

Θεωρία Γραφημάτων: Ορολογία και Βασικές Έννοιες

Διδάσκοντες: **Δ. Φωτάκης, Δ. Σούλιου**
Επιμέλεια διαφανειών: **Δ. Φωτάκης**

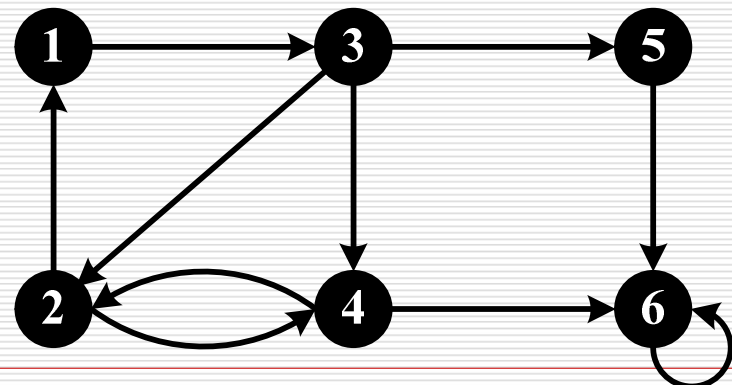
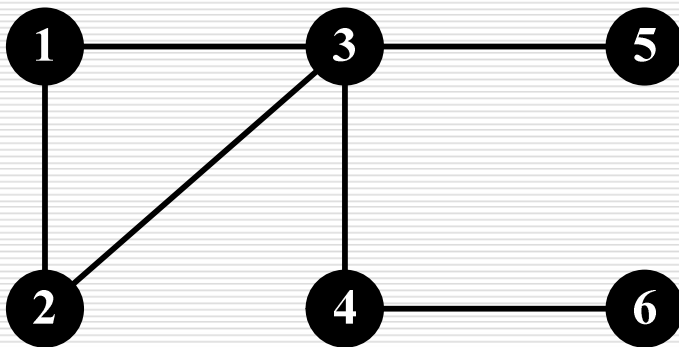
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και Μηχανικών Υπολογιστών

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο



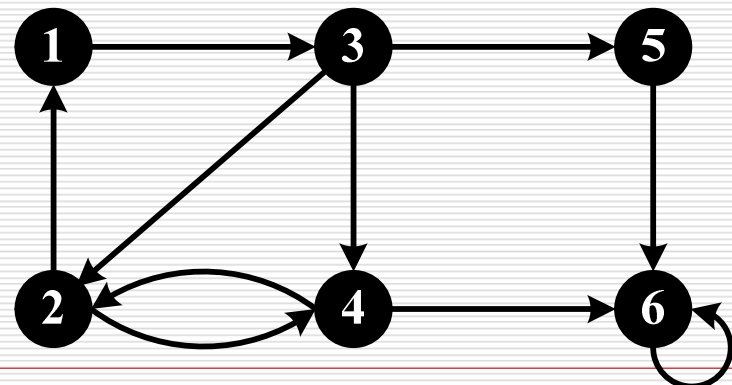
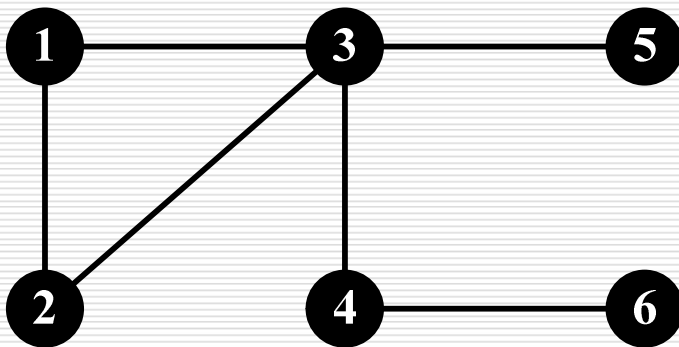
Γραφήματα

- **Μοντελοποίηση** πολλών σημαντικών προβλημάτων (π.χ. τηλεπικοινωνιακά, οδικά, ηλεκτρικά, κοινωνικά δίκτυα – συνεκτικότητα, διαδρομές, δρομολόγηση, ανάθεση πόρων, layouts, ...).
- Γράφημα $G(V, E)$: V κορυφές
 E ακμές (ζεύγη σχετιζόμενων κορυφών)
 - Τάξη $|V| = |V(G)| = n$ και μέγεθος $|E| = |E(G)| = m$.
 - Κατευθυνόμενα και μη-κατευθυνόμενα γραφήματα.
 - Βάρη (μήκη) στις ακμές $G(V, E, w)$, $w : E \mapsto \mathbb{R}$



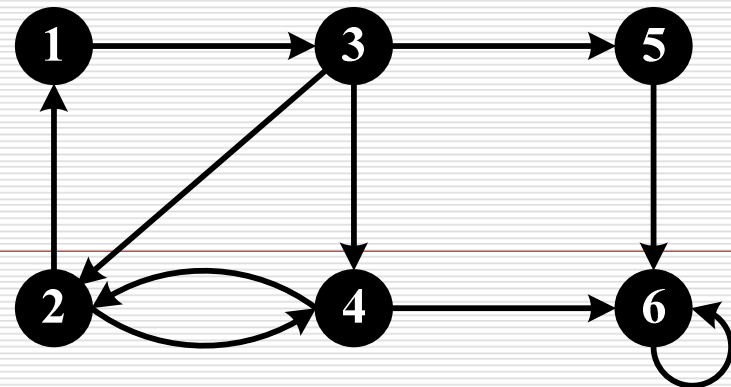
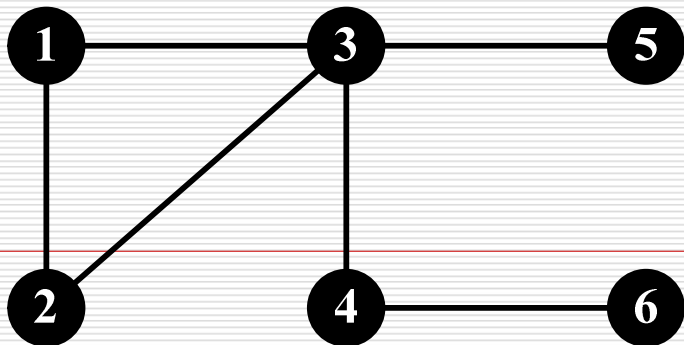
Γραφήματα

- Δεδομένου γραφήματος $G(V, E)$:
 - Γειτονιά κορυφής v : $N(v) = \{u \in V : \{v, u\} \in E\}$
 - Επεκταμένη γειτονιά κορυφής v : $N^+(v) = N(v) + v$
 - Γειτονιά συνόλου κορυφών X :
 $N(X) = \{u \in V \setminus X : \{v, u\} \in E \text{ για κάποια κορυφή } v \in X\}$
- Απλό γράφημα: χωρίς ανακυκλώσεις ή παράλληλες ακμές.
 - Θεωρούμε απλά μη κατευθυνόμενα γραφήματα, εκτός αν αναφέρεται διαφορετικά.



Βαθμός Κορυφής

- Βαθμός κορυφής v : $\text{deg}(v) = |N(v)|$
(#ακμών που προσπίπτουν στη v).
 - Κατευθυνόμενα: έσω-βαθμός και έξω-βαθμός.
 - Μη-κατευθυνόμενο $G(V, E)$: $\sum_{v \in V} \text{deg}(v) = 2|E|$
 - Κάθε γράφημα έχει άρτιο πλήθος κορυφών περιττού βαθμού.
 - $\delta(G) / \Delta(G)$: ελάχιστος (μέγιστος) βαθμός κορυφής στο G .
 - k -κανονικό γράφημα: όλες οι κορυφές βαθμού k .
- Νδο σε κάθε απλό γράφημα, δύο κορυφές έχουν ίδιο βαθμό.
 - Έχουμε n κορυφές και $n-1$ πιθανές τιμές βαθμού για κάθε κορυφή.
 - Πιθανές τιμές είτε $\{0, 1, \dots, n-2\}$ είτε $\{1, 2, \dots, n-1\}$.

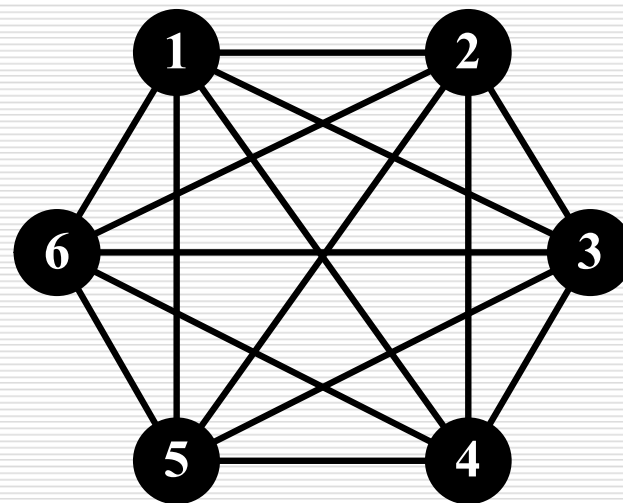
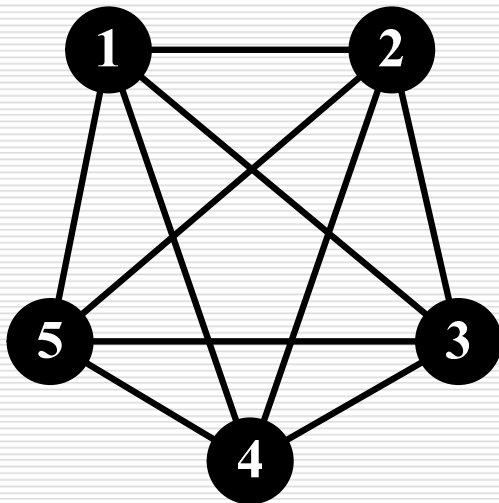


Παραδείγματα

- Υπάρχει(;) απλό μη κατευθυνόμενο γράφημα με:
 - 8 κορυφές: 1 βαθμού 2, 2 βαθμού 3, 4 βαθμού 4, και 1 βαθμού 5.
 - Όχι, άθροισμα βαθμών περιττός (ή ισοδύναμα, περιττό πλήθος κορυφών με περιττό βαθμό).
 - 6 κορυφές: 2 βαθμού 2, 2 βαθμού 3, 1 βαθμού 4, και 1 βαθμού 6.
 - Όχι, σε κάθε απλό γράφημα G με n κορυφές, $\Delta(G) \leq n - 1$.
 - 5 κορυφές: 1 βαθμού 2 και 4 βαθμού 4.
 - Όχι, αφού οι 4 κορυφές με βαθμό 4 συνδέονται με όλες τις άλλες, ο ελάχιστος βαθμός κορυφής πρέπει να είναι 4.
 - 9 κορυφές: 1 βαθμού 1, 2 βαθμού 3, 2 βαθμού 4, 1 βαθμού 5, 1 βαθμού 6, και 2 βαθμού 8.
 - Όχι, αφού οι 2 κορυφές με βαθμό 8 συνδέονται με όλες τις άλλες, ελάχιστος βαθμός κορυφής πρέπει να είναι 2.

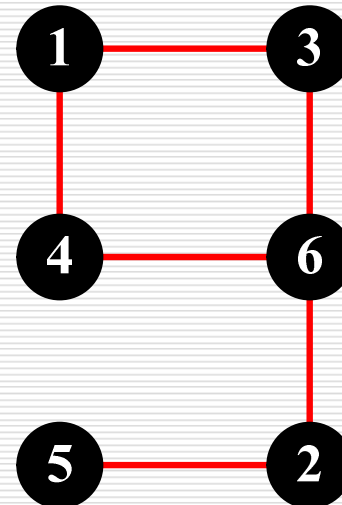
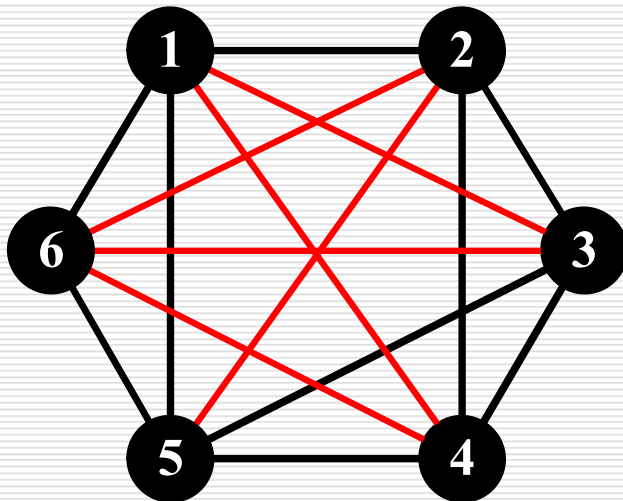
Πλήρες και Συμπληρωματικό Γράφημα

- Πλήρες γράφημα n κορυφών: K_n
 - Όλα τα ζεύγη κορυφών συνδέονται με ακμή: $n(n-1)/2$ ακμές.



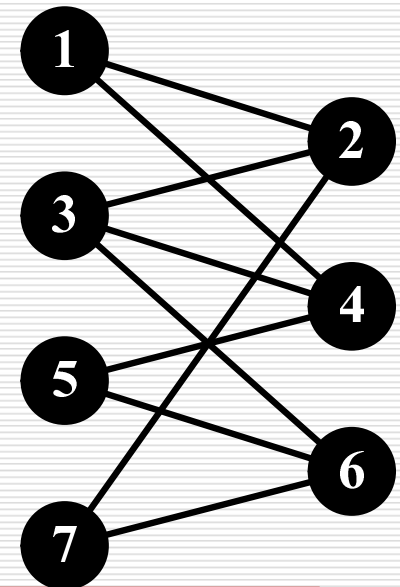
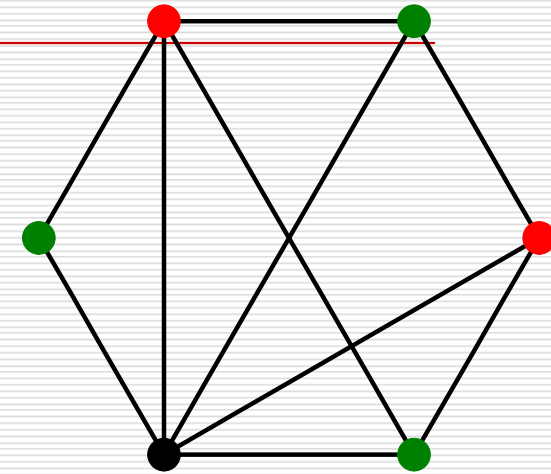
Πλήρες και Συμπληρωματικό Γράφημα

- Πλήρες γράφημα n κορυφών: K_n
 - Όλα τα ζεύγη κορυφών συνδέονται με ακμή: $n(n-1)/2$ ακμές.
- Συμπληρωματικό γράφημα \bar{G} γραφήματος G .
 - Ίδιο σύνολο κορυφών. Ακμές: όσες δεν υπάρχουν στο G .
 - Συμπληρωματικό του \bar{G} : αρχικό γράφημα G .



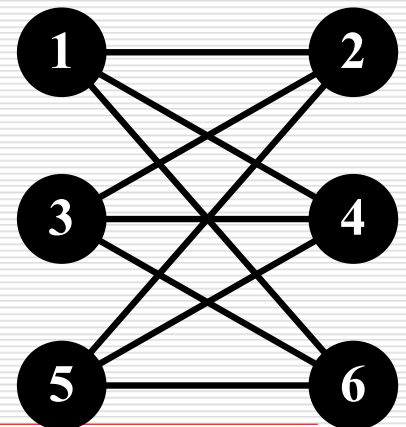
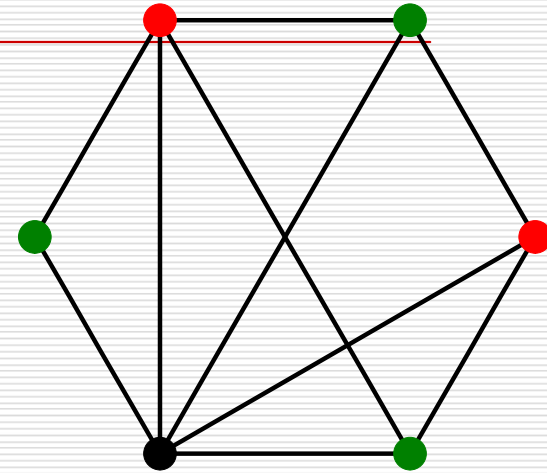
Διμερές Γράφημα

- **Ανεξάρτητο σύνολο:** σύνολο κορυφών που δεν συνδέονται με ακμή.
- Διμερές γράφημα: υπάρχει διαμέριση κορυφών σε **δύο ανεξάρτητα σύνολα**.
 - $G(X, Y, E)$: X και Y ανεξάρτητα σύνολα, ακμές μόνο μεταξύ κορυφών X και Y .
 - G διμερές αν **δεν έχει κύκλους περιττού μήκους**.
 - Κύκλος n κορυφών C_n : διμερές αν **n άρτιος**.



Διμερές Γράφημα

- **Ανεξάρτητο σύνολο:** σύνολο κορυφών που δεν συνδέονται με ακμή.
- Διμερές γράφημα: υπάρχει διαμέριση κορυφών σε **δύο ανεξάρτητα σύνολα**.
 - $G(X, Y, E)$: X και Y ανεξάρτητα σύνολα, ακμές μόνο μεταξύ κορυφών X και Y .
 - G διμερές αν **δεν έχει κύκλους περιττού μήκους**.
 - Κύκλος n κορυφών C_n : διμερές αν **n άρτιος**.
- Πλήρες διμερές γράφημα $K_{n,m}$:
 - Δύο ανεξάρτητα σύνολα με n και m κορυφές.
 - Όλες οι **$n \cdot m$ ακμές** μεταξύ τους.
 - Π.χ. $K_{3,3}$ έχει 9 ακμές.



Χαρακτηρισμός Διμερών Γραφημάτων

- Γράφημα $G(V, E)$ είναι διμερές αν το G **δεν έχει κύκλους περιττού μήκους**.
 - Αν G διμερές με ανεξάρτητα σύνολα X και Y , κάθε κύκλος C έχει τόσες κορυφές του X όσες και του Y : άρα C άρτιου μήκους.
 - Αντίστροφο: έστω ότι G **δεν έχει κύκλους περιττού μήκους**.
 - Αυθαίρετη κορυφή s και αποστάσεις $d(s, u)$ προς κάθε κορυφή u .
 - $X = \{ u : d(s, u) \text{ άρτιος} \}$ και $Y = \{ u : d(s, u) \text{ περιττός} \}$
 - Έστω ότι δύο κορυφές x, y στο X συνδέονται με ακμή.
 - Έστω w πρώτη κοινή κορυφή συντομότερων $x - s$ και $y - s$ μονοπατιών (υπάρχει πάντα, αφού μονοπάτια καταλήγουν στην s).
 - Αμφότερα συντομότερα μονοπάτια: τμήματα $w - s$ μήκους $d(s, w)$.
 - Άρα $d(w, x) + d(w, y)$ είναι άρτιος και $(w, \dots, x, y, \dots, w)$ είναι κύκλος περιττού μήκους – άτοπο!
- Κατασκευαστική απόδειξη με «πιστοποιητικό ορθότητας»!

Παραδείγματα

□ Έστω διμερές γράφημα $G(X, Y, E)$ με n κορυφές. Νδο:

■ $\sum_{v \in X} \deg(v) = \sum_{v \in Y} \deg(v) = |E|$

□ Κάθε ακμή έχει το ένα άκρο της στο X και το άλλο στο Y .

■ $\Delta(G) + \delta(G) \leq n$.

□ Υποθέτουμε ότι $|X| \leq |Y|$.

□ Τότε $\Delta(G) \leq |Y|$.

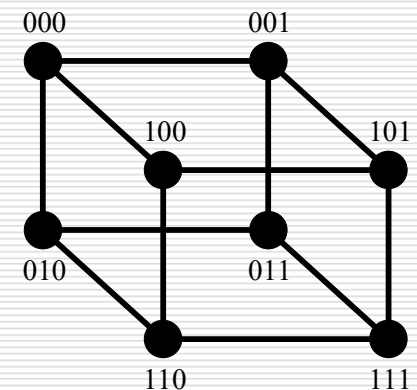
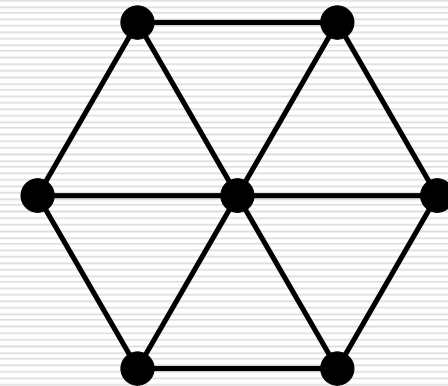
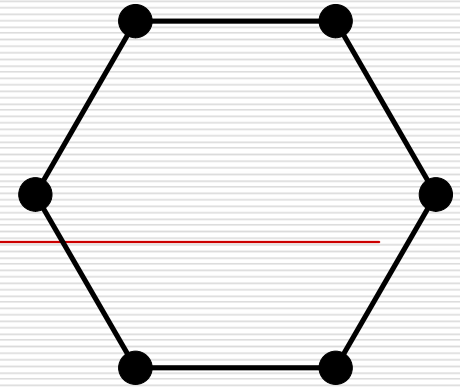
□ Έστω κορυφή $u \in Y$. Τότε $\delta(G) \leq \deg(u) \leq |X|$.

□ Να δείξετε (με γραφοθεωρητικά επιχειρήματα) ότι:

$$\binom{n+m}{2} = \binom{n}{2} + \binom{m}{2} + mn$$

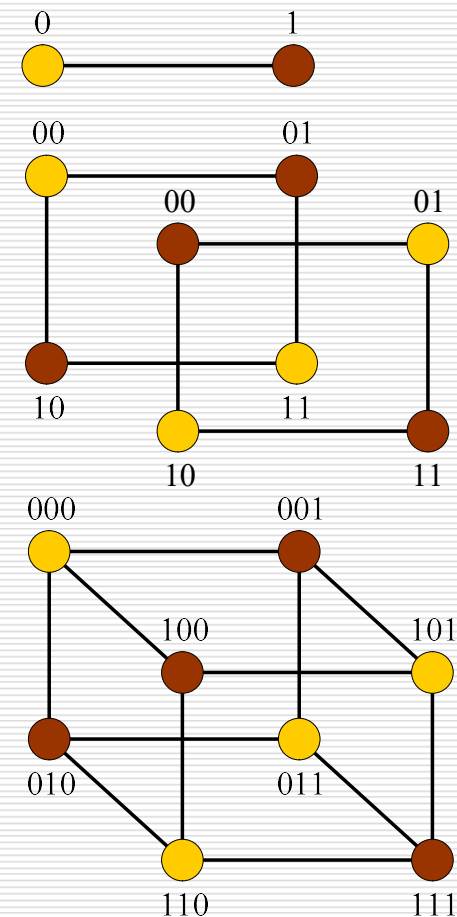
Ειδικά Γραφήματα

- Πλήρες γράφημα n κορυφών: K_n
- Πλήρες διμερές γράφημα με n και m κορυφές: $K_{n,m}$
 - Αστέρης: $K_{1,n}$
- Απλό μονοπάτι με n κορυφές: P_n
- Απλός κύκλος με n κορυφές: C_n
- Τροχός τάξης n ($n+1$ κορυφές): W_n
- Υπερκύβος διάστασης n (2^n κορυφές): Q_n (ή $Q(n)$)
 - Μια κορυφή για κάθε δυαδική συμβολοσειρά μήκους n
 - Κορυφές συνδέονται μεταξύ τους αν αντίστοιχες δυαδικές συμβ/ρες διαφέρουν μόνο σε ένα bit
 - Ιδιότητες: κανονικό, διμερές, διάμετρος, ...
 - Αναδρομικός ορισμός (για απόδειξη ιδιοτήτων με επαγωγή).



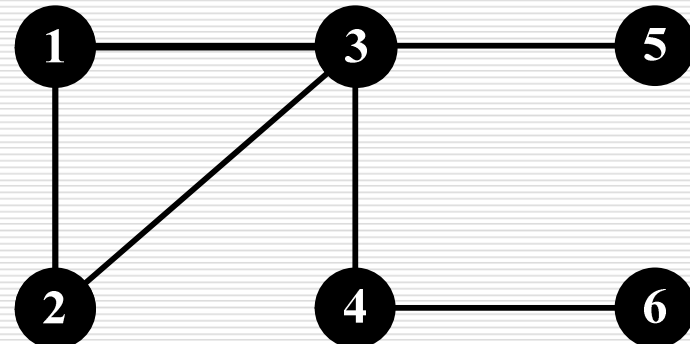
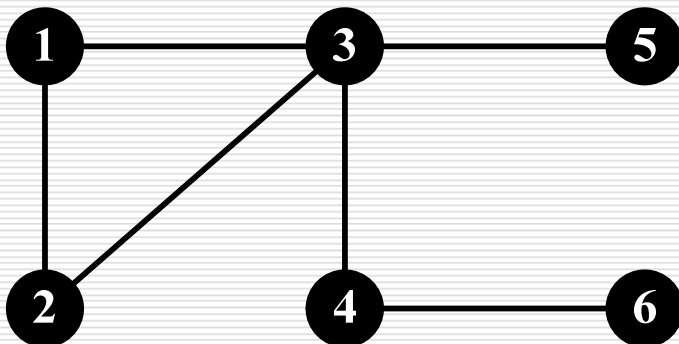
(Απλή) Άσκηση

- Να δείξετε (με επαγωγή) ότι για κάθε $n \geq 1$, ο υπερκύβος $Q(n)$ διάστασης n είναι **διμερές** γράφημα.
 - **Βάση:** $Q(1)$ έχει δύο κορυφές, **διμερές** γράφημα.
 - **Επαγ. Υπόθεση:** Για αυθαίρετο $n \geq 1$, υποθέτουμε ότι $Q(n)$ **διμερές** γράφημα.
 - **Επαγ. Βήμα:** Θδο $Q(n+1)$ είναι **διμερές** γράφημα.
 - Θεωρούμε δύο **αντίγραφα** $Q_0(n)$ και $Q_1(n)$ του υπερκύβου διάστασης n .
 - Επαγ. υπόθεση: $Q_0(n)$ και $Q_1(n)$ **διμερή** γραφήματα.
 - A_0 και B_0 **διαμέριση** κορυφών του $Q_0(n)$.
 - A_1 και B_1 **αντίστοιχη** διαμέριση κορυφών του $Q_1(n)$.
 - Από αναδρ. ορισμό, $Q(n+1)$ προκύπτει **συνδέοντας** **αντίστοιχες** κορυφές (και μόνο) των $Q_0(n)$ και $Q_1(n)$.
 - Άρα $A_0 \cup B_1$ και $B_0 \cup A_1$ **ανεξάρτητα** σύνολα, και $Q(n+1)$ είναι **διμερές** γράφημα.



Υπο-Γραφήματα

- Υπογράφημα $G'(V', E')$ του $G(V, E)$ όταν $V' \subseteq V$ και $E' \subseteq E$.
 - **Επικαλύπτον** (spanning) όταν $V' = V$, δηλ. έχει **όλες τις κορυφές** του αρχικού γραφήματος, επιλέγουμε τις **ακμές** που τις συνδέουν.
 - **Επαγόμενο** (induced) όταν $E' = \{(u, v) \in E : u, v \in V'\}$ δηλ. έχει **όλες τις ακμές** του αρχικού μεταξύ των επιλεγμένων **κορυφών**.



Διμερή Υπογραφήματα

- Κάθε γράφημα $G(V, E)$ με m ακμές περιέχει διμερές υπογράφημα $G'(X, Y, E')$ με τουλάχιστον $m/2$ ακμές.
 - Βλ. και πρόβλημα **MAX CUT**. Ισχύει και για πολυγραφήματα χωρίς ανακυκλώσεις.
- Απόδειξη με πιθανοτική μέθοδο:
 - Κάθε κορυφή στο X με πιθανότητα $1/2$, διαφορετικά στο Y .
 - \forall ακμή $\{u, v\}$, $\text{Prob}[\{u, v\} \text{ μεταξύ } X \text{ και } Y] = 1/2$.
 - Γραμμικότητα μέσης τιμής: $\text{Exp}[\# \text{ακμών μεταξύ } X \text{ και } Y] = m/2$
 - Άρα υπάρχει διαμέριση (X, Y) ώστε $\# \text{ακμών μεταξύ } X \text{ και } Y \geq m/2$
- Κατασκευαστική απόδειξη:
 - Εξετάζουμε κορυφές μία-μία με τη σειρά. Κορυφή u στο X αν έχει πιο πολλούς γείτονες στο Y από ότι στο X , διαφορετικά στο Y .
 - «Κρατάμε» μεταξύ X και Y τουλάχιστον τόσες ακμές όσες «διώχνουμε». Τυπική απόδειξη με επαγωγή στον $\#$ κορυφών.

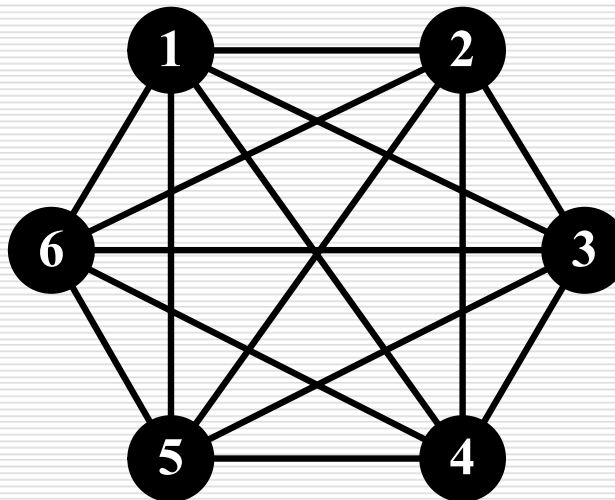
Μεγάλα Ανεξάρτητα Σύνολα

- Κάθε γράφημα $G(V, E)$ με n κορυφές και $m = nd/2$ ακμές, για κάποιο $d \geq 1$, έχει ανεξάρτητο σύνολο μεγέθους $\geq n/(2d)$
- Απόδειξη με πιθανοτική μέθοδο:
 - Τυχαίο υποσύνολο $V_1 \subseteq V$: κάθε κορυφή u στο V_1 με πιθανότητα p .
 - $\text{Exp}[|V_1|] = np$ και $\text{Exp}[|E(G[V_1])|] = mp^2 = ndp^2/2$.
 - $G[V_1]$ (πιθανότατα) **δεν** είναι ανεξάρτητο σύνολο.
 - Αλλά αφαιρώντας αναμενόμενο $\#$ κορυφών $\leq ndp^2/2$ από V_1 (το ένα άκρο κάθε ακμής στο $G[V_1]$) παίρνουμε **ανεξάρτητο σύνολο**.
 - $\text{Exp}[\# \text{κορυφών που μένουν}] \geq np - ndp^2/2 = np(1 - dp/2)$.
 - Αυτό μεγιστοποιείται για $p = 1/d$, και έχουμε $\text{Exp}[\# \text{κορυφών που απομένουν σε ανεξάρτητο σύνολο}] \geq n/(2d)$
 - Άρα υπάρχει ανεξάρτητο σύνολο με $\geq n/(2d)$ κορυφές.

Αριθμοί Ramsey



- Σε κάθε σύνολο 6 ανθρώπων, είτε 3 φίλοι είτε 3 άγνωστοι.
 - Για κάθε χρωματισμό ακμών στο K_6 με μπλε και κόκκινο, υπάρχει μονοχρωματικό K_3 .
 - Ισοδύναμα, κάθε γράφημα 6 κορυφών έχει είτε τρίγωνο είτε ανεξάρτητο σύνολο μεγέθους 3.
 - **Δεν** ισχύει για το K_5 (κύκλος C_5 δεν έχει ούτε τρίγωνο ούτε ανεξάρτητο σύνολο μεγέθους 3).



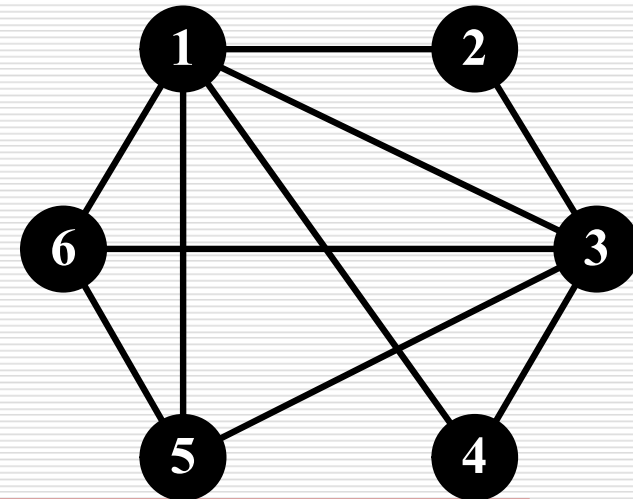
Αριθμοί Ramsey



- Σε κάθε σύνολο 6 ανθρώπων, είτε 3 φίλοι είτε 3 άγνωστοι.
 - Για κάθε χρωματισμό ακμών στο K_6 με μπλε και κόκκινο, υπάρχει μονοχρωματικό K_3 .
- Υπάρχει άνθρωπος a που έχει είτε 3 φίλους είτε 3 αγνώστους.
 - Χβτγ. υποθέτουμε ότι a έχει 3 φίλους: β, γ, δ .
 - Αν στους β, γ, δ δύο φίλοι (π.χ. β, γ): έχουμε 3 φίλους (a, β, γ).
 - Αν στους β, γ, δ όλοι άγνωστοι: έχουμε 3 αγνώστους (a, β, γ).
- $R(m, s) =$ ελάχιστο n τ.ω για κάθε χρωματισμό ακμών του K_n με μπλε και κόκκινο, υπάρχει είτε μπλε K_m είτε κόκκινο K_s .
 - $R(m, s) = R(s, m)$ και $R(m, s) \leq R(m - 1, s) + R(m, s - 1)$.
 - Αντίστοιχα για περισσότερα από 2 χρώματα.
 - \forall χρωματισμό ακμών ενός μεγάλου πλήρους γραφήματος, υπάρχει μονοχρωματικό πλήρες υπογράφημα επιθυμητού μεγέθους.

Διαδρομές, Μονοπάτια, και Κύκλοι

- Διαδρομή – Μονοκονδυλιά – Μονοπάτι - Κύκλος
 - **Διαδρομή:** ακολουθία «διαδοχικών» ακμών.
 - Π.χ. $\{2, 1\}, \{1, 3\}, \{3, 4\}, \{4, 1\}, \{1, 5\}, \{5, 3\}, \{3, 6\}$.
 - **Μονοκονδυλιά:** διαδρομή χωρίς επανάληψη ακμών.
 - **(Απλό) μονοπάτι:** διαδρομή χωρίς επανάληψη κορυφών (και ακμών).
 - Υπάρχει διαδρομή $u - v$ αν υπάρχει **μονοπάτι $u - v$** .
 - **Απόσταση $d(u, v)$** (χωρίς και με βάρη): μήκος συντομότερου $u - v$ μονοπατιού.
 - **Διάμετρος $D(G)$:** μέγιστη απόσταση μεταξύ δύο κορυφών του G .
 - **Κλειστή διαδρομή** όταν άκρα της ταυτίζονται.
 - Κλειστή μονοκονδυλιά ή **κύκλωμα**.
 - **(Απλός) κύκλος:** μονοπάτι που άκρα του ταυτίζονται («κλειστό» μονοπάτι).

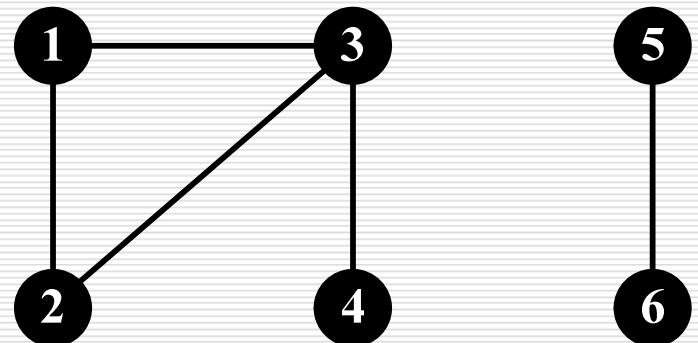
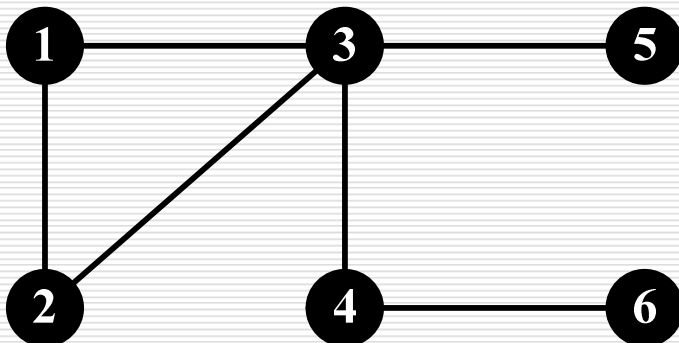


Παρατηρήσεις και Ιδιότητες

- (Απλό) γράφημα G έχει **μονοπάτι μήκους $\geq \delta(G)$** .
 - Ξεκινώντας από μια κορυφή, ακολουθούμε **ακμή προς κορυφή που δεν έχουμε επισκεφθεί** ήδη.
 - Τουλάχιστον **$\delta(G)+1$ κορυφές**: μονοπάτι μήκους $\geq \delta(G)$.
- Αν G απλό και **$\delta(G) \geq 2$** , τότε έχει **κύκλο μήκους $\geq \delta(G)+1$** .
 - Αντίστοιχα με μονοπάτι, αλλά **επιστρέφουμε σε «πιο απομακρυσμένη» κορυφή** που έχουμε ήδη επισκεφθεί.
- Αποστάσεις (με ή χωρίς βάρη) ικανοποιούν την **τριγωνική ανισότητα**: **$d(u, v) \leq d(u, w) + d(w, v)$** , για κάθε u, v, w .
 - $d(u, v)$: μήκος **συντομότερου $u - v$ μονοπατιού** (από όλα).
 - $d(u, w) + d(w, v)$: μήκος **συντομότερου $u - v$ μονοπατιού που διέρχεται από w** .

ΣΥΝΕΚΤΙΚΟΤΗΤΑ

- (Μη-κατευθυνόμενο) γράφημα $G(V, E)$ **συνεκτικό** αν για κάθε ζευγάρι κορυφών $u, v \in V$, υπάρχει $u - v$ μονοπάτι.
 - Μη-συνεκτικό γράφημα αποτελείται από **συνεκτικές συνιστώσες**: μέγιστοτικά συνεκτικά υπογραφήματα.
 - **Γέφυρα** (ακμή τομής): ακμή που αν αφαιρεθεί, έχουμε **αύξηση** στο πλήθος των συνεκτικών συνιστωσών.
 - Ακμή γέφυρα αν δεν ανήκει σε κύκλο.
 - **Σημείο κοπής** (σημείο άρθρωσης): κορυφή που αν αφαιρεθεί, έχουμε **αύξηση** στο πλήθος των συνεκτικών συνιστωσών.



(Απλή) Άσκηση

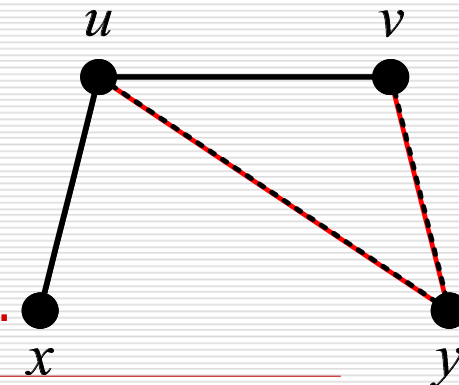
- Κάθε **απλό** γράφημα G με n κορυφές και $\delta(G) \geq (n - 1)/2$ είναι **συνεκτικό** (και έχει διάμετρο ≤ 2).
 - Έστω u, v κορυφές που **δεν** συνδέονται με ακμή. Θδο u, v έχουν κοινό γείτονα (άρα συνδέονται με μονοπάτι μήκους 2).
 - Έστω ότι u, v **δεν** έχουν καμία **γειτονική κορυφή κοινή**:
 - u έχει τουλ. $(n - 1)/2$ γείτονες, και
 - v έχει τουλ. $(n - 1)/2$ γείτονες, όλοι **διαφορετικοί**.
 - Άρα έχουμε συνολικά:
 - 2 κορυφές (οι u και v) +
 - $(n - 1)/2$ κορυφές (οι γείτονες του u) +
 - $(n - 1)/2$ κορυφές (οι γείτονες του v) =
 - ... = $n+1$ κορυφές, **άτοπο!**

(Απλή) Άσκηση

- Κάθε **απλό** γράφημα G με $n \geq 3$ **κορυφές** και $\delta(G) \geq (n+1)/2$ περιέχει τρίγωνο.
 - Έστω u, v **κορυφές** που **συνδέονται** με ακμή (υπάρχει τουλάχιστον μια ακμή στο γράφημα).
 - Θδο u, v **έχουν κοινό γείτονα** w (άρα τρίγωνο $u - w - v$).
 - Έστω ότι u, v **δεν** έχουν καμία **κοινή γειτονική κορυφή**:
 - u έχει τουλ. $(n+1)/2$ γείτονες, και
 - v έχει τουλ. $(n+1)/2$ γείτονες, όλοι **διαφορετικοί**.
 - Άρα έχουμε συνολικά:
 - 2 κορυφές (οι u και v) +
 - $(n+1)/2 - 1$ κορυφές (οι γείτονες του u εκτός της v) +
 - $(n+1)/2 - 1$ κορυφές (οι γείτονες του v εκτός της u) =
 - ... = $n+1$ κορυφές, **άτοπο!**

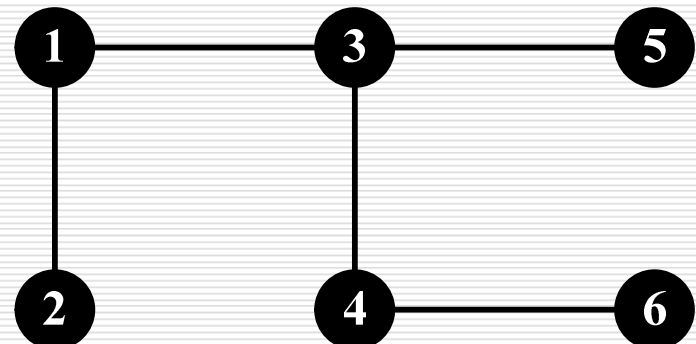
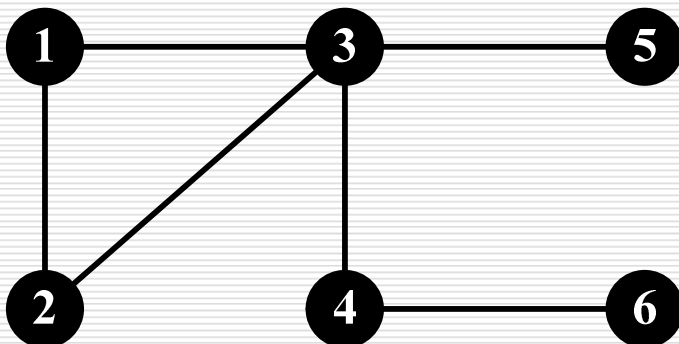
Άσκηση

- G μη συνεκτικό γράφημα. Στο συμπληρωματικό του G , κάθε ζεύγος κορυφών u, v συνδέεται μονοπάτι μήκους ≤ 2 .
 - Αν u και v σε διαφορετική συνεκτική συνιστώσα του G , συνδέονται με ακμή στο συμπληρωματικό.
 - Αν u και v σε ίδια συνεκτική συνιστώσα, έστω κορυφή w σε άλλη συνιστώσα. Στο συμπληρωματικό, υπάρχουν ακμές $\{u, w\}, \{w, v\}$.
- G γράφημα με κορυφές x, y μεταξύ των οποίων το συντομότερο μονοπάτι έχει μήκος τουλ. 4. Στο συμπληρωματικό του G , κάθε ζεύγος κορυφών u, v συνδέεται με μονοπάτι μήκους ≤ 2 .
 - Έστω u, v συνδέονται με ακμή στο G και κάποια, έστω u , συνδέεται με ακμή με κάποια από τις x, y , έστω με την x (διαφορετικά;).
 - Τότε ακμές $\{u, y\}$ και $\{v, y\}$ δεν υπάρχουν στο G . Διαφορετικά $x - y$ μονοπάτι μήκους ≤ 3 στο G .
 - Στο συμπληρωματικό, υπάρχουν ακμές $\{u, y\}, \{y, v\}$.



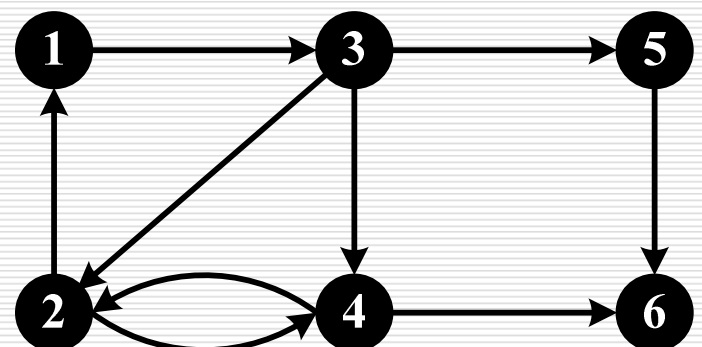
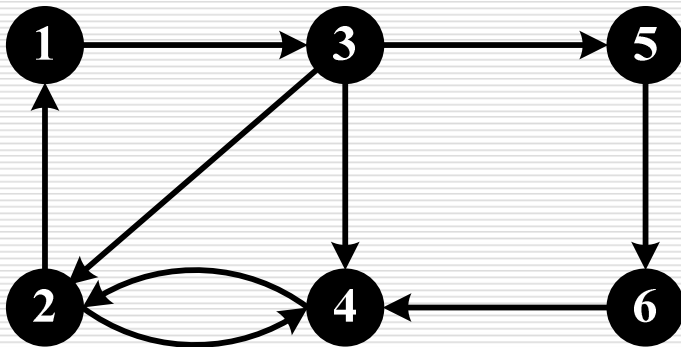
ΣΥΝΕΚΤΙΚΟΤΗΤΑ

- (Μη-κατευθυνόμενο) γράφημα $G(V, E)$ **συνεκτικό** αν για κάθε ζευγάρι κορυφών $u, v \in V$, υπάρχει $u - v$ μονοπάτι.
- Γράφημα G **συνεκτικό** αν έχει επικαλύπτον υπογράφημα που είναι δέντρο (spanning tree, **συνδετικό δέντρο**).
 - **Δέντρο**: συνεκτικό γράφημα χωρίς κύκλους.
- Γράφημα $G(V, E)$ **συνεκτικό** αν για κάθε μη κενό $S \subset V$, υπάρχει **ακμή** που συνδέει **κορυφή του S** με **κορυφή του $V \setminus S$** .



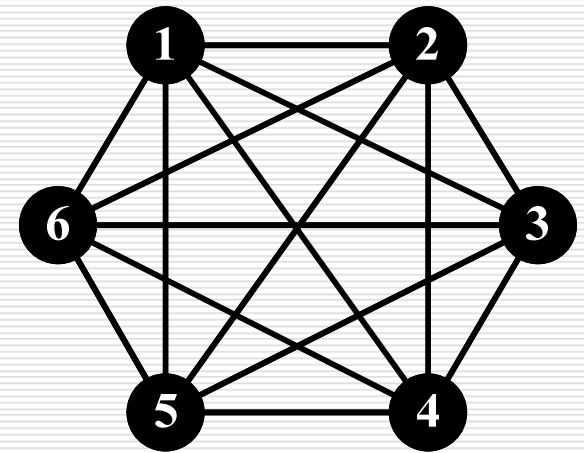
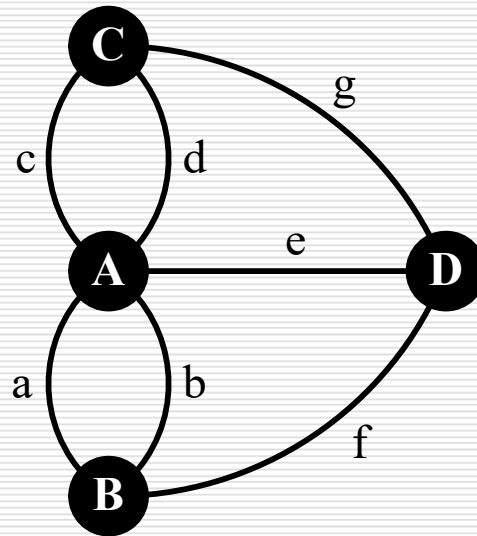
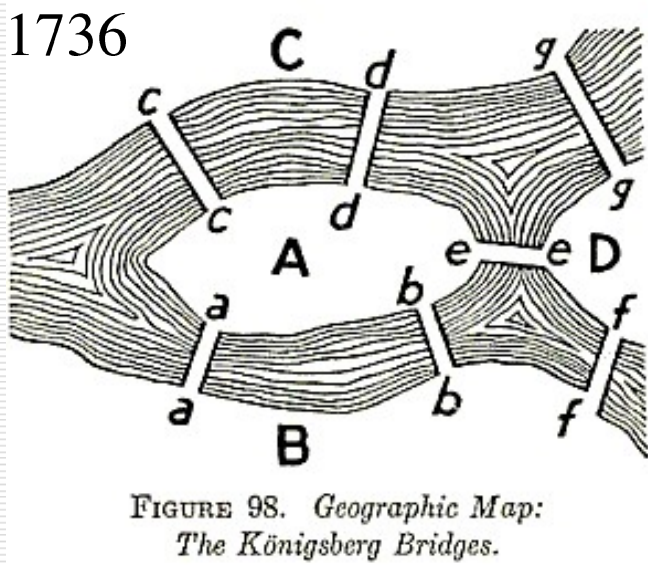
ΣΥΝΕΚΤΙΚΟΤΗΤΑ

- (Κατευθυνόμενο) γράφημα $G(V, E)$ **ισχυρά συνεκτικό** αν $\forall u, v \in V$, υπάρχουν $u - v$ και $v - u$ μονοπάτια.
 - Για κάθε ζευγάρι κορυφών ισχυρά συνεκτικού γραφήματος, υπάρχει κυκλική διαδρομή που τις περιλαμβάνει.
 - Αν ένα κατευθυνόμενο γράφημα δεν είναι ισχυρά συνεκτικό, διαμερίζεται σε **ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες**:
 - Μεγιστοτικά ισχυρά συνεκτικά υπογραφήματα.



Κύκλωμα (Κύκλος) Euler

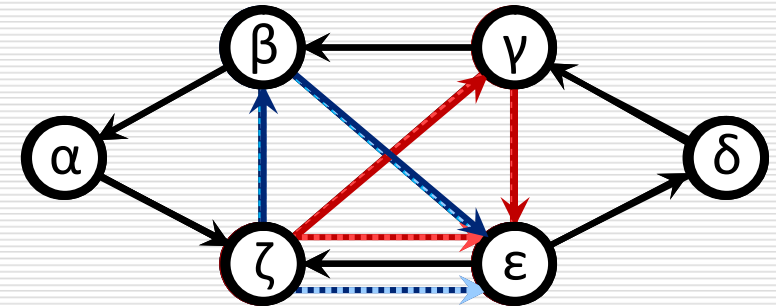
- Κλειστή μονοκονδυλιά που διέρχεται:
 - από κάθε ακμή 1 φορά, και
 - από κάθε κορυφή τουλάχιστον 1 φορά.
- Συνεκτικό (μη-κατευθ.) γράφημα έχει κύκλωμα Euler (Eulerian γράφημα) ανν όλες οι κορυφές άρτιου βαθμού.



Κύκλωμα (Κύκλος) Euler

- Συνεκτικό (μη-κατευθ.) γράφημα έχει κύκλωμα Euler ανν όλες οι **κορυφές άρτιου βαθμού**.

- Τα πλήρη γραφήματα K_n έχουν κύκλωμα Euler ανν n περιττός
- Τα πλήρη διμερή γραφήματα $K_{p,q}$ έχουν κύκλωμα Euler ανν p και q άρτιοι



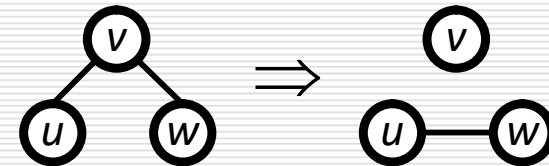
- Απόδειξη **άρτιος βαθμός \Rightarrow Eulerian** με επαγωγή σε #ακμών m .

- Κατασκευαστική απόδειξη \Rightarrow υπολογισμός του κυκλώματος Euler

- Εφαρμογή ακόλουθης πράξης:

- Έστω $u, v, w : \{u,v\} \in E(G)$ και $\{v,w\} \in E(G)$

- «Αντικατάσταση» των $\{u,v\}, \{v,w\}$ από $\{u,w\}$



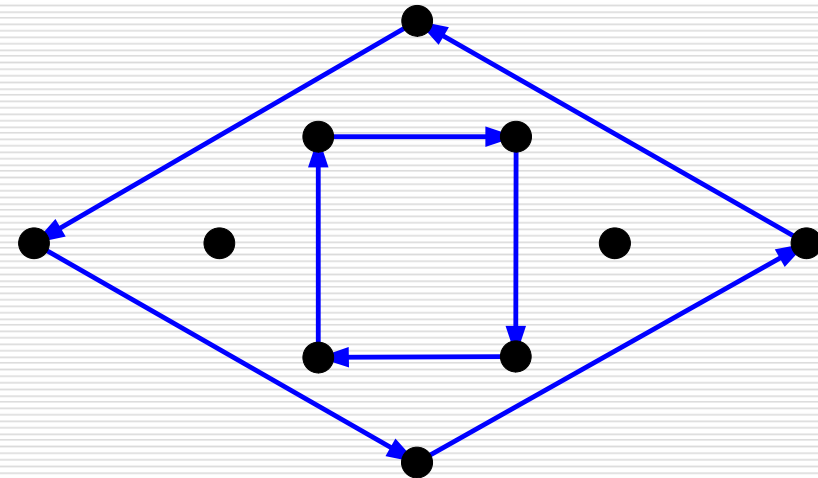
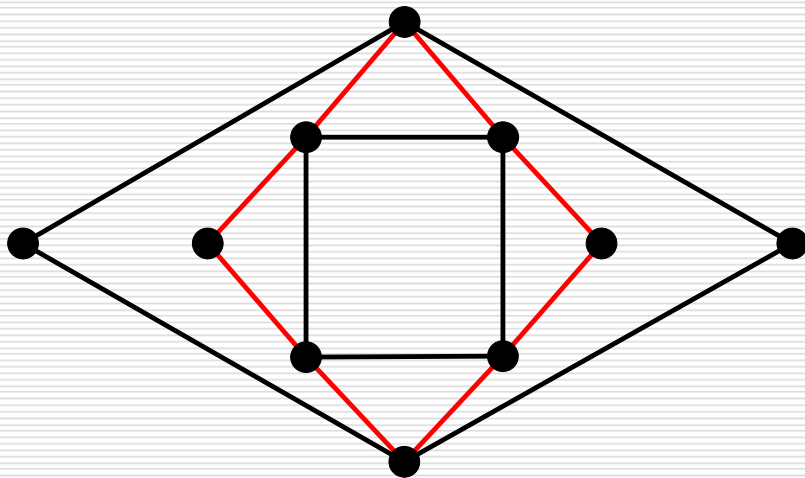
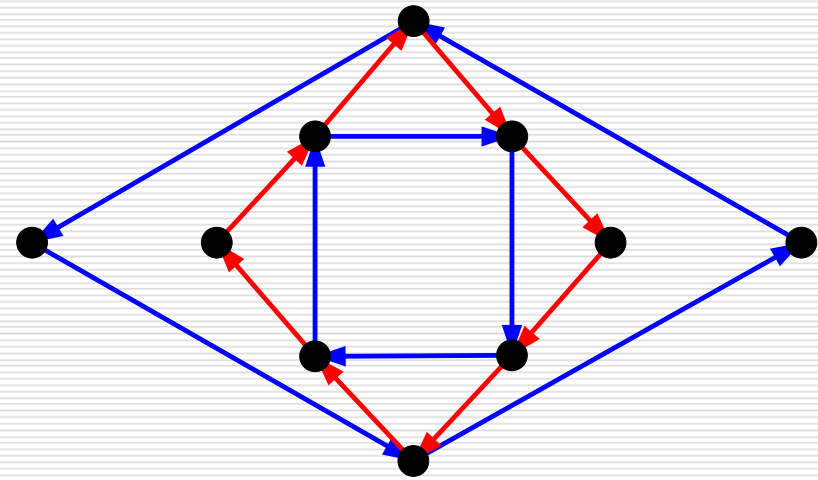
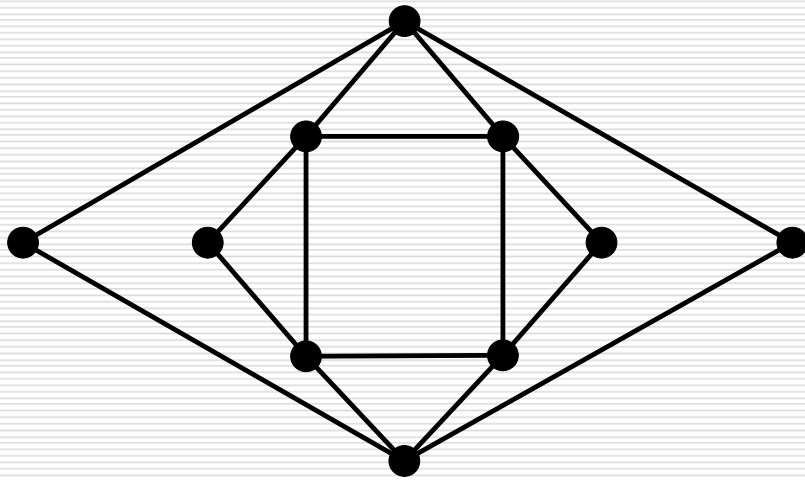
- Από κύκλωμα Euler στο νέο γράφημα κατασκευάζουμε αρχικό:

- Αντίστροφη «αντικατάσταση» της $\{u,w\}$ από $\{u,v\}, \{v,w\}$

Κύκλωμα (Κύκλος) Euler

- Συνεκτικό (μη-κατευθ.) γράφημα έχει κύκλωμα Euler ανν όλες οι **κορυφές άρτιου βαθμού**.
 - Κύκλος Euler $C \Rightarrow$ άρτιος βαθμός κορυφών: **συνεκτικότητα** (περνά από όλες τις κορυφές). C «επισκέπτεται» κορυφή v : με **νέα ακμή «φτάνει»** στη v και με **άλλη ακμή «φεύγει»** από v .
 - G **συνεκτικό** (μπορεί **όχι απλό**) και όλες οι κορυφές **άρτιου βαθμού**. Βρίσκουμε κύκλο Euler με **επαγωγή σε #ακμών**.
 - **Βάση**: ισχύει όταν γράφημα ανακύκλωση ή απλός κύκλος.
 - **Βήμα**: G έχει ακμές και άρτιος βαθμός, άρα $\delta(G) \geq 2$ και **κύκλος**.
 - «**Αφαιρούμε**» έναν οποιοδήποτε **κύκλο C** του G (διαγράφουμε τις ακμές του C και αγνοούμε όσες κορυφές μένουν απομονωμένες).
 - **Κορυφές που μένουν** (αν υπάρχουν) έχουν **άρτιο βαθμό**: κάθε **συνεκτική συνιστώσα έχει κύκλο Euler**, λόγω επαγ. υπόθεσης.
 - **Κύκλος C συνδέει επιμέρους κύκλους Euler σε κύκλο Euler για G .**

Κύκλωμα Euler: Παράδειγμα



Μονοπάτι (Ίχνος) Euler

- Μονοκονδυλιά (με διαφορετικά άκρα) που διέρχεται:
 - από κάθε ακμή 1 φορά, και
 - περιλαμβάνει κάθε κορυφή τουλάχιστον 1 φορά.
- Συνεκτικό (μη-κατευθ.) γράφημα έχει μονοπάτι Euler (semi-Eulerian γράφημα) ανν δύο κορυφές έχουν περιττό βαθμό και όλες οι υπόλοιπες άρτιο.
 - Συνεκτικό γράφημα G με κορυφές u και v περιττού βαθμού.
 - G είναι semi-Eulerian ανν $G + \{u, v\}$ είναι Eulerian.

Κύκλος Euler

- Υπάρχει γράφημα G που **όλες οι κορυφές έχουν άρτιο βαθμό και έχει γέφυρα;**
 - **Όχι**, τέτοιο γράφημα G έχει **κύκλο Euler**, άρα όλες οι ακμές του ανήκουν σε κύκλο.
- Αν σε γράφημα που **έχει κύκλο Euler προσθέσουμε ακμές**, το γράφημα που προκύπτει έχει κύκλο Euler;
 - **Όχι κατ' ανάγκη**. Μπορεί προσθήκη κορυφών να κάνει τον βαθμό κάποιων κορυφών περιττό.
- (Γιατί) σε κάθε συνεκτικό (μη κατευθ.) γράφημα, υπάρχει **κλειστή διαδρομή** που διέρχεται από **κάθε ακμή (ακριβώς) 2 φορές;**
 - «Διπλασιασμός» ακμών οδηγεί σε γράφημα με κύκλο Euler (συνεκτικό και όλες οι κορυφές έχουν άρτιο βαθμό).
 - Δείτε το **Κινέζικο Πρόβλημα του Ταχυδρόμου** (ή Route Inspection Problem).

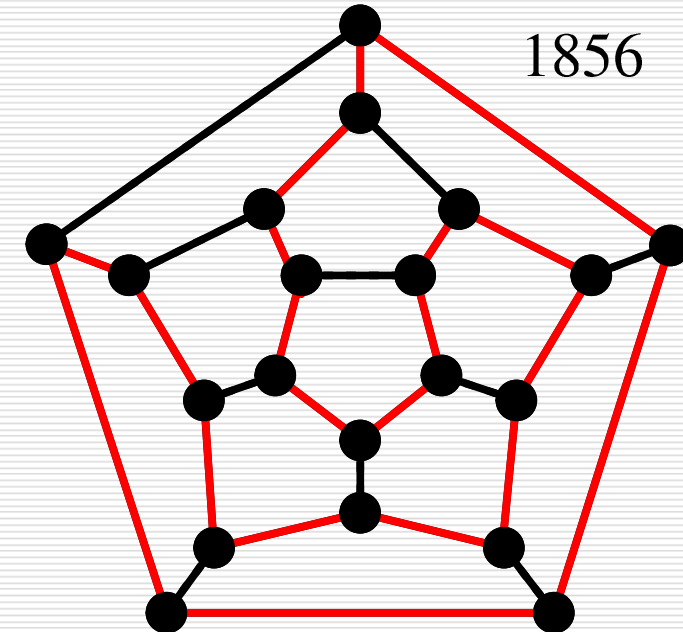
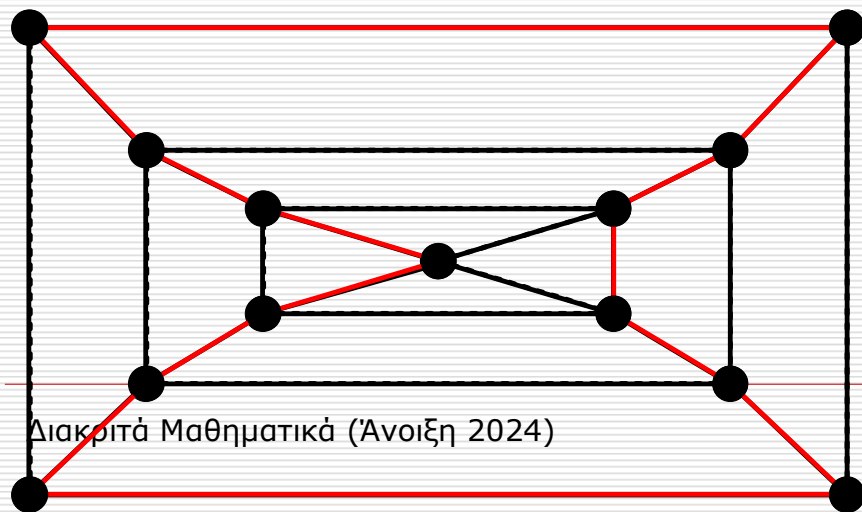
Κύκλος Euler

- Ποιος είναι ο **μέγιστος #ακμών** που μπορεί να έχει **απλό** γράφημα με n κορυφές και **κύκλο Euler**;
 - Αν n **περιττός**, $n-1$ άρτιος: K_n έχει κύκλο Euler και $n(n-1)/2$ ακμές.
 - Αν n **άρτιος**, αφαιρούμε $n/2$ ακμές (χωρίς κοινά άκρα) από K_n . Προκύπτει γράφημα με κύκλο Euler και $n(n-2)/2$ ακμές.
 - (Απλό) γράφημα με $> n(n-2)/2$ ακμές, έχει **κορυφή (περιττού) βαθμού $n-1$** .
- Κύκλος Euler σε **κατευθυνόμενα γραφήματα**:
 - **Ισχυρά συνεκτικό** γράφημα έχει κύκλο Euler ανν ...
 - ... για κάθε κορυφή v , **έσω-βαθμός(v) = έξω-βαθμός(v)**.

Κύκλος Hamilton

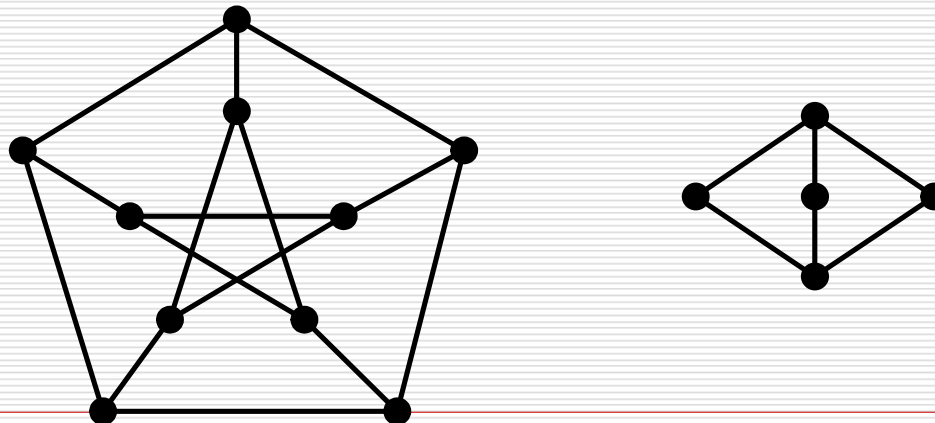


- (Απλός) κύκλος που διέρχεται από όλες τις κορυφές.
 - Διέρχεται από κάθε κορυφή 1 φορά.
 - Μπορεί να μην διέρχεται από κάποιες ακμές.
- Δεν είναι γνωστή **ικανή και αναγκαία** συνθήκη!
- **Ικανές συνθήκες** ώστε $G(V, E)$ έχει κύκλο Hamilton:
 - $\forall v \in V, \deg(v) \geq |V|/2$ (Θ. Dirac).
 - $\forall u, v \in V, \deg(u) + \deg(v) \geq |V|$ (Θ. Ore).



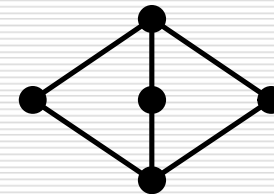
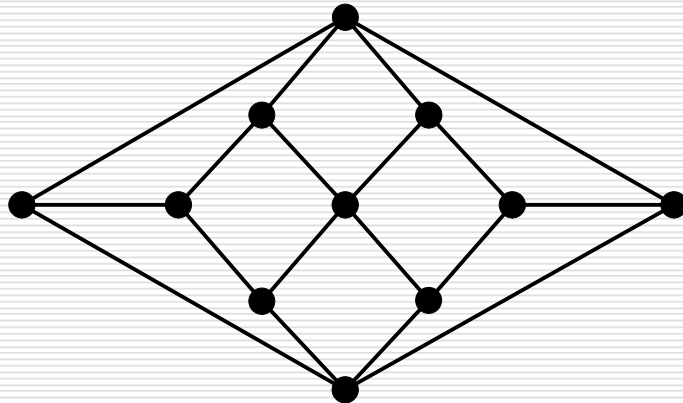
Κύκλος Hamilton

- **Αναγκαίες συνθήκες** για ύπαρξη κύκλου Hamilton σε γράφημα G :
 - G δεν έχει γέφυρα ή σημείο κοπής.
 - Αν G έχει **γέφυρα**, δεν έχει κύκλο Euler ούτε κύκλο Hamilton.
 - Κάθε κορυφή του G ανήκει σε κάποιο κύκλο.
 - Αν G διμερές, τότε η διαμέριση (μοναδική λόγω συνεκτικότητας) του G σε δύο ανεξάρτητα σύνολα X και Y πρέπει να έχει $|X| = |Y|$.
- **Μονοπάτι Hamilton**: (απλό) μονοπάτι που περιλαμβάνει όλες τις κορυφές.



Κύκλος Hamilton

- Για να δείξουμε ότι γράφημα G **έχει** κύκλο Hamilton, είτε κατασκευάζουμε **κύκλο Hamilton** (αν G έχει συγκεκριμένη δομή) είτε δείχνουμε ότι G ικανοποιεί κάποια **ικανή συνθήκη**.
 - Π.χ., **υπερκύβος** $Q(n)$ έχει κύκλο Hamilton για κάθε $n \geq 2$.
- Για να δείξουμε ότι γράφημα G **δεν έχει** κύκλο Hamilton, δείχνουμε ότι G **παραβιάζει** κάποια **αναγκαία συνθήκη**.
 - Π.χ., γιατί τα παρακάτω γραφήματα δεν έχουν κύκλο Hamilton;

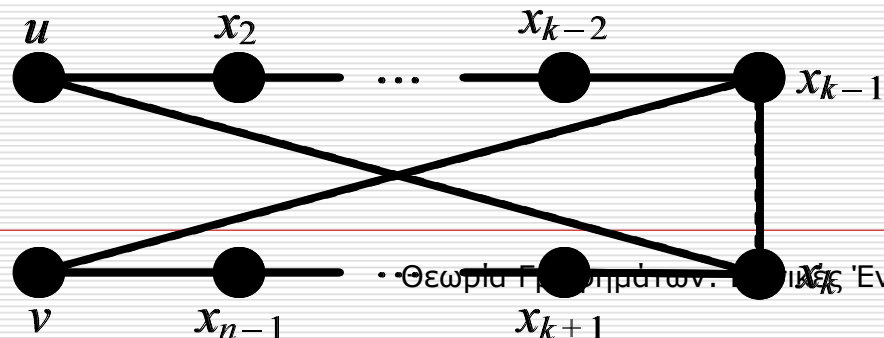


Κύκλος Hamilton

- Αν σε γράφημα που έχει κύκλο Hamilton προσθέσουμε ακμές, το γράφημα που προκύπτει έχει κύκλο Hamilton;
- Νδο κάθε απλό γράφημα με 21 κορυφές και 208 ακμές έχει κύκλο Hamilton και δεν έχει κύκλο Euler.
 - Πρόκειται για K_{21} από το οποίο έχουν αφαιρεθεί 2 ακμές.
 - Ικανοποιεί Θ . Dirac. Άρα έχει κύκλο Hamilton.
 - Όπως και αν αφαιρεθούν ακμές, προκύπτουν τουλ. 2 κορυφές με βαθμό 19. Άρα δεν έχει κύκλο Euler.

Κύκλος Hamilton

- Απλό γράφημα G με $n \geq 3$ κορυφές και u, v μη γειτονικές κορυφές με $\deg(u) + \deg(v) \geq n$. Το G έχει κύκλο Hamilton ανν το $G + \{u, v\}$ έχει κύκλο Hamilton.
 - Αν G Hamiltonian, προφανώς $G + \{u, v\}$ Hamiltonian.
 - $G + \{u, v\}$ Hamiltonian: βρίσκουμε HamCycle στο G χωρίς $\{u, v\}$.
 - G έχει μονοπάτι Hamilton $P = (u, x_2, \dots, x_k, \dots, x_{n-1}, v)$.
 - Υπάρχουν διαδοχικές κορυφές x_{k-1}, x_k στο P τ.ω. v συνδέεται με x_{k-1} και u συνδέεται με x_k .
 - Διαφορετικά: για κάθε $\{u, x_k\}$, δεν υπάρχει $\{v, x_{k-1}\}$.
 - Άρα $\deg(v) \leq (n - 1) - \deg(u)$, άτοπο.
 - Κύκλος Hamilton $C = (u, x_k, x_{k+1}, \dots, x_{n-1}, v, x_{k-1}, x_{k-2}, \dots, x_2, u)$.



Κύκλος Hamilton

- Απλό γράφημα G με $n \geq 3$ κορυφές και u, v μη γειτονικές κορυφές με $\deg(u) + \deg(v) \geq n$. Το G έχει κύκλο Hamilton ανν το $G + \{u, v\}$ έχει κύκλο Hamilton.
- Απλό γράφημα G με $n \geq 3$ κορυφές. Αν κάθε δύο μη γειτονικές κορυφές u, v έχουν $\deg(u) + \deg(v) \geq n$, G έχει κύκλο Hamilton.
 - Οποτεδήποτε μη γειτονικές κορυφές u, v έχουν $\deg(u) + \deg(v) \geq n$, τις συνδέω απευθείας.
 - Νέο γράφημα Hamiltonian ανν το αρχικό ήταν Hamiltonian.
 - Αν γίνεται για όλες τις μη γειτονικές κορυφές, καταλήγουμε σε K_n
- Απλό γράφημα G με $n \geq 3$ κορυφές. Αν κάθε κορυφή u έχει $\deg(u) \geq n/2$, G έχει κύκλο Hamilton.

Ασκήσεις

- **Τουρνουά (tournament):** πλήρες κατευθυνόμενο γράφημα.
 - Για κάθε ζευγάρι u, v , υπάρχει μία (ακριβώς) από τις ακμές (u, v) και (v, u) .
- Σε ένα **τουρνουά με $n+1$** κορυφές, έστω u κορυφή και v_1, \dots, v_n μια αρίθμηση των υπόλοιπων n κορυφών. Ισχύει τουλ. ένα από τα:
 1. Η u συνδέεται με την v_1 .
 2. Η v_n συνδέεται με την u .
 3. Υπάρχει δείκτης $k, 1 \leq k \leq n - 1$, ώστε η v_k **συνδέεται με την u** και η u **συνδέεται με την v_{k+1}** .
- Έστω ότι δεν ισχύουν τα (1) και (2). Θδο ισχύει το (3).
 - Έστω v_{k+1} η πρώτη κορυφή τ.ω. η u συνδέεται με την v_{k+1} .
 - Ισχύει ότι $k+1 \leq n$, γιατί η u συνδέεται με την v_n (δεν ισχύει το (2)).
 - Ισχύει ότι $2 \leq k+1$, γιατί η v_1 συνδέεται με την u (δεν ισχύει το (1)).
 - Ισχύει ότι v_k **συνδέεται με την u** , γιατί v_{k+1} η πρώτη που δεν συνδέεται με u .

Ασκήσεις

- Κάθε τουρνουά με $n \geq 1$ κορυφές έχει **μονοπάτι Hamilton**.
 - Επαγωγή με **χρήση προηγούμενου** στο επαγωγικό βήμα.
 - **Βάση**: Ισχύει τετριμμένα για τουρνουά με 1 κορυφή.
 - **Επαγ. υπόθεση**: Κάθε τουρνουά με $n \geq 1$ κορυφές έχει **μον. Hamilton**.
 - **Επαγ. βήμα**: Θδο αυθαίρετο τουρνουά $G(V, E)$ με $n+1$ κορυφές έχει **μονοπάτι Hamilton**.
 - Έστω G' τουρνουά που προκύπτει **από G με αφαίρεση κορυφής u** .
 - Θεωρούμε αρίθμηση v_1, \dots, v_n των n κορυφών του G' σύμφωνα με **μονοπάτι Hamilton στο G'** (υπάρχει λόγω επαγ. υπόθεσης).
 - u **ενσωματώνεται στο μονοπάτι Hamilton v_1, \dots, v_n με βάση το προηγούμενο**.