Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών

Διακριτά Μαθηματικά

Διδάσκοντες: Δ. Φωτάκης, Δ. Σούλιου

1η Γραπτή Εργασία, Ημ/νια Παράδοσης: 10/4/2024

Θέμα 1 (Διαδικασίες Απαρίθμησης, 0.6+0.6+0.9(+0.8) μον.).

1. Θεωρούμε το σύνολο $\mathcal{F} = \{f \,|\, f : \mathbb{N} \to \{0,1\}\}$ όλων των λογικών συναρτήσεων με πεδίο ορισμού τους φυσικούς αριθμούς. Είναι το $\mathcal{F}$ αριθμήσιμο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
2. Δύο λογικές συναρτήσεις $f, g \in \mathcal{F}$ είναι *πρακτικά ταυτόσημες*, αν υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε για κάθε $n \geq m$, $f(n) = g(n)$ (δηλ. οι f και g ταυτίζονται από ένα σημείο m και μετά). Να δείξετε ότι η σχέση $E \subseteq \mathcal{F} \times \mathcal{F}$, με $(f,g) \in E$ ανν οι f και g είναι πρακτικά ταυτόσημες, είναι σχέση ισοδυναμίας στο $\mathcal{F}$.
3. Ως σχέση ισοδυναμίας, η E διαμερίζει το $\mathcal{F}$ σε κλάσεις ισοδυναμίας. Θεωρούμε ότι για κάθε κλάση ισοδυναμίας $\mathcal{E}_f \subseteq \mathcal{F}$, έχει επιλεγεί μοναδικός αντιπρόσωπος $f \in \mathcal{E}_f$ και η $\mathcal{E}_f$ αποτελείται από τις λογικές συναρτήσεις g που είναι πρακτικά ταυτόσημες με την f. Είναι μια τέτοια κλάση ισοδυναμίας $\mathcal{E}_f$ αριθμήσιμο σύνολο; Είναι το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας στις οποίες η E διαμερίζει το $\mathcal{F}$ αριθμήσιμο σύνολο;
4. **(bonus)** Θεωρούμε μια άπειρη ακολουθία κρατουμένων που έχουν παραταχθεί στην ευθεία των φυσικών αριθμών (με βάση τον μοναδικό αριθμό μητρώου $0, 1, 2, \dots$ του καθενός). Κάθε κρατούμενος φοράει ένα καπέλο, πράσινο ή κόκκινο. Οι κρατούμενοι έχουν παραταχθεί ώστε να μπορούν να βλέπουν το χρώμα του καπέλου όλων των (άπειρων!) κρατουμένων με μεγαλύτερο αριθμό μητρώου, αλλά δεν μπορούν να δουν το χρώμα του δικού τους καπέλου και του καπέλου των κρατουμένων με αριθμό μητρώου μικρότερο από τον δικό τους. Οι κρατούμενοι θα απελευθερωθούν αν όλοι, εκτός ίσως από πεπερασμένο πλήθος τους, καταφέρουν να μαντέψουν σωστά το χρώμα του καπέλου που φορούν. Κάθε κρατούμενος μπορεί να απομνημονεύσει άπειρη πληροφορία και επιτράπηκε προσυνεννόηση μεταξύ τους (πριν οι φύλακες τους φορέσουν τα καπέλα τους). Να διατυπώσετε πρωτόκολλο στο οποίο μπορούν να συμφωνήσουν οι κρατούμενοι και το οποίο εξασφαλίζει την απελευθέρωσή τους. Σχολιάστε τον όγκο πληροφορίας που χρειάζεται να απομνημονεύσουν οι κρατούμενοι στο πρωτόκολλό σας;

Θέμα 2 (Διαδικασίες Απαρίθμησης και Αλγόριθμοι Απόφασης, 1.6 μον.). Έστω σύνολο $S \subseteq \{0,1\}^*$. Ένα *μαντείο* $A_S : \{0,1\}^* \to \{0,1\}$ για το S είναι ένας αλγόριθμος (που δίνεται ως "μαύρο κουτί", δηλαδή μπορούμε να τον χρησιμοποιήσουμε, αλλά δεν γνωρίζουμε τίποτα σχετικά με τη λειτουργία του, εκτός από την εγγύηση ορθότητας) τέτοιος ώστε για κάθε $x \in \{0,1\}^*$, $A_S(x) = 1$ αν και μόνο αν $x \in S$. Μια *διαδικασία απαρίθμησης* E_S για το S είναι μια αλγοριθμική διαδικασία (η οποία επίσης δίνεται ως "μαύρο κουτί") που λειτουργεί (επ' άπειρον, αν το S είναι άπειρο) και παράγει μια ακολουθία $x_0, x_1, \dots$ αποτελούμενη από στοιχεία του S και μόνον, χωρίς επαναλήψεις, με την εγγύηση ότι για κάθε $x \in S$, υπάρχει πεπερασμένη θέση $n(x) \in \mathbb{N}$ στην ακολουθία εξόδου της E_S όπου εμφανίζεται το x (δηλ. η E_S απαριθμεί όλα τα στοιχεία του S και μόνον αυτά).

1. Να δείξετε πως για κάθε σύνολο $S \subseteq \{0,1\}^*$, αν έχουμε ένα μαντείο A_S, μπορούμε να κατασκευάσουμε μια διαδικασία απαρίθμησης E_S για το σύνολο S και μια διαδικασία απαρίθμησης $E_{\bar{S}}$ για το συμπληρωματικό σύνολο $\bar{S} = \{0,1\}^* \setminus S$.
2. Να δείξετε ότι πως για κάθε σύνολο $S \subseteq \{0,1\}^*$, αν έχουμε διαδικασίες απαρίθμησης E_S και $E_{\bar{S}}$ για το σύνολο S και το συμπληρωματικό του $\bar{S} = \{0,1\}^* \setminus S$, μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα μαντείο A_S.

Θέμα 3 (Κατηγορηματική Λογική, 2.0 μον.). (α) Θεωρούμε μια πρωτοβάθμια γλώσσα με μονομελή κατηγορηματικά σύμβολα M και I και διμελή κατηγορηματικά σύμβολα P και L. Ερμηνεύουμε αυτή τη γλώσσα στο σύμπαν που αποτελείται από την ένωση του συνόλου των μουσικών (βλ. π.χ., μαθητές ενός ωδείου) και του συνόλου των μουσικών οργάνων, με το $M(x)$ να δηλώνει ότι *"ο x είναι μουσικός"*, το $I(x)$ να δηλώνει ότι *"το*

x *είναι μουσικό όργανο"*, το $P(x, y)$ να δηλώνει ότι *"ο (μουσικός) x παίζει το (όργανο) y"*, και το $L(x, y)$ να δηλώνει ότι *"ο (μουσικός) x συμπαθεί τον (μουσικό) y"* (για διευκόλυνση, μπορείτε να θεωρήσετε ότι η τελευταία σχέση είναι συμμετρική, δηλ. για κάθε ζευγάρι μουσικών x, y, αν $L(x, y)$, τότε και $L(y, x)$). Σε αυτή την ερμηνεία, να γράψετε τύπους που δηλώνουν ότι:

1. Το ελάχιστο πλήθος οργάνων που παίζει κάποιος μουσικός είναι δύο.
2. Υπάρχουν δύο μουσικοί που δεν συμπαθεί ο ένας τον άλλο και υπάρχει όργανο που παίζουν και οι δύο.
3. Αν δύο μουσικοί παίζουν ακριβώς τα ίδια όργανα, τότε συμπαθεί ο ένας τον άλλο.
4. Υπάρχουν δύο μουσικοί που συμπαθεί ο ένας τον άλλο και υπάρχει ένα όργανο που παίζουν και οι δύο, αλλά δεν παίζουν ακριβώς τα ίδια όργανα.
5. Αν ένας μουσικός παίζει όλα τα όργανα, εκτός ίσως από ένα, τότε τον συμπαθούν όλοι οι άλλοι μουσικοί.

Θέμα 4 (Κατηγορηματική Λογική, 2.3 μον.). (α) Θεωρούμε μια πρωτοβάθμια γλώσσα με ένα διμελές κατηγορηματικό σύμβολο P. Έστω οι τύποι:

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= \forall x \exists y \big(x \neq y \land P(x, y)\big) \\
\varphi_2 &= \forall x \exists y \big(x \neq y \land P(y, x)\big) \\
\varphi_3 &= \forall x \forall y \forall z \big(P(x, y) \land P(y, z) \to P(x, z)\big) \\
\varphi_4 &= \forall x \forall y \big(P(x, y) \land P(y, x) \to x = y\big)
\end{aligned}$$

1. Έστω η πρόταση $\psi = \varphi_1 \land \varphi_2 \land \varphi_3 \to \varphi_4$. Να διατυπώσετε μια ερμηνεία στην οποία η πρόταση ψ αληθεύει και μια άλλη ερμηνεία στην οποία η πρόταση ψ δεν αληθεύει. Και για τις δύο ερμηνείες, να θεωρήσετε σύμπαν με τουλάχιστον 6 στοιχεία.
2. Να δείξετε ότι η πρόταση $\chi = \varphi_1 \land \varphi_2 \land \varphi_3 \to \neg\varphi_4$ αληθεύει για οποιαδήποτε ερμηνεία του P σε πεπερασμένο σύμπαν.

(β) Έστω πρωτοβάθμια γλώσσα με ένα διμελές κατηγορηματικό σύμβολο P. Θεωρούμε την πρόταση:

$$\varphi = \forall x \forall y \Big(x \neq y \to P(x, y) \lor P(y, x)\Big) \to \exists x \forall y \Big(x \neq y \to P(y, x) \lor \exists z \big(P(y, z) \land P(z, x)\big)\Big)$$

1. Να διατυπώσετε (σε φυσική γλώσσα, απλά και κατανοητά) το νόημα του τύπου φ. Αν βοηθάει να θεωρήσετε συγκεκριμένο πλαίσιο ερμηνείας, σκεφτείτε απλά κατευθυνόμενα γραφήματα, όπου το σύμπαν είναι οι κορυφές του γραφήματος και το $P(x, y)$ δηλώνει την ύπαρξη ακμής από την κορυφή x προς την κορυφή y.
2. Χρησιμοποιώντας μαθηματική επαγωγή στον πληθάριθμο του σύμπαντος, να δείξετε ότι ο φ αληθεύει σε κάθε ερμηνεία με πεπερασμένο σύμπαν.

Θέμα 5 (Αναδρομικές Σχέσεις, 1.0 μον.). Έστω σύνολο θετικών φυσικών $X = \{w_1, \ldots, w_n\}$. Για κάθε σύνολο $S \subseteq X$, συμβολίζουμε με $w(S) = \sum_{w_i \in S} w_i$ το άθροισμα των στοιχείων του S. Θεωρούμε συνάρτηση $C : \{1, \ldots, n\} \times \{0, 1, \ldots, w(X)\} \to \mathbb{N}$ που ορίζεται ως εξής: για κάθε $k \in \{1, \ldots, n\}$ και κάθε $W \in \{0, 1, \ldots, w(X)\}$, $C(k, W)$ είναι το πλήθος των υποσυνόλων $S \subseteq \{w_1, \ldots, w_k\}$ με άθροισμα στοιχείων $w(S) = W$. Να διατυπώσετε αναδρομική σχέση για τον υπολογισμό όλων των $n(w(X) + 1)$ τιμών της C.

Θέμα 6 (Διμελείς Σχέσεις, 1.0 μον.). Έστω πεπερασμένο σύνολο S με n στοιχεία (για ευκολία, θεωρούμε ότι το n είναι άρτιος). Να υπολογίσετε το μήκος της μακρύτερης αλυσίδας στο μερικώς διατεταγμένο σύνολο $(2^S, \subseteq)$. Να βρείτε ακόμη μία όσο το δυνατόν μεγαλύτερη αντιαλυσίδα στο $(2^S, \subseteq)$ και να υπολογίσετε το μέγεθός της. Πιστεύετε ότι η αντιαλυσίδα που βρήκατε είναι όντως η μεγαλύτερη αντιαλυσίδα στο $(2^S, \subseteq)$ και γιατί;

Παράδοση. Οι εργασίες πρέπει να αναρτηθούν στο `https://helios.ntua.gr/course/view.php?id=893` μέχρι τα μεσάνυχτα της Τετάρτης 10 Απριλίου.

Καλή Επιτυχία!