}$ $\rightarrow$ κ' το i θα είναι ρίζα

$\pm i$

- Αν $w = \rho = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} i$, τότε

$$z = i \frac{1/2}{\sqrt{3}/2 - 1} = \frac{i}{\sqrt{3} - 2} \rightarrow -\frac{i}{\sqrt{3} - 2}$$

$$\pm \frac{i}{\sqrt{3} - 2}$$

• Αν $w = -\rho = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$, τότε

$$z = i\,\frac{\mathrm{Im}\,w}{\mathrm{Re}\,w - 1} = i\,\frac{-1/2}{-\sqrt{3}/2 - 1} = \frac{i}{\sqrt{3}+2}$$

$$-\frac{i}{\sqrt{3}+2}$$

Συνοψίζοντας, οι 6 ρίζες είναι:

$$\boxed{\pm i, \quad \pm \frac{i}{\sqrt{3}-2}, \quad \pm \frac{i}{\sqrt{3}+2}}$$

H-W   Να λυθεί η εξίσωση

$$z^7 = 1+i.$$