Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών

Διακριτά Μαθηματικά

Διδάσκοντες: Δ. Φωτάκης, Δ. Σούλιου

2η Γραπτή Εργασία, Ημ/νια Παράδοσης: 14/5/2024

Θέμα 1 (Αρχή του Περιστερώνα, 1.2 μον.). Επιλέγουμε αυθαίρετα n αριθμούς από το σύνολο $\{1, 2, 3, \dots, 2^n - 3, 2^n - 2\}$. Να δείξετε ότι μεταξύ των αριθμών που έχουμε επιλέξει υπάρχει πάντα ένα ζευγάρι όπου ο μεγαλύτερος από τους δύο αριθμούς είναι μικρότερος ή ίσος από το διπλάσιο του άλλου (π.χ., για $n = 3$, αν επιλέξουμε τους αριθμούς 1, 3, 6, έχουμε ότι $6 \leq 2 \cdot 3$.

Θέμα 2 (Γραφήματα - Βασικές Έννοιες, 2.4 μον.). Θεωρούμε το γράφημα $G(n, m) = C_n * K_m$ που προκύπτει από τη σύνδεση (join) του κύκλου με $n \geq 3$ κορυφές με το πλήρες γράφημα με $m \geq 1$ κορυφές.

1. Πόσες κορυφές και πόσες ακμές έχει το γράφημα $G(n, m)$ (ως συνάρτηση των n και m);
2. Για ποιες τιμές των n και m το το γράφημα $G(n, m)$ έχει κύκλο Euler;
3. Για ποιες τιμές των n και m το το γράφημα $G(n, m)$ έχει κύκλο Hamilton;
4. Ποιος είναι ο χρωματικός αριθμός του $G(n, m)$;

Θέμα 3 (Αυτοσυμπληρωματικά Γραφήματα, 1.4 μον.). Να δείξετε ότι για κάθε φυσικό $k \geq 1$, (i) υπάρχει αυτοσυμπληρωματικό γράφημα με $4k$ κορυφές όπου οι μισές κορυφές έχουν βαθμό $2k - 1$ και οι άλλες μισές έχουν βαθμό $2k$, και (ii) ότι υπάρχει αυτοσυμπληρωματικό γράφημα με $4k + 1$ κορυφές που είναι $2k$-κανονικό. *Υπόδειξη:* Για το (i), μπορείτε να ξεκινήσετε από το P_4 και να αντικαταστήσετε κάθε κορυφή του είτε με ένα πλήρες γράφημα K_k είτε με ένα ανεξάρτητο σύνολο I_k.

Θέμα 4 (Διμερή Γραφήματα, Δέντρα, 2.0 μον.). (α) Να δείξετε ότι για κάθε (απλό μη κατευθυνόμενο) συνεκτικό διμερές γράφημα $G(V, E)$, υπάρχει μια μοναδική διαμέριση των κορυφών του V σε δύο ανεξάρτητα σύνολα. Πόσες διαφορετικές διαμερίσεις υπάρχουν αν το G έχει $k \geq 2$ συνεκτικές συνιστώσες;

(β) Έστω $n \geq 2$ θετικοί ακέραιοι $d_1, \dots, d_n$. Να δείξετε ότι $d_1 + \cdots + d_n = 2(n - 1)$ αν και μόνο αν υπάρχει δέντρο T με n κορυφές και βαθμούς κορυφών $d_1, \dots, d_n$.

Θέμα 5 (Κύκλος Hamilton, 1.4 μον.). Χρησιμοποιώντας μαθηματική επαγωγή στο n, να δείξετε ότι κάθε απλό γράφημα με $n \geq 3$ κορυφές και τουλάχιστον $\frac{(n-1)(n-2)}{2} + 2$ ακμές έχει κύκλο Hamilton. Να δείξετε ακόμη ότι για κάθε $n \geq 3$, υπάρχει απλό γράφημα με n κορυφές και $\frac{(n-1)(n-2)}{2} + 1$ ακμές που δεν έχει κύκλο Hamilton.

Θέμα 6 (Επιπεδότητα, 1.6 μον.). Έστω $k \geq 3$ φυσικός αριθμός. Θεωρούμε *απλό επίπεδο* γράφημα $G(V, E)$ με n κορυφές και m ακμές το οποίο δεν έχει κύκλους με μήκος μικρότερο ή ίσο του $k - 1$ (δηλ. αν το G έχει κύκλους, τότε το μήκος κάθε κύκλου στο G είναι μεγαλύτερο ή ίσο του k).

1. Να δείξετε ότι κάθε τέτοιο απλό επίπεδο γράφημα G έχει πλήθος ακμών $m \leq \frac{k}{k-2}(n - 2)$.
2. Να δείξετε ότι κάθε απλό επίπεδο γράφημα G που δεν έχει κύκλους με μήκος μικρότερο ή ίσο του 5, (i) έχει τουλάχιστον μία κορυφή με βαθμό μικρότερο ή ίσο του 2, και (ii) έχει χρωματικό αριθμό μικρότερο ή ίσο του 3. Να βρείτε ένα τέτοιο γράφημα με χρωματικό αριθμό ίσο με 3.

Παράδοση. Οι εργασίες πρέπει να αναρτηθούν στο `helios.ntua.gr/mod/assign/view.php?id=23366` μέχρι τα μεσάνυχτα της Τρίτης 14/5.

Καλή Επιτυχία!