



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών

Διακριτά Μαθηματικά

Διδάσκοντες: Δ. Φωτάκης, Δ. Σούλιος

3η Γραπτή Εργασία, Ημ/νια Παράδοσης: 11/6/2024

Θέμα 1 (Συνδυαστική, 5 μον.). Εξετάζουμε τους τρόπους να μοιραστούν βιβλία Διακριτών Μαθηματικών σε 1000 φοιτητές. Στα υποερωτήματα που ακολουθούν, οι φοιτητές θεωρούνται διακεκριμένοι και κανένας φοιτητής δεν μπορεί να πάρει δύο ή περισσότερα βιβλία Διακριτών Μαθηματικών.

1. Με πόσους τρόπους μπορούν να μοιραστούν 200 αντίτυπα Hunter στους 1000 φοιτητές;
2. Με πόσους τρόπους μπορούν να μοιραστούν 200 αντίτυπα Hunter, 250 αντίτυπα Rosen, 100 αντίτυπα Liu, και 50 αντίτυπα Err στους 1000 φοιτητές;
3. Έχουμε 1000 αντίτυπα από καθένα από τα βιβλία των Hunter, Rosen, Liu και Err. Με πόσους τρόπους μπορούν να επιλέξουν βιβλίο Διακριτών Μαθηματικών οι 1000 φοιτητές;
4. Έχουμε 1000 αντίτυπα από καθένα από τα βιβλία των Hunter, Rosen, Liu και Err. Με πόσους τρόπους μπορούν να επιλέξουν βιβλίο Διακριτών Μαθηματικών οι 1000 φοιτητές, αν πρέπει να διατεθεί τουλάχιστον ένα αντίτυπο από κάθε βιβλίο;
5. Έχουμε 4 (διακεκριμένα) σημεία διανομής όπου μοιράζεται μόνο το βιβλίο του Hunter. Με πόσους τρόπους μπορούν να κατανεμηθούν 1000 αντίτυπα του βιβλίου στα 4 σημεία διανομής, ώστε κάθε σημείο να μοιράσει 350 αντίτυπα το πολύ;
6. Έχουμε 4 σημεία διανομής, καθένα μοιράζει ένα από τα βιβλία των Hunter, Rosen, Liu, Err. Σε κάθε σημείο διανομής υπάρχουν διαθέσιμα 1000 αντίτυπα από το βιβλίο που μοιράζεται. Με πόσους τρόπους μπορούν να σταθούν οι 1000 φοιτητές στις 4 ουρές αναμονής για να πάρουν βιβλίο; Με πόσους τρόπους μπορεί να συμβεί αυτό, αν κάθε σημείο διανομής πρέπει να μοιράσει τουλάχιστον 5 βιβλία;
7. Όπως στο (6) (χωρίς τον περιορισμό για τουλάχιστον 5 βιβλία), αλλά σε κάθε σημείο διανομής υπάρχουν διαθέσιμα μόνο 350 αντίτυπα από το βιβλίο που μοιράζεται.

Θέμα 2 (Συνδυαστική, 2 μον.). (α) Θεωρούμε 500 φιλάθλους, 200 Αμερικανούς, 150 Έλληνες, 100 Ιταλούς και 50 Γάλλους, οι οποίοι πρόκειται να ταξιδέψουν από την Νέα Υόρκη (όπου ζουν μόνιμα) στο Παρίσι για την έναρξη του Ολυμπιακών Αγώνων με 5 διαφορετικές πτήσεις (δεν θα υπάρχουν άλλοι επιβάτες σε αυτές τις πτήσεις). Υποθέτουμε ότι κάθε πτήση έχει 150 αριθμημένες θέσεις. Πόσοι είναι οι διαφορετικοί τρόποι να:

1. ταξιδέψουν οι φιλάθλοι, αν αυτοί διακρίνονται μόνο βάση της εθνικότητάς τους και δεν επιτρέπεται να έχουμε φιλάθλους από διαφορετικές χώρες στην ίδια πτήση;
2. ταξιδέψουν οι φιλάθλοι, αν αυτοί διακρίνονται βάση της ταυτότητάς τους, όλοι οι Έλληνες πρέπει να ταξιδέψουν με την ίδια πτήση και όλοι οι Ιταλοί πρέπει να ταξιδέψουν με την ίδια πτήση;
3. μοιράσουμε στους φιλάθλους 400 εισιτήρια για την τελετή έναρξης και 400 εισιτήρια για την τελετή λήξης, ώστε κάθε φιλάθλος να πάρει το πολύ 1 εισιτήριο για κάθε τελετή, όλοι οι Αμερικάνοι και όλοι οι Ιταλοί να πάρουν εισιτήρια για την τελετή έναρξης, και όλοι οι Έλληνες και όλοι οι Γάλλοι να πάρουν εισιτήρια για την τελετή λήξης; Εδώ θεωρούμε ότι όλοι οι φιλάθλοι είναι διακεκριμένοι και ότι τα εισιτήρια για καθεμία από τις δύο τελετές αφορούν σε αντίστοιχες θέσεις και δεν διακρίνονται μεταξύ τους.

Θέμα 3 (Συνδυαστική, 3 μον.). (α) Έστω n θετικός ακέραιος.

1. Να υπολογίσετε πόσες διατεταγμένες τετράδες (i, j, k, ℓ) , με $1 \leq i \leq j \leq k \leq \ell \leq n$, μπορούμε να σχηματίσουμε.
2. Να γενικεύσετε, υπολογίζοντας πόσες διατεταγμένες k -άδες (i_1, i_2, \dots, i_k) , με $1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_k \leq n$, μπορούμε να σχηματίσουμε.

3. Να υπολογίσετε πόσες διατεταγμένες τετράδες (i, j, k, ℓ) , με $1 \leq i, i+3 \leq j, j+2 \leq k$ και $k+1 \leq \ell \leq m$, μπορούμε να σχηματίσουμε. Εδώ υποθέτουμε ότι $n \geq 7$.

(β) Έστω n θετικός ακέραιος. Σχηματίζουμε τυχαίες πεντάδες (i, j, k, ℓ, m) , με $1 \leq i \leq j \leq k \leq \ell \leq m \leq n$, ως εξής: επιλέγουμε τυχαία και ανεξάρτητα 5 φυσικούς στο σύνολο $\{1, \dots, n\}$ και τους ταξινομούμε για να σχηματίσουμε μια τυχαία πεντάδα στην επιθυμητή μορφή (μπορείτε να σκεφτείτε ότι ρίχνουμε τυχαίες “ζαριές” για ένα παιχνίδι που παίζεται με 5 ίδια ζάρια και κάθε ζάρι έχει n πιθανά αποτελέσματα).

1. Να υπολογίσετε την πιθανότητα μια τυχαία πεντάδα να περιέχει έναν μόνο φυσικό (δηλ. να είναι της μορφής (i, i, i, i, i) , για κάποιο $i \in \{1, \dots, n\}$).
2. Να υπολογίσετε την πιθανότητα μια τυχαία πεντάδα να περιέχει (ακριβώς) δύο διαφορετικούς φυσικούς. Εδώ υποθέτουμε ότι $n \geq 2$.

Παράδοση. Οι εργασίες πρέπει να αναρτηθούν στο helios.ntua.gr/mod/assign/view.php?id=24410 μέχρι τα μεσάνυχτα της Τρίτης 11/6.

Καλή Επιτυχία!