Μιγαδική Ανάλυση – Ασκήσεις

Δ. Σειρές Laurent και ολοκληρωτικά υπόλοιπα

Δ1. Να βρείτε το ανάπτυγμα Laurent της συνάρτησης f γύρω από το σημείο z_0 στον «δακτύλιο» Δ, όπου:

(i) $f(z) = \dfrac{1}{z(z-1)}, \quad z_0 = -2, \quad \Delta = \{z \in \mathbb{C} : 2 < |z+2| < 3\}.$

(ii) $f(z) = \dfrac{\sin^2 z}{z}, \quad z_0 = 0, \quad \Delta = \mathbb{C} \setminus \{0\}.$

(iii) $f(z) = \sin\left(\dfrac{z}{1-z}\right), \quad z_0 = 1, \quad \Delta = \mathbb{C} \setminus \{1\}.$

Δ2. Να βρείτε το ανάπτυγμα Laurent της συνάρτησης

$$f(z) = \frac{1}{z^2(z+1)}$$

σε όλους τους δυνατούς δακτυλίους με κέντρο το $z_0 = -1$.

Δ3. Να βρείτε το ανάπτυγμα Laurent της συνάρτησης

$$f(z) = \frac{z^2 + 4iz}{(z-1)(z^2+4i)}$$

με κέντρο το $z_0 = 0$ σε έναν δακτύλιο που περιέχει το $1 - 2i$. Ποιος είναι ο μεγαλύτερος τέτοιος δακτύλιος στον οποίο ισχύει το ανάπτυγμα Laurent της f;

Δ4. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(z) = \frac{1}{z(z^2+5)^2}.$$

Να βρεθεί το ανάπτυγμα Laurent της f με κέντρο το $z_0 = 0$ στον μεγαλύτερο δυνατό δακτύλιο που περιέχει το σημείο $2 - 2i$.

Δ5. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z+2)^2}.$$

Να βρεθεί το ανάπτυγμα Laurent της f με κέντρο το $z_0 = 1$ στον μεγαλύτερο δυνατό δακτύλιο που περιέχει το σημείο $2 - 3i$.

Δ6. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(z) = \frac{1}{(z^2+1)(z-i)}.$$

Να βρεθεί το ανάπτυγμα Laurent της f με κέντρο το $z_0 = i$ στον μεγαλύτερο δυνατό δακτύλιο που περιέχει το σημείο $\sqrt{2} - i$.

Δ7. Να αναπτύξετε σε σειρά Laurent γύρω από το σημείο $z_0 = 1$ τη συνάρτηση

$$f(z) = \frac{1}{z^2} - \frac{1}{3-z}$$

στον δακτύλιο $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z-1| < 2\}$.

Δ8. Να αναπτύξετε σε σειρά Laurent γύρω από το σημείο $z_0 = -1$ τη συνάρτηση

$$f(z) = \frac{1}{z+1} - \frac{1}{(z-1)^2}$$

στον δακτύλιο $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : |z+1| > 2\}$.

Δ9. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(z) = \frac{i}{z(z-i)(z^2+1)}.$$

Να βρεθούν όλοι οι δυνατοί δακτύλιοι με κέντρο το $z_0 = i$ στους οποίους η f αναπτύσσεται σε σειρά Laurent και να βρεθεί το ανάπτυγμα Laurent της f στον μεγαλύτερο δυνατό δακτύλιο που περιέχει το σημείο $1+2i$.

Δ10. (α) Να βρεθεί το είδος του μεμονωμένου ανώμαλου σημείου $z = -2$ της συνάρτησης

$$f(z) = (z-3)\sin\left(\frac{1}{z+2}\right)$$

και να υπολογιστεί το $\mathrm{Res}(f, -2)$.

(β) Να βρεθεί το είδος του μεμονωμένου ανώμαλου σημείου $z = 0$ της συνάρτησης

$$g(z) = \frac{\sin z - z\cos z}{z^4}$$

και να υπολογιστεί το $\mathrm{Res}(g, 0)$.

(γ) Έστω ότι η συνάρτηση h είναι αναλυτική στον τρυπημένο δίσκο $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}$. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $C > 0$ τέτοιος ώστε

$$|h(z)| \leqslant C|z|^{-1/2} \quad \text{για κάθε} \;\; z \in \Delta.$$

Τι είδους μεμονωμένο ανώμαλο σημείο της h είναι το $z = 0$;

Δ11. Έστω $f : \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ολόμορφη συνάρτηση, τέτοια ώστε

$$|f(z)| \leqslant |z|^{1/2} + |z|^{-1/2}$$

για κάθε $z \neq 0$. Αποδείξτε ότι η f είναι σταθερή.

Δ12. Έστω f ολόμορφη και φραγμένη στον «τρυπημένο» ανοικτό δίσκο $D(z_0, \delta) \setminus \{z_0\}$, όπου $z_0 \in \mathbb{C}$ και $\delta > 0$. Να δείξετε ότι η f έχει επουσιώδη ανωμαλία στο z_0.

Δ13. Έστω f ολόμορφη συνάρτηση σε μια περιοχή U του 0 με $f(0) = f'(0) = 0$ και $f''(0) \neq 0$. Αποδείξτε ότι υπάρχει ολόμορφη συνάρτηση φ σε μια περιοχή V του 0, τέτοια ώστε $f(z) = \varphi(z)^2$ για κάθε $z \in V$.

Δ14. Έστω f ολόμορφη συνάρτηση στον ανοικτό δίσκο $D(z_0, r)$ (όπου $z_0 \in \mathbb{C}$ και $r > 0$) με

$$f(z_0) = f'(z_0) = f''(z_0) = 0, \quad f'''(z_0) \neq 0.$$

(α) Να δείξετε ότι υπάρχει ολόμορφη συνάρτηση φ στον $D(z_0, r)$ τέτοια ώστε

$$f(z) = (z-z_0)^3\varphi(z) \;\; \text{για κάθε} \; z \in D(z_0, r) \;\; \text{και} \;\; \varphi(z_0) \neq 0.$$

(β) Εάν z_0 είναι η μοναδική ρίζα της f στον $D(z_0, r)$, να δείξετε ότι

$$\mathrm{Res}\left(\frac{f'}{f}, z_0\right) = 3.$$

Δ15. (α) Έστω f ολόμορφη και φραγμένη στον τρυπημένο ανοικτό δίσκο $D(z_0, r) \setminus \{z_0\}$, όπου $z_0 \in \mathbb{C}$ και $0 < r \leqslant \infty$. Χρησιμοποιώντας τους ολοκληρωτικούς τύπους για τους συντελεστές του αναπτύγματος Laurent της f αποδείξτε ότι το z_0 είναι επουσιώδες ανώμαλο σημείο της f.

(β) Έστω $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ ολόμορφη συνάρτηση τέτοια ώστε $|f(z)| \geqslant \frac{1}{|z|}$ για κάθε $z \neq 0$, και $f(1) = 1$. Να δείξετε ότι $f(z) = \frac{1}{z}$ για κάθε $z \neq 0$.

Δ16. Έστω $\frac{z}{e^z - 1} = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$ το ανάπτυγμα Laurent της συνάρτησης $f(z) = \frac{z}{e^z-1}$ στον δακτύλιο $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : 2\pi < |z| < 4\pi\}$ με κέντρο το $z_0 = 0$. Χρησιμοποιώντας το θεώρημα Laurent καθώς επίσης και το θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων, να υπολογίσετε τους συντελεστές a_0 και a_{-2}.

Δ17. Έστω $\frac{z(z^2-1)}{\sin^2(\pi z)} = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$ το ανάπτυγμα Laurent της συνάρτησης $g(z) = \frac{z(z^2-1)}{\sin^2(\pi z)}$ στον δακτύλιο $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$ με κέντρο το $z_0 = 0$. Χρησιμοποιώντας το θεώρημα Laurent καθώς επίσης και το θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων, να υπολογίσετε τους συντελεστές a_n για κάθε $n \leqslant -1$.

Δ18. Έστω $\frac{z^2}{\sin(\pi z)} = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$ το ανάπτυγμα Laurent της συνάρτησης $g(z) = \frac{z^2}{\sin(\pi z)}$ στον δακτύλιο $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$ με κέντρο το $z_0 = 0$. Χρησιμοποιώντας το θεώρημα Laurent καθώς επίσης και το θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων, να υπολογίσετε τους συντελεστές a_n για κάθε $n \leqslant 1$.

Δ19. Έστω $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$ και $\sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n z^n$ τα αναπτύγματα Laurent της

$$f(z) = \frac{1}{\sin \pi z}$$

στους δακτύλιους $\Delta_1 = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}$ και $\Delta_2 = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$, αντίστοιχα. Χρησιμοποιώντας το θεώρημα Laurent και το θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων, αποδείξτε ότι $d_n - c_n = -\frac{1}{\pi}((-1)^{-n-1} + 1)$ για κάθε ακέραιο n.

Δ20. (α) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(z) = z^2 \sin(1/z)$, $z \neq 0$. Υπολογίστε τα όρια $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n)$ και $\lim\limits_{n\to\infty} f(\zeta_n)$, όπου $z_n = i/n$ και $\zeta_n = 1/n$, $n \geqslant 1$. Υπάρχει το $\lim\limits_{z\to 0} f(z)$; Τι είδους μεμονωμένο ανώμαλο σημείο της f είναι το 0; Υπολογίστε το $\mathrm{Res}(f, 0)$.

(β) Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(z) = z\cos(1/z)$, $z \neq 0$. Υπολογίστε τα όρια $\lim\limits_{n\to\infty} g(z_n)$ και $\lim\limits_{n\to\infty} g(\zeta_n)$, όπου $z_n = i/n$ και $\zeta_n = 1/n$, $n \geqslant 1$. Υπάρχει το $\lim\limits_{z\to 0} g(z)$; Τι είδους μεμονωμένο ανώμαλο σημείο της g είναι το 0; Υπολογίστε το $\mathrm{Res}(g, 0)$.

Δ21. Διατυπώστε το θεώρημα Laurent για τη συνάρτηση $f(z) = \frac{1}{\cos \pi z}$ στον δακτύλιο

$$\Delta = \left\{ z \in \mathbb{C} : \frac{1}{2} < |z| < \frac{3}{2} \right\}$$

με κέντρο το $z_0 = 0$. Χρησιμοποιώντας το θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων, υπολογίστε τους συντελεστές των z^{-1} και z^{-2} στο ανάπτυγμα Laurent της f στον δακτύλιο Δ.

Δ22. Έστω $z_0 \in \mathbb{C}$ και $R > 0$. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση f είναι αναλυτική στον τρυπημένο δίσκο $0 < |z - z_0| < R$ και δεν είναι αναλυτική στο z_0.

(i) Αν το z_0 είναι πόλος τάξης N της f, αποδείξτε ότι το z_0 είναι πόλος τάξης $N + 1$ της f'.

(ii) Πότε το z_0 είναι επουσιώδες ανώμαλο σημείο της f; Δώστε τουλάχιστον δύο ικανές και αναγκαίες συνθήκες γι' αυτό.

Δ23. (α) Να βρεθεί το είδος των μεμονωμένων ανώμαλων σημείων της συνάρτησης

$$f(z) = \left(\frac{3}{z^2} - \frac{\sin 3z}{z^3}\right) \exp\left(\frac{1}{z-2}\right).$$

(β) Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\int_{|z|=1} f(z)\, dz.$$

Δ24. Έστω $z_0 \in \mathbb{C}$, $r > 0$ και f, g δύο συναρτήσεις ολόμορφες στον τρυπημένο δίσκο $D(z_0, r) \setminus \{z_0\}$. Αν το z_0 είναι ουσιώδες ανώμαλο σημείο της f και πόλος της g, αποδείξτε ότι το z_0 είναι ουσιώδες ανώμαλο σημείο της $f + g$.

Δ25. Έστω $f : \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ αναλυτική και φραγμένη συνάρτηση. Δείξτε ότι η f είναι σταθερή.

Δ26. (α) Έστω g ολόμορφη σε μια περιοχή του 0 με $g(0) \neq 0$. Να δείξετε ότι

$$\operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^3 g(z)}, 0\right) = \frac{2[g'(0)]^2 - g''(0)g(0)}{2[g(0)]^3}.$$

(β) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$\int_\gamma \frac{dz}{z^2 \sin z},$$

όπου $\gamma(t) = 4e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

Δ27. (α) Να προσδιορίσετε ολόμορφη συνάρτηση $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ τέτοια ώστε

$$\sin z = (\pi - z)\varphi(z) \;\text{ για κάθε }\; z \in \mathbb{C}, \quad \varphi(\pi) = 1, \quad \varphi'(\pi) = 0.$$

(β) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$\int_\gamma \frac{e^z - 1}{\sin^2 z}\, dz,$$

όπου $\gamma(t) = 4e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

Δ28. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$\int_\gamma h(z)\, dz,$$

όπου

$$h(z) = \frac{1}{1 - \cos z} + \overline{z} z^{12} \cos(1/z^3), \quad \gamma(t) = e^{it}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Δ29. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$\int_\gamma (1 - z^2) e^{1/z} dz,$$

όπου $\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

Δ30. Έστω $f : D(0,1) \to \mathbb{C}$ αναλυτική συνάρτηση στον μοναδιαίο δίσκο $D(0,1) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ και έστω C η καμπύλη με εξίσωση $z(t) = re^{it}$, $t \in [0, 4\pi]$, όπου $0 < r < 1$. Αν το 0 είναι απλή ρίζα της συνάρτησης f, υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z^3}\, dz$$

με δύο τρόπους: (i) με τον ολοκληρωτικό τύπο Cauchy για παραγώγους, και (ii) με το θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων.

Δ31. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$g(z) = \exp\left(\frac{z + 1/z}{2}\right).$$

Αν $g(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$ είναι το ανάπτυγμα Laurent της g στον τρυπημένο δίσκο $0 < |z| < \infty$, υπολογίστε τον συντελεστή c_0 και αποδείξτε ότι

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos t} dt = 2\pi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n (n!)^2}.$$

Δ32. (α) Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)((z-1)^2+4)}.$$

Να βρεθεί το ανάπτυγμα Laurent της f με κέντρο το $z_0 = 1$ στον μεγαλύτερο δυνατό δακτύλιο που περιέχει το σημείο $2 - 2i$.

(β) Χρησιμοποιώντας μιγαδική ολοκλήρωση, να υπολογίσετε το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 3x}{x^2+4}\, dx.$$

Δ33. Έστω $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 1$ και $\gamma(t) = 2e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. Αποδείξτε ότι όλες οι ρίζες της εξίσωσης $z^{k+1} + z + 1 = 0$ βρίσκονται στο εσωτερικό της γ.

Στη συνέχεια αποδείξτε ότι

$$\lim_{R \to +\infty} \left| \int_{\gamma_R} \frac{z+1}{z(z^{k+1}+z+1)}\, dz \right| = 0,$$

όπου $\gamma_R(t) = Re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, $R > 0$.

Τέλος, δείξτε ότι

$$\int_\gamma \frac{z^k}{z^{k+1}+z+1}\, dz = 2\pi i.$$

Δ34. (α) Έστω $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ολόμορφη συνάρτηση και $z_0 \in \mathbb{C}$ με $f(z_0) = 0$. Αποδείξτε ότι υπάρχει ολόμορφη συνάρτηση $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ τέτοια ώστε $\varphi(z_0) = f'(z_0)$, $\varphi'(z_0) = f''(z_0)/2$ και $f(z) = (z - z_0)\varphi(z)$ για κάθε $z \in \mathbb{C}$.

(β) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$\int_\gamma \frac{z}{(e^z - e^{-z})^2}\, dz,$$

όπου $\gamma(t) = 4e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

Δ35. Ολοκληρώνοντας τη συνάρτηση e^z/z πάνω στον θετικά προσανατολισμένο κύκλο $|z| = 1$, να δείξετε ότι

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos t} \cos(\sin t)\, dt = 2\pi \quad \text{και} \quad \int_0^{2\pi} e^{\cos t} \sin(\sin t)\, dt = 0.$$

Δ36. (α) Αποδείξτε ότι υπάρχουν ολόμορφες συναρτήσεις $\varphi, \psi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ τέτοιες ώστε $\varphi(2\pi i) = \psi(-2\pi i) = 1$, $\varphi'(2\pi i) = \psi'(-2\pi i) = 1/2$ και $e^z - 1 = (z - 2\pi i)\varphi(z) = (z + 2\pi i)\psi(z)$ για κάθε $z \in \mathbb{C}$.

(β) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$\int_\gamma \frac{z}{(e^z - 1)^2}\, dz,$$

όπου $\gamma(t) = 8e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

Δ37. Για κάθε $n \geqslant 1$ να λυθεί η εξίσωση $2z^n - i = 0$, και στη συνέχεια να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$I = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{z^{n-1}}{2z^n - i}\, dz.$$

Δ38. (α) Έστω g ολόμορφη σε μια περιοχή του 0, με $g(0) \neq 0$. Να δείξετε ότι

$$\operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^3 g(z)}, 0\right) = \frac{2[g'(0)]^2 - g''(0)g(0)}{2[g(0)]^3}.$$

(β) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$\int_\gamma \frac{dz}{z(e^z - 1)\sin z}, \quad \text{όπου } \gamma(t) = e^{it}, \ t \in [0, 2\pi].$$

Δ39. Να υπολογίσετε το μιγαδικό ολοκλήρωμα

$$\int_{|z|=4} \left(\frac{1}{z \sin z} + z^3 \cos(1/z^2)\right) dz.$$

Δ40. Εάν $\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, υπολογίστε τα ολοκληρώματα

$$\int_\gamma \frac{\overline{z} e^{z^2}}{z^4}\, dz, \quad \int_\gamma z^7 \cos\frac{1}{z^2}\, dz, \quad \int_\gamma \frac{e^z - 1 - z}{(1 - \cos z)^2}\, dz.$$

Δ41. Με χρήση μιγαδικής ανάλυσης, να δείξετε ότι

(i) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^4}{1 + x^6}\, dx = \frac{2\pi}{3}.$

(ii) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{\pi}{e}.$

(iii) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin x}{1 + x^4}\, dx = -\pi \operatorname{Re}(a^2 e^{ia}), \text{ όπου } a = \frac{1+i}{\sqrt{2}}.$

Δ42. Με χρήση μιγαδικής ανάλυσης, να δείξετε ότι

$$\int_0^\pi \frac{\sin^2 t}{a + \cos t}\, dt = \pi\left(a - \sqrt{a^2 - 1}\right), \quad a > 1.$$

Δ43. Χρησιμοποιώντας μιγαδική ολοκλήρωση να δείξετε ότι

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(2 + \cos t)^2} = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}.$$

Δ44. Χρησιμοποιώντας μιγαδική ολοκλήρωση να δείξετε ότι

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^4 \cos x}{1 + x^6}\, dx = \frac{\pi}{3}\left(\frac{1}{e} - 2\operatorname{Im}(\overline{a} e^{ia})\right),$$

όπου $a = \frac{\sqrt{3}+i}{2}$. [Παρατηρήστε ότι $a^6 = i^6 = -1$.]

Δ45. Χρησιμοποιώντας μιγαδική ολοκλήρωση υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{5} + \cos t}\, dt.$$

Δ46. Χρησιμοποιώντας μιγαδική ολοκλήρωση αποδείξτε ότι

$$\int_0^{2\pi} \frac{3\cos\vartheta}{5-4\cos\vartheta}\,d\vartheta = 3\mathrm{Re}\left(\int_0^{2\pi} \frac{e^{i\vartheta}}{5-4\cos\vartheta}\,d\vartheta\right) = \pi.$$

Δ47. Θεωρούμε τα πολυώνυμα $P(z) - z^2$ και $Q(z) = z^4 + 4$. Αποδείξτε ότι υπάρχει σταθερά $M > 0$ τέτοια ώστε, για R_0 αρκετά μεγάλο, $R_0 > \sqrt{2}$, ισχύει ότι

$$\left|\frac{P(z)}{Q(z)}\right| \leqslant \frac{M}{|z|^2}$$

για κάθε $|z| \geqslant R_0$. Αν γ_R είναι το ημικύκλιο του άνω ημιεπιπέδου με εξίσωση $\gamma_R(t) = Re^{it}$, $0 \leqslant t \leqslant \pi$, αποδείξτε ότι

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} \frac{P(z)}{Q(z)}\,dz = 0.$$

Χρησιμοποιώντας μιγαδική ολοκλήρωση αποδείξτε ότι

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2}{x^4+4}\,dx = \frac{\pi}{4}.$$

Δ48. Χρησιμοποιώντας μιγαδική ολοκλήρωση και το λήμμα Jordan, αποδείξτε ότι

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\pi x)}{x^2+2x+2}\,dx = \mathrm{Re}\left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x^2+2x+2}\,dx\right) = -\pi e^{-\pi}.$$

Δ49. Χρησιμοποιώντας μιγαδική ολοκλήρωση υπολογίστε το

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2+1)(x^2+4)}\,dx.$$

Δ50. Χρησιμοποιώντας μιγαδική ολοκλήρωση υπολογίστε το

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin x}{(x^2+1)^2}\,dx.$$

Δ51. Υπολογίστε τα ολοκληρώματα

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3\sin x}{x^4+16}\,dx \quad \text{και} \quad \int_{\gamma} \frac{(e^z-1)^2}{z^3\sin z}\,dz,$$

όπου $\gamma(t) = 2e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. [Για το πρώτο ολοκλήρωμα παρατηρήστε ότι $(e^{i\pi/4})^4 = -1$.]

Δ52. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα

$$\int_{\gamma} \frac{e^z-1-z}{z^2(1-\cos z)}\,dz \quad \text{και} \quad \int_{\gamma} \frac{1}{1-z}\sin\frac{1}{z}\,dz,$$

όπου $\gamma(t) = 2e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

Δ53. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα

$$\int_{\gamma} \frac{e^z-1}{z^3\sin z}\,dz \quad \text{και} \quad \int_{\gamma} \frac{1}{1-z}\cos\frac{1}{z}\,dz,$$

όπου $\gamma(t) = 2e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.