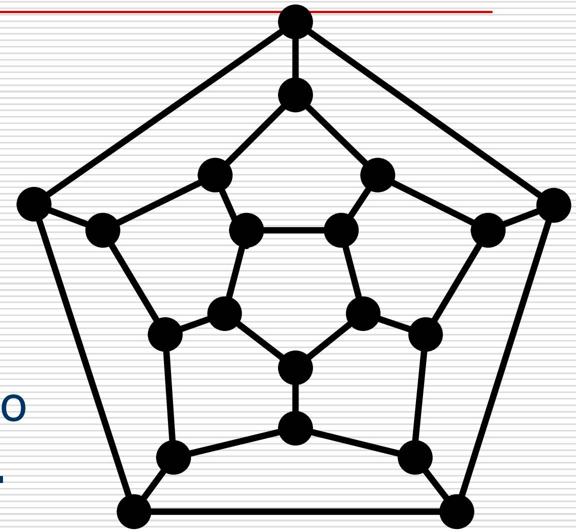
Επίπεδα Γραφήματα

Διδάσκοντες: **Δ. Φωτάκης, Δ. Σούλιου**
Επιμέλεια διαφανειών: **Δ. Φωτάκης**

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και Μηχανικών Υπολογιστών

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Επίπεδα Γραφήματα



- Επίπεδο ένα γράφημα που **μπορεί** να ζωγραφιστεί στο επίπεδο χωρίς να τέμνονται οι ακμές του.
- Επίπεδη αποτύπωση ορίζει **όψεις** (faces).
  - Περιοχή επιπέδου που ορίζεται από (απλό) κύκλο και δεν μπορεί να διαιρεθεί σε μικρότερες όψεις.
  - **Εσωτερικές** και **εξωτερική** όψη.
  - f = #όψεων επίπεδου γραφήματος.
- Τύπος του Euler για συνεκτικά επίπεδα γραφ.: $n + f = m + 2$
  - #όψεων είναι αναλλοίωτη ιδιότητα, δεν εξαρτάται από αποτύπωση!
  - Γενίκευση: $n + f = m + k + 1$, k = #συνεκτικών συνιστωσών.

Επίπεδα Γραφήματα

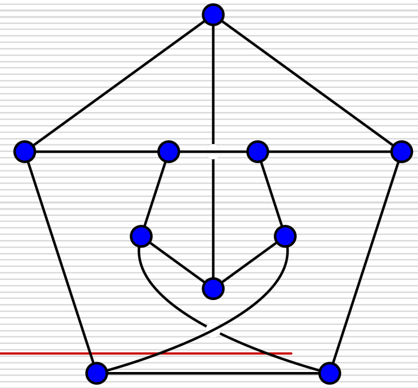
- Μέγιστος αριθμός ακμών απλού επίπεδου γραφήματος.
  - Απλό: κάθε όψη ορίζεται από τουλάχιστον 3 ακμές.
  - Κάθε ακμή «ανήκει» σε μία ή δύο όψεις:
    - Αν ανήκει σε κύκλο: σύνορο δύο όψεων.
    - Διαφορετικά, «ανήκει» σε μία όψη.
  - (Κάθε ακυκλικό γράφημα είναι επίπεδο με μία όψη, την εξωτερική).

$$3f \leq \sum_{f \in \text{όψεις}} \#\,\text{ακμών}(f) \leq 2m \Rightarrow f \leq 2m/3$$

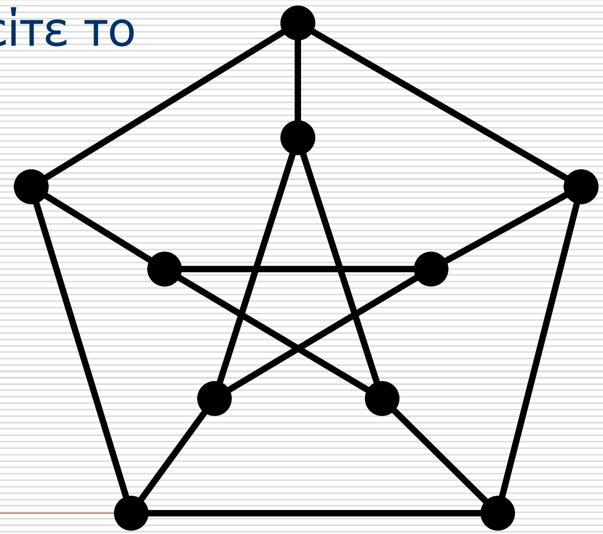
$$m + 2 = n + f \leq n + 2m/3 \Rightarrow m/3 \leq n - 2 \Rightarrow m \leq 3n - 6$$

  - Υπάρχει συνεκτικό απλό επίπεδο γράφημα με m = 3n – 6.
    - Όλες του οι όψεις είναι τρίγωνα.
- Απλό **διμερές** επίπεδο γράφημα: m ≤ 2n – 4.

Επίπεδα Γραφήματα

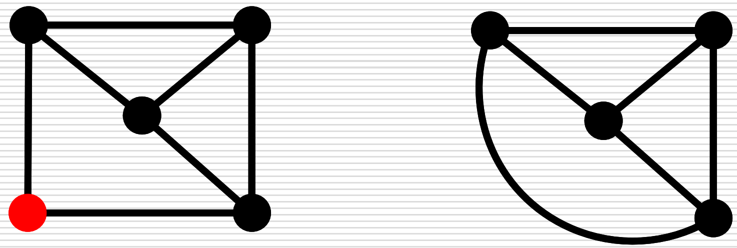


- Άρα αν απλό γράφημα έχει $m > 3n-6$ ($m > 2n-4$ αν διμερές), **δεν** είναι επίπεδο.
  - Τα K_5 και $K_{3,3}$ **δεν** είναι επίπεδα.
  - Το συμπληρωματικό του γραφ. Petersen δεν είναι επίπεδο.
  - Κάθε απλό επίπεδο γράφημα G έχει $\delta(G) \le 5$.
    - Π.χ. χρησιμοποιείται για να δείξουμε επαγωγικά ότι κάθε επίπεδο γράφημα έχει χρωματικό αριθμό ≤ 5.
  - Κάθε γράφημα G με $n \ge 11$ κορυφές, είτε το G είτε το συμπληρωματικό του δεν είναι επίπεδο.
  - Crossing number cr(G): ελάχιστο πλήθος διασταυρώσεων ακμών σε μια επίπεδη αποτύπωση του G.
    - $cr(G) \ge m - 3n + 6$



Ομοιομορφικά Γραφήματα

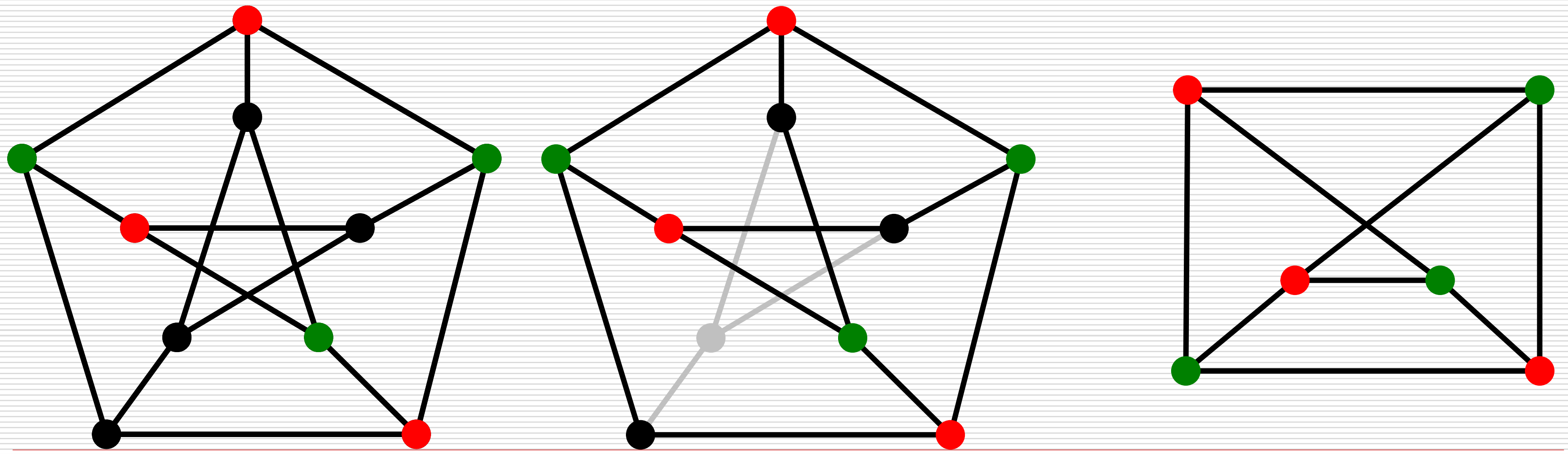
- **Απλοποίηση σειράς**: απαλοιφή κορυφών βαθμού 2 (δεν επηρεάζουν επιπεδότητα).



- Γραφήματα G και H ομοιομορφικά ανν μπορούν να καταλήξουν ισομορφικά με διαδοχική εφαρμογή απλοποιήσεων σειράς.
  - Ομοιομορφικά μπορεί να «διαφωνούν» σε αναλλοίωτες ιδιότητες, αλλά «συμφωνούν» σε επιπεδότητα.
  - Ομοιομορφικά «συμφωνούν» σε κύκλο Euler και κύκλο Hamilton;

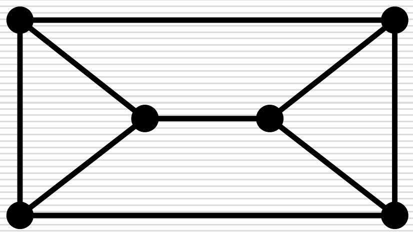
Θεώρημα Kuratowski

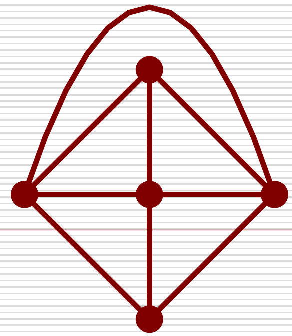
- **Θ. Kuratowski**: Γράφημα επίπεδο ανν δεν περιέχει υπογράφημα ομοιομορφικό με K_5 ή $K_{3,3}$.
  - Ένα γράφημα δεν είναι επίπεδο ανν μπορούμε με απλοποιήσεις (διαγραφές κορυφών και ακμών, απλοποιήσεις σειράς) να καταλήξουμε σε K_5 ή $K_{3,3}$.

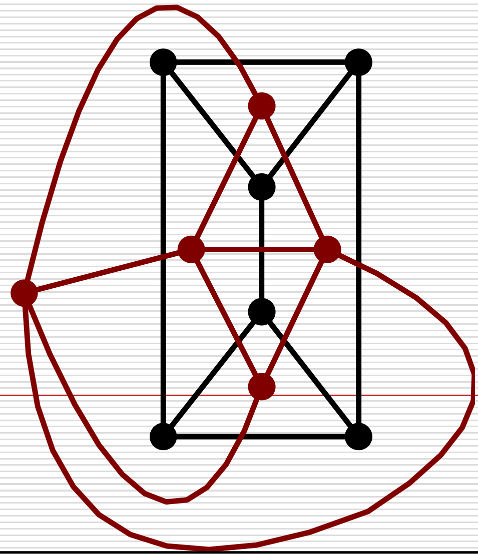


Δυϊκό Επίπεδου Γραφήματος

- Δυϊκό γράφημα G^* ενός επίπεδου γραφήματος G έχει:
  - Μια κορυφή για κάθε όψη του G.
  - Μια ακμή e^* για κάθε ακμή e του G. Η e^* συνδέει κορυφές που αντιστοιχούν στις όψεις όπου ανήκει η e.
    - Η e^* είναι ανακύκλωση αν η ακμή e είναι γέφυρα.
  - Κάθε όψη του G^* περιλαμβάνει μια κορυφή του G.
  - Το G^* είναι επίπεδο και το δυϊκό του G^* είναι το G.
  - Το G^* μπορεί να μην είναι απλό. Ο βαθμός κάθε κορυφής του G^* είναι ίσος με τον βαθμό της αντίστοιχης όψης του G.
    - Συνεκτικό επίπεδο G είναι διμερές ανν G^* έχει κύκλο Euler.







Πλατωνικά Γραφήματα

- **Πλατωνικό** (απλό μη κατευθυνόμενο) γράφημα: επίπεδο, όλες οι κορυφές βαθμού d, και όλες οι όψεις βαθμού h (d, h ≥ 3).