Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών
Τομέας Τεχνολογίας Πληροφορικής και Υπολογιστών
Αλγόριθμοι και Πολυπλοκότητα
Διδάσκοντες: Α. Παγουρτζής, Δ. Φωτάκης, Δ. Σούλιου, Π. Γροντάς
2η Σειρά Γραπτών Ασκήσεων - Ημ/νία Παράδοσης 18/12/2023

Άσκηση 1: Πολύχρωμος Πεζόδρομος (1.4 μον.)

Ο νέος πεζόδρομος της Πολυτεχνειούπολης είναι σχεδόν έτοιμος! Εκτείνεται σε μια νοητή ευθεία και έχει πλακοστρωθεί με n πλάκες. Κάθε πλάκα καταλαμβάνει όλο το πλάτος του πεζόδρομου, οπότε ο πεζόδρομος μπορεί να θεωρηθεί ως μια ακολουθία n πλακών που εκτείνονται από την αρχή του μέχρι το τέλος του. Η Αρχιτεκτονική Σχολή έχει εκπονήσει μελέτη που καθορίζει τα χρώματα $(c_1, \ldots, c_i, \ldots, c_n)$ όλων των πλακών κατά μήκος του πεζόδρομου, ώστε ο περίπατος σε αυτόν να είναι ευχάριστος και χαλαρωτικός. Απομένουν μόνο το βάψιμο των πλακών και τα εγκαίνια για το κοινό.

Το συνεργείο που θα βάψει τις πλάκες χρησιμοποιεί μια πρωτοποριακή μέθοδο που εγγυάται βέλτιστο αποτέλεσμα (αν και καθυστερεί λίγο παραπάνω – η καλή δουλειά αργεί να γίνει!). Η ιδέα είναι ότι κάθε μέρα, το συνεργείο επιλέγει ένα διάστημα διαδοχικών πλακών του πεζοδρόμου και τις χρωματίζει όλες με το ίδιο επιλεγμένο χρώμα (ως αποτέλεσμα, μπορεί κάποιες πλάκες σε αυτό το διάστημα να μην έχουν το τελικό τους χρώμα, αυτό θα διορθωθεί τις επόμενες ημέρες). Μετά το συνεργείο αφήνει τις πλάκες να στεγνώσουν, και την άλλη μέρα επαναλαμβάνει για κάποιο άλλο διάστημα. Αυτό μέχρι όλες οι πλάκες να βαφούν στο επιθυμητό χρώμα.

Υπάρχει συζήτηση για το αν θα έχει ολοκληρωθεί ο χρωματισμός των πλακών και θα μπορέσουν να γίνουν τα εγκαίνια πριν τα Χριστούγεννα. Με δεδομένα ότι αρχικά όλες οι πλάκες είναι λευκές και την ακολουθία $(c_1, \ldots, c_n)$ με τα επιθυμητά χρώματα των πλακών, να διατυπώσετε αποδοτικό αλγόριθμο που υπολογίζει το ελάχιστο πλήθος ημερών που απαιτούνται για να ολοκληρωθεί ο χρωματισμός των πλακών του πεζόδρομου. Να αιτιολογήσετε αναλυτικά την ορθότητα και την υπολογιστική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου σας.

Παράδειγμα: Θεωρούμε 10 πλάκες που πρέπει να βαφούν με τα παρακάτω χρώματα $(1, 2, 3, 4, 1, 4, 3, 2, 1, 6)$. Αν αρχικά όλες οι πλάκες είναι λευκές $(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$, θα δείξουμε ότι η βέλτιστη λύση απαιτεί 6 ημέρες εργασίας από το συνεργείο χρωματισμού. Την 1η μέρα το συνεργείο βάφει τις πρώτες 9 πλάκες με το χρώμα 1: $(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0)$. Την 2η μέρα το συνεργείο βάφει τις πλάκες από 2 μέχρι και 8 με το χρώμα 2: $(1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 1, 0)$. Την 3η μέρα το συνεργείο βάφει τις πλάκες από 3 μέχρι και 7 με το χρώμα 3: $(1, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 2, 1, 0)$. Την 4η μέρα το συνεργείο βάφει τις πλάκες από 4 μέχρι και 6 με το χρώμα 4: $(1, 2, 3, 4, 4, 4, 3, 2, 1, 0)$. Την 5η μέρα το συνεργείο βάφει την πλάκα 5 με το χρώμα 1: $(1, 2, 3, 4, 1, 4, 3, 2, 1, 0)$. Και την 6η μέρα το συνεργείο βάφει την πλάκα 10 με το χρώμα 6: $(1, 2, 3, 4, 1, 4, 3, 2, 1, 6)$.

Άσκηση 2: String matching (1.4 μον.)

Για δύο συμβολοσειρές u και v γράφουμε $u \preceq v$ για να δηλώσουμε πως η u είναι ταυτόχρονα πρόθεμα (prefix) και επίθεμα (suffix) της v. Παρατηρήστε ότι η $u \preceq v$ ισχύει κάθε φορά που η u είναι πρόθεμα της v και η αντίστροφή της u είναι πρόθεμα της αντιστρόφου της v. Όπως συνηθίζεται, γράφουμε $u \prec v$ και εννοούμε ότι $u \preceq v$ και $u \neq v$.

Για κάθε μη κενή συμβολοσειρά v, ο πυρήνας της v (core v), που γράφεται ως $c(v)$, είναι η μεγαλύτερου μήκους (η μακρύτερη) συμβολοσειρά έτσι ώστε $c(v) \prec v$. Ο πυρήνας ορίζεται για κάθε v, $v \neq \epsilon$, επειδή υπάρχει τουλάχιστον μια συμβολοσειρά, η ϵ, που είναι κατάλληλο πρόθεμα και επίθεμα κάθε μη κενής συμβολοσειράς.

Παραδείγματα υπολογισμού πυρήνα συμβολοσειράς: $c(a) = \epsilon$, $c(ab) = \epsilon$, $c(abb) = \epsilon$, $c(abba) = a$, $c(abbab) = ab$, $c(abbabb) = abb$, $c(abbabba) = abba$, $c(abbabbb) = \epsilon$.

1. Δείξτε ότι μπορείτε να ταιριάξετε το μοτίβο p με το κείμενο t υπολογίζοντας τους πυρήνες όλων των προθεμάτων του pt (pt είναι η παράθεση των p και t).

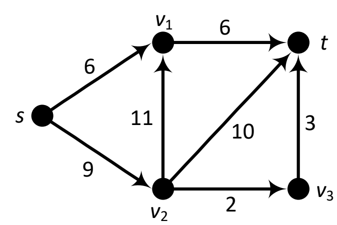
2. Ορίζουμε τη u να είναι ο $k-$πυρήνας της συμβολοσειράς v, όπου $k \geq 0$ και $v \neq \epsilon$, αν :
   $u \prec v$,
   το μήκος της u είναι το πολύ k, και
   η u είναι η μεγαλύτερη συμβολοσειρά με αυτή την ιδιότητα.
   Δείξτε πως ο $k-$ πυρήνας είναι καλά ορισμένος. Επινοήστε έναν αλγόριθμο για τον υπολογισμό του $k-$πυρήνα μιας συμβολοσειράς για ένα δεδομένο k.

Άσκηση 3: Συντομότερα Μονοπάτια με Συντομεύσεις Ενδιάμεσων Ακμών (1.8 μον.)

Θεωρούμε κατευθυνόμενο γράφημα $G(V, E, \vec{w})$ με n κορυφές, m ακμές και θετικά μήκη $\vec{w}$ στις ακμές, δυο συγκεκριμένες κορυφές $s, t \in V$, και θετικό ακέραιο $k \geq 1$. Θέλουμε να ελαχιστοποιήσουμε την απόσταση (δηλ. το μήκος του συντομότερου $s - t$ μονοπατιού) της κορυφής t από την κορυφή s στο G, όταν μπορούμε να μηδενίσουμε το μήκος το πολύ k ακμών στο $s - t$ μονοπάτι που θα χρησιμοποιήσουμε. Στις παρακάτω περιπτώσεις να αιτιολογήσετε την ορθότητα και την υπολογιστική πολυπλοκότητα των αλγορίθμων σας.

1. Να διατυπώσετε αποδοτικό αλγόριθμο που υπολογίζει την απόσταση της t από την s, όταν μπορούμε να μηδενίσουμε το μήκος μίας μόνο ακμής στο $s - t$ μονοπάτι που θα χρησιμοποιήσουμε.
2. Να διατυπώσετε αποδοτικό αλγόριθμο που υπολογίζει την απόσταση της t από την s, όταν μπορούμε να μηδενίσουμε το μήκος το πολύ k ακμών στο $s - t$ μονοπάτι που θα χρησιμοποιήσουμε. Ο αλγόριθμός σας πρέπει να δέχεται το k ως παράμετρο και να λειτουργεί σωστά για κάθε $k \geq 1$.

Παράδειγμα: Θεωρούμε το διπλανό γράφημα. Έστω $d_k(v, u)$ η απόσταση μιας κορυφής u από μια κορυφή v, όταν μπορούμε να μηδενίσουμε το πολύ k ακμές στο συντομότερο $u - v$ μονοπάτι που θα χρησιμοποιήσουμε. Τότε έχουμε $d_0(s, t) = 12$, $d_1(s, t) = 5$ (χρησιμοποιούμε το μονοπάτι (s, v_2, v_3, t) και μηδενίζουμε την ακμή (s, v_2)), και $d_k(s, t) = 0$, για κάθε $k \geq 2$ (χρησιμοποιούμε το μονοπάτι (s, v_1, t) και μηδενίζουμε τις δύο ακμές).



Άσκηση 4: Ταξίδι σε Περίοδο Ενεργειακής Κρίσης (2 μον.)

Ταξιδεύετε από την πόλη s στην πόλη t μέσω οδικού δικτύου που περιγράφεται από κατευθυνόμενο γράφημα $G(V, E)$ (με $s, t \in V$) με n κορυφές και m ακμές. Υπό κανονικές συνθήκες, θα ακολουθούσατε τη συντομότερη $s - t$ διαδρομή. Αλλά με τις τιμές της βενζίνης στα ύψη, έχετε αποφασίσει να ακολουθήσετε την *οικονομικότερη* διαδρομή, με βάση την τιμή της βενζίνης στις πόλεις κατά μήκος της διαδρομής σας. Το ντεπόζιτο του αυτοκινήτου σας χωράει μέχρι B λίτρα βενζίνης. Για κάθε ακμή $e \in E$, έχετε υπολογίσει με ακρίβεια την ποσότητα βενζίνης $b(e) \in \mathbb{N}$ (σε λίτρα) που απαιτείται για να διασχίσετε την e με το αυτοκίνητό σας. Έχετε ακόμη καταγράψει την τιμή $c(v)$ (σε ευρώ / λίτρο) της βενζίνης σε κάθε πόλη $v \in V$ (μπορείτε να ανεφοδιαστείτε μόνο στις πόλεις / κορυφές του οδικού δικτύου). Υποθέτοντας ότι ξεκινάτε με άδειο ντεπόζιτο από την s (οπότε αναγκαστικά θα αγοράσετε μια ποσότητα βενζίνης στην s), ότι θέλετε να καταλήξετε με άδειο ντεπόζιτο στην t, και ότι πρέπει πάντα η ποσότητα της βενζίνης στο ντεπόζιτό σας να κυμαίνεται μεταξύ 0 και B, θέλετε να υπολογίσετε τη διαδρομή (και το αντίστοιχο πλάνο ανεφοδιασμού) που ελαχιστοποιεί το συνολικό κόστος για να ταξιδέψετε από την s στην t.

Για τις παρακάτω δύο περιπτώσεις, να αιτιολογήσετε την ορθότητα και την υπολογιστική πολυπλοκότητα των αλγορίθμων που θα διατυπώσετε.

1. Να διατυπώσετε αποδοτικό αλγόριθμο για τον υπολογισμό του πιο οικονομικού πλάνου ανεφοδιασμού όταν το G είναι ένα $s - t$ μονοπάτι $(s, v_2, \ldots, v_{n-1}, t)$ με n κορυφές.
2. Να διατυπώσετε αποδοτικό αλγόριθμο για τον υπολογισμό της πιο οικονομικής $s - t$ διαδρομής (και του αντίστοιχου πλάνου ανεφοδιασμού), για τη γενική περίπτωση, όπου το G μπορεί να είναι οποιοδήποτε κατευθυνόμενο γράφημα.

Άσκηση 5: Παιχνίδια Εξουσίας (2 μον.)

Η μακρινή Χώρα των Αλγορίθμων έχει n ιππότες και m κάστρα. Ο Βασιλιάς της θέλει να θέσει κάθε κάστρο υπό την εποπτεία ενός ιππότη. Κάθε ιππότης i μπορεί να έχει υπό την εποπτεία του το πολύ c_i κάστρα, ώστε να μην μπορεί να απειλήσει τον Βασιλιά, ενώ τα στρατεύματα που σταθμεύουν σε κάθε κάστρο j έχουν παραδώσει στον Βασιλιά μια λίστα K_j με τους ιππότες υπό των οποίων την εποπτεία δέχονται να τεθούν. Ο Βασιλιάς αναθέτει στον Πρωθυπουργό του τον υπολογισμό μιας ανάθεσης των κάστρων στους ιππότες, σύμφωνα με τους παραπάνω περιορισμούς.

(α) Να διατυπώσετε έναν αποδοτικό αλγόριθμο για αυτό το πρόβλημα. Αν δεν υπάρχει ανάθεση που ικανοποιεί όλους τους περιορισμούς, ο αλγόριθμός σας πρέπει να το διαπιστώνει. Να αιτιολογήσετε την ορθότητα και την πολυπλοκότητα του αλγορίθμου σας.

(β) Ο Πρωθυπουργός εκτελεί τον αλγόριθμο του (α), και διαπιστώνει ότι δεν υπάρχει ανάθεση που ικανοποιεί τους περιορισμούς. Όμως ο Βασιλιάς είναι δύσπιστος, και φαντάζεται ότι ο αλγόριθμος μπορεί να μην εκτελέστηκε σωστά. Θέλει λοιπόν ο Πρωθυπουργός να του αποδείξει ότι έχει δίκιο με τον πιο απλό και πειστικό τρόπο. Ποιο επιχείρημα (βασισμένο μόνο στο στιγμιότυπο εισόδου και στο αποτέλεσμα του αλγόριθμου) του προτείνετε να χρησιμοποιήσει για να πείσει τον Βασιλιά;

(γ) Εν τω μεταξύ, ο Βασιλιάς έχει αρχίσει να ανησυχεί για κάποιες συγκρούσεις μεταξύ των ιπποτών. Φτιάχνει λοιπόν μια λίστα με όλα τα ζεύγη ιπποτών που συγκρούονται μεταξύ τους, και προσπαθεί να βρει ένα ελάχιστου πλήθους σύνολο ιπποτών που αν εξοριστούν, οι συγκρούσεις θα σταματήσουν. Θα μπορούσε κάποιος να προτείνει στον Βασιλιά έναν αποδοτικό αλγόριθμο για αυτό το πρόβλημα;

Άσκηση 6: Ενοικίαση Αυτοκινήτων (1.4 μον.)

Έστω μια μικρή εταιρεία ενοικίασης αυτοκινήτων που λειτουργεί με μακροπρόθεσμες προσφορές που λαμβάνει από τους πελάτες της, τις οποίες αποδέχεται ή απορρίπτει. Η εταιρεία διαθέτει k (ίδια) αυτοκίνητα προς ενοικίαση και υπάρχουν n προσφορές από τους πελάτες της εταιρείας, όλες γνωστές εκ των προτέρων. Κάθε προσφορά (s_i, t_i, p_i) αναφέρει τη χρονική στιγμή δέσμευσης του αυτοκινήτου $s_i \in \mathbb{N}$, τη χρονική στιγμή αποδέσμευσης του αυτοκινήτου $t_i \in \mathbb{N}$, και το αντίτιμο $p_i \in \mathbb{N}^*$ που προσφέρει ο ενοικιαστής. Αν η εταιρεία αποδεχθεί την προσφορά, δεσμεύει ένα από τα αυτοκίνητα προς ενοικίαση για το χρονικό διάστημα $[s_i, t_i)$ και εισπράττει το αντίτιμο p_i. Στόχος της εταιρείας είναι να μεγιστοποιήσει το συνολικό ποσό που θα εισπράξει ως αντίτιμο (με τον περιορισμό ότι ο αριθμός των δεσμευμένων αυτοκινήτων δεν θα ξεπεράσει το k σε καμία χρονική στιγμή).

Να διατυπώσετε αποδοτικό αλγόριθμο για το πρόβλημα της ενοικίασης αυτοκινήτων, και να αιτιολογήσετε την ορθότητα και την υπολογιστική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου σας. Προσέξτε ότι ο χρόνος εκτέλεσης του αλγορίθμου σας μπορεί να εξαρτάται από τα n και k, αλλά όχι από τις τιμές των s_i, t_i, και p_i.