

Στοιχεία Προτασιακής Λογικής

Διδάσκοντες: **Δ. Φωτάκης, Δ. Σούλιου**
Επιμέλεια διαφανειών: **Δ. Φωτάκης**

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και Μηχανικών Υπολογιστών

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο



Μαθηματικές Προτάσεις

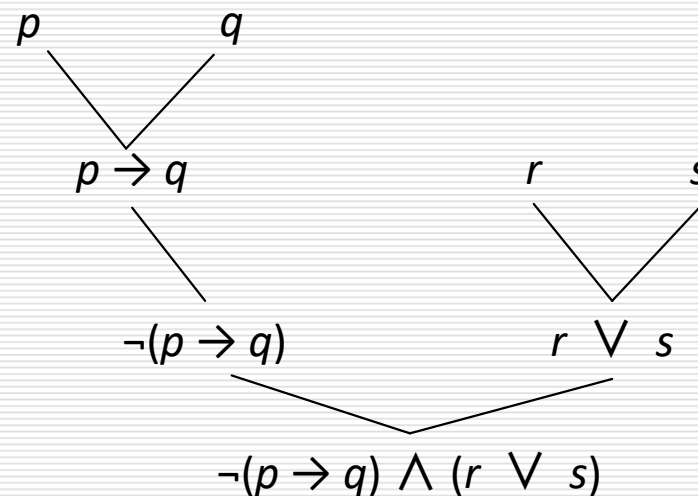
- (Μαθηματική) **πρόταση**: δήλωση που μπορεί να είναι **αληθής** ή **ψευδής** (όχι και τα δύο).
 - Το όνομά μου είναι Δημήτρης.
 - Χθες χιόνισε στην Καστοριά.
 - Ο Σεφέρης τιμήθηκε με το Νόμπελ Λογοτεχνίας.
 - Σήμερα είναι η πρώτη μέρα της άνοιξης.
- Άλλα όχι:
 - Τι ώρα είναι;
 - Κάνετε ησυχία παρακαλώ.
 - Σχεδόν κάθε μέρα βρέχει (χωρίς το σχεδόν;)

Προτασιακή Λογική

- Προτάσεις συνδυάζονται **λογικά**: σύνθετες προτάσεις.
 - Αν χιονίσει, θα πάω για σκι ή θα παίξω χιονοπόλεμο.
 - Ο Δ είναι καλός ή ο Δ δεν είναι καλός.
 - Θα κάνω μάθημα στις 9 και θα παίξω μπάσκετ στις 10.
- Στοιχειώδεις προτάσεις: **προτασιακές μεταβλητές** p, q, r .
 - Βασικά δομικά στοιχεία. Διακριτές τιμές A ή Ψ (1 ή 0).
- Συνδυασμοί προτάσεων με **(λογικούς) συνδέσμους**:
 $\neg, \wedge, \vee, \oplus, \rightarrow, \leftrightarrow$.
- **Προτασιακός τύπος**:
 - Είτε προτασιακή μεταβλητή p, q, r, \dots
 - Είτε $(\neg\phi), (\phi \wedge \psi), (\phi \vee \psi), (\phi \oplus \psi), (\phi \rightarrow \psi), (\phi \leftrightarrow \psi)$, όπου ϕ, ψ ήδη σχηματισμένοι προτασιακοί τύποι.
- Δομή π.τ. αποτυπώνεται σε **δενδροδιάγραμμα**.

Δενδροδιαγράμματα

- Η δομή ενός προτασιακού τύπου μπορεί να απεικονιστεί με τη βοήθεια ενός **δενδροδιαγράμματος**.
- **Παράδειγμα:** Ο προτασιακός τύπος $\neg(p \rightarrow q) \wedge (r \vee s)$ μπορεί να παρασταθεί με το δενδροδιάγραμμα:



Σημασιολογική Προσέγγιση

- Λογικοί σύνδεσμοι ορίζονται με **πίνακες αλήθειας**.
- **Αποτίμηση**: ανάθεση τιμών αλήθειας στις μεταβλητές ενός π.τ.
 - Από τιμές αλήθειας μεταβλητών, δενδροδιάγραμμα, και **πίνακες αλήθειας** λογικών συνδέσμων, **υπολογίζουμε τιμή αλήθειας π.τ.**

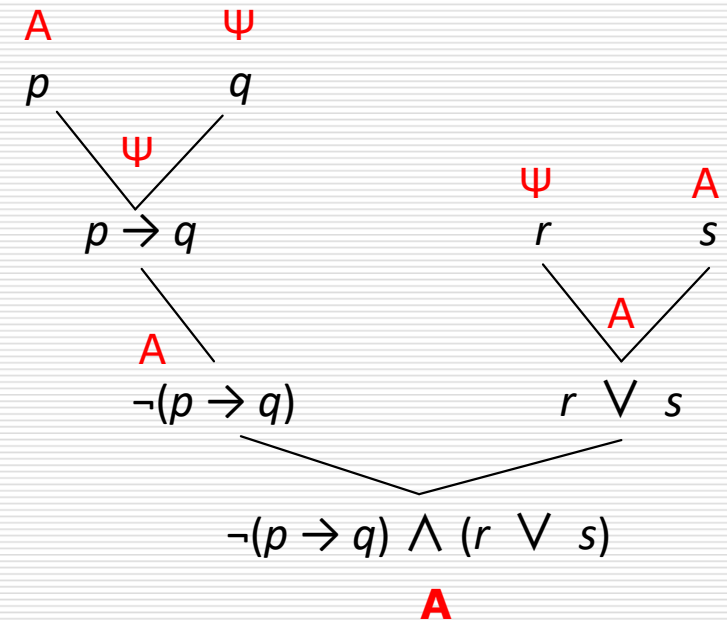
| p | q | $\neg p$ | $p \wedge q$ | $p \vee q$ | $p \rightarrow q$ | $p \leftrightarrow q$ | $p \oplus q$ |
|-----|-----|----------|--------------|------------|-------------------|-----------------------|--------------|
| A | A | Ψ | A | A | A | A | Ψ |
| A | Ψ | Ψ | Ψ | A | Ψ | Ψ | A |
| Ψ | A | A | Ψ | A | A | Ψ | A |
| Ψ | Ψ | A | Ψ | Ψ | A | A | Ψ |

Σημασιολογική Προσέγγιση

□ Αποτίμηση της τιμής αληθείας ενός τύπου εφαρμόζεται σταδιακά στο δενδροδιάγραμμα:

- Ξεκινάμε από προτασιακές μεταβλητές
- Προχωράμε στο επόμενο επίπεδο με πίνακα αληθείας.

■ **Παράδειγμα.** Έστω
 $a(p) = a(s) = A$
και $a(q) = a(r) = \Psi$.
Για $\neg(p \rightarrow q) \wedge (r \vee s)$
έχουμε:



Σημασιολογική Προσέγγιση

- Ταυτολογική ισοδυναμία $\varphi \equiv \psi$
 - Για κάθε αποτίμηση, φ και ψ έχουν ίδια τιμή αλήθειας.
 - Π.χ. $(p \wedge q) \rightarrow r \equiv p \rightarrow (q \rightarrow r)$
- Ταυτολογία φ : φ πάντα Α (για κάθε αποτίμηση).
 - Αντίφαση φ : φ πάντα Ψ (για κάθε αποτίμηση).
 - Αντίφαση φ ανν $\neg\varphi$ ταυτολογία.
- Ικανοποιήσιμος φ : φ δεν είναι αντίφαση.
 - $T = \{\varphi_1, \dots, \varphi_k\}$ ικανοποιήσιμο: $\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_k$ ικανοποιήσιμος.
 - Υπάρχει αποτίμηση που ικανοποιεί (ταυτόχρονα) όλους τους τύπους του T .

Παραδείγματα

- Νδο $\varphi \equiv ((p \wedge q) \rightarrow r) \rightarrow ((p \vee q) \rightarrow r)$
ούτε αντίφαση (άρα ικανοποιήσιμος) ούτε ταυτολογία.
 - **Ικανοποιήσιμος φ :** $p = q = r = A$ ή $p = q = A$ και $r = \Psi$.
 - **Όχι ταυτολογία φ :** $r = \Psi$ και είτε $p = A, q = \Psi$ είτε $p = \Psi, q = A$.

| p | q | r | $p \wedge q$ | $p \vee q$ | $(p \wedge q) \rightarrow r$ | $(p \vee q) \rightarrow r$ | φ |
|--------|--------|--------|--------------|------------|------------------------------|----------------------------|-----------|
| A | A | A | A | A | A | A | A |
| A | A | Ψ | A | A | Ψ | Ψ | A |
| A | Ψ | A | Ψ | A | A | A | A |
| A | Ψ | Ψ | Ψ | A | A | Ψ | Ψ |
| Ψ | A | A | Ψ | A | A | A | A |
| Ψ | A | Ψ | Ψ | A | A | Ψ | Ψ |
| Ψ | Ψ | A | Ψ | Ψ | A | A | A |
| Ψ | Ψ | Ψ | Ψ | Ψ | A | A | A |

Παραδείγματα

□ Νδο $\psi \equiv ((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p$ ταυτολογία.

■ Αν $p = \mathbf{A}$, τότε \mathbf{A}
(αληθές συμπέρασμα).

■ Αν $p = \Psi$, τότε \mathbf{A}
(ψευδής υπόθεση).

| p | q | $p \rightarrow q$ | $(p \rightarrow q) \rightarrow p$ | $((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p$ |
|--------------|--------------|-------------------|-----------------------------------|---|
| \mathbf{A} | \mathbf{A} | \mathbf{A} | \mathbf{A} | \mathbf{A} |
| \mathbf{A} | Ψ | Ψ | \mathbf{A} | \mathbf{A} |
| Ψ | \mathbf{A} | \mathbf{A} | Ψ | \mathbf{A} |
| Ψ | Ψ | \mathbf{A} | Ψ | \mathbf{A} |

□ Νδο $p \wedge (p \rightarrow q) \rightarrow q$ ταυτολογία.

■ Κάθε π.τ. με ίδια συντακτική μορφή $\varphi \wedge (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \psi$
(για κάθε φ, ψ) είναι ταυτολογία!

Ταυτολογική Συνεπαγωγή

- Σύνολο π.τ. T **συνεπάγεται ταυτολογικά** π.τ. φ , $T \models \varphi$:
 - Κάθε αποτίμηση που ικανοποιεί το T ικανοποιεί και τον φ . (φ έπεται αναγκαία από υποθέσεις στο T).
 - $T \models \varphi$ ανν $T \cup \{\neg\varphi\}$ **μη** ικανοποιήσιμο.
 - $\emptyset \models \varphi$ (ή απλά $\models \varphi$) δηλώνει ότι φ ταυτολογία.
 - Αν T μη ικανοποιήσιμο, τότε $T \models \varphi$ για κάθε π.τ. φ !

Παραδείγματα

- Έστω σύνολο π.τ. $T = \{p_1 \vee \neg p_2, p_1 \wedge p_2, p_1 \vee p_3\}$
Ποιές από τις παρακάτω αληθεύουν;

$$T \models \neg p_1 \rightarrow (p_1 \wedge p_2)$$

$$T \models (p_2 \vee p_3) \rightarrow (p_1 \wedge p_3)$$

$$T \models (p_1 \wedge p_2) \rightarrow p_3$$

$$T \models (p_1 \vee p_2) \rightarrow (\neg p_1 \rightarrow \neg p_3)$$

Παραδείγματα

- Ποιές ταυτολογικές συνεπαγωγές αληθεύουν:

$$\begin{array}{ll} \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi) \models (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \varphi & \Psi \\ (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \varphi \models \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi) & \Lambda \\ \neg(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)) \models \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi) & \Lambda \\ \neg(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)) \models (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \varphi & \Lambda \\ (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \varphi \models \neg(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)) & \Psi \\ \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi) \models \neg(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)) & \Psi \\ \neg(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)) \models \varphi \wedge \neg\varphi & \Lambda \end{array}$$

- Παρατηρήσεις για ταυτολογικές συνεπαγωγές:

- μη ικανοποιήσιμο \models οτιδήποτε
- οτιδήποτε \models ταυτολογία
- ταυτολογία \models μόνο ταυτολογία
- μόνο μη ικανοποιήσιμο \models αντίφαση

Ιδιότητες Λογικών Συνδέσμων (I)

| | |
|------------------------------|--|
| Αντιμεταθετική | $p \wedge q \equiv q \wedge p$ $p \vee q \equiv q \vee p$ |
| Προσεταιριστική | $p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$ $p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$ |
| Επιμεριστική | $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ |
| Διπλή άρνηση | $\neg \neg p \equiv p$ |
| Αντικατάσταση συνεπαγωγής | $p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$ |

Ιδιότητες Λογικών Συνδέσμων (II)

| | |
|--------------------|--|
| Αποκλεισμός τρίτου | $p \vee \neg p \equiv A$ |
| Αντιθετοαναστροφή | $p \rightarrow q \equiv \neg q \rightarrow \neg p$ |
| Εξαγωγή | $p \wedge q \rightarrow r \equiv p \rightarrow (q \rightarrow r)$ |
| De Morgan | $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$ $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$ |
| Άρνηση συνεπαγωγής | $\neg(p \rightarrow q) \equiv p \wedge \neg q$ |

Παράδειγμα

- Απλοποίηση προτασιακού τύπου:

$$((\varphi \wedge \neg\psi) \vee (\neg\varphi \wedge \psi)) \vee (\neg\varphi \wedge \neg\psi)$$

$$\dots \equiv (\varphi \wedge \neg\psi) \vee ((\neg\varphi \wedge \psi) \vee (\neg\varphi \wedge \neg\psi))$$

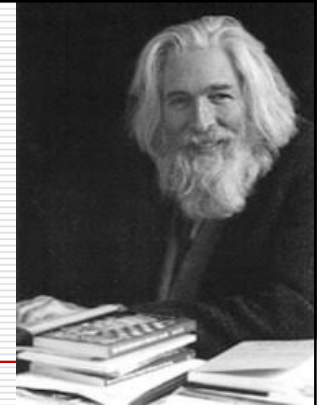
$$\equiv (\varphi \wedge \neg\psi) \vee ((\neg\varphi \wedge (\psi \vee \neg\psi)))$$

$$\equiv (\varphi \wedge \neg\psi) \vee \neg\varphi$$

$$\equiv (\varphi \vee \neg\varphi) \wedge (\neg\psi \vee \neg\varphi)$$

$$\equiv \neg\psi \vee \neg\varphi$$

$$\equiv \neg(\psi \wedge \varphi)$$



Παράδειγμα

- Υποπτος δηλώνει: «Λέω την αλήθεια ανν είμαι ένοχος».
 - Γνωρίζουμε ότι είτε λέει πάντα αλήθεια είτε πάντα ψέματα.
 - Μπορούμε να αποφανθούμε αν είναι ένοχος;

□ $p \equiv$ «λέει αλήθεια»

$q \equiv$ «είναι ένοχος»

- Δήλωση: $p \leftrightarrow q$.
- Πρέπει να αληθεύει ότι:
 $p \leftrightarrow (p \leftrightarrow q)$

| p | q | $p \leftrightarrow q$ | $p \leftrightarrow (p \leftrightarrow q)$ |
|-----|-----|-----------------------|---|
| A | A | A | A |
| A | Ψ | Ψ | Ψ |
| Ψ | A | Ψ | A |
| Ψ | Ψ | A | Ψ |

Παράδειγμα

- Ο κόσμος χωρίζεται σε ευγενείς και απατεώνες.
 - Ευγενείς: πάντα αλήθεια. Απατεώνες: πάντα ψέματα.
- Κάποιος δηλώνει:
«Αν είμαι ευγενής, τότε η σύζυγός μου είναι ευγενής».
 - Είναι ευγενής; Η σύζυγός του;
- $p \equiv$ «άνδρας ευγενής»
 \equiv «άνδρας λέει αλήθεια»
 $q \equiv$ «σύζυγος ευγενής»
 - Δήλωση: $p \rightarrow q$.
 - Πρέπει να αληθεύει ότι:
 $p \leftrightarrow (p \rightarrow q)$

| p | q | $p \rightarrow q$ | $p \leftrightarrow (p \rightarrow q)$ |
|-----|-----|-------------------|---------------------------------------|
| A | A | A | A |
| A | Ψ | Ψ | Ψ |
| Ψ | A | A | Ψ |
| Ψ | Ψ | A | Ψ |

Παραδείγματα

- Συναντάμε 3 ανθρώπους, Α, Β, Γ, και ρωτάμε τον Α αν είναι ευγενής:
 - Ο Α λέει κάτι, αλλά δεν τον ακούμε.
 - Ο Β πετάγεται και λέει: «Ο Α είπε ότι είναι απατεώνας».
 - Ο Γ λέει: «Μην τον πιστεύεις, ο Β είναι ψεύτης!».
- Είναι οι δηλώσεις: «το καλό φαγητό δεν είναι φθηνό» και «το φθηνό φαγητό δεν είναι καλό» ισοδύναμες;
 - Ισοδυναμία $k \rightarrow \neg\varphi$ και $\varphi \rightarrow \neg k$;
- Είναι το «αυτή η πρόταση είναι ψευδής» **μαθ.** πρόταση;
 - Μπορεί να είναι αληθής; Ψευδής;

Μαθηματική Λογική

- Αντικείμενο: θεμελίωση των μαθηματικών.
 - Πότε μια πρόταση ισχύει / μια απόδειξη είναι σωστή;
 - **Σημασιολογικά**: συμπέρασμα έπεται αναγκαία από υποθέσεις.
 - Ενδιαφέρει αλλά δεν ελέγχεται (αποδοτικά).
 - **Συντακτικά**: όταν στην **αποδεικτική διαδικασία εφαρμόζουμε** σωστά συγκεκριμένους **κανόνες** (συντακτικής φύσης).
 - Διατύπωση με νοημοσύνη – «μηχανιστικός» έλεγχος.
 - Ζητούμενο **ισοδυναμία**: σωστές «συντακτικά» **αποδείξεις** θεμελιώνουν (**όλες και μόνο τις**) «σημασιολογικά» σωστές **προτάσεις**.
 - Εγκυρότητα – Πληρότητα.

Συντακτική Προσέγγιση – Προτασιακός Λογισμός

- Αξιωματικό Σύστημα (όχι μοναδικό):
 - ΑΣ1: $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$
 - ΑΣ2: $(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$
 - ΑΣ3: $(\neg\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow ((\neg\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \varphi)$
- Αποδεικτικός κανόνας Modus Ponens:
$$\frac{\varphi, \varphi \rightarrow \psi}{\psi}$$
- Ξεκινώντας από **αξιώματα** (ή υποθέσεις, ή τυπικά θεωρήματα), και **μόνο** με συντακτική αντικατάσταση και **MP**, αποδεικνύουμε **τυπικά θεωρήματα**.
 - $\vdash \varphi$: φ είναι τυπικό θεώρημα.
 - $T \vdash \varphi$: φ αποδεικνύεται τυπικά από υποθέσεις T .

$$\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$$

$$(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$$

$$(\neg\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow ((\neg\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \varphi)$$

Τυπικές Αποδείξεις

□ Τυπική απόδειξη για $\vdash \varphi \rightarrow \varphi$

1. $(\varphi \rightarrow ((\varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi)) \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi))$

AΣ2 με (φ, φ) , $(\psi, \varphi \rightarrow \varphi)$, και (χ, φ)

2. $\varphi \rightarrow ((\varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi)$

AΣ1 με (φ, φ) , $(\psi, \varphi \rightarrow \varphi)$

3. $(\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi)) \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi)$

1, 2, MP

4. $\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi)$

AΣ1 με (φ, φ) , (ψ, φ)

5. $\varphi \rightarrow \varphi$

3, 4, MP

$$\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$$

$$(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$$

$$(\neg\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow ((\neg\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \varphi)$$

Τυπικές Απόδειξεις

□ Τυπική απόδειξη για $\neg\varphi \vdash (\neg\psi \rightarrow \varphi) \rightarrow \psi$

1. $(\neg\psi \rightarrow \neg\varphi) \rightarrow ((\neg\psi \rightarrow \varphi) \rightarrow \psi)$ ΑΣ3 με (φ, ψ) και (ψ, φ)

2. $\neg\varphi \rightarrow (\neg\psi \rightarrow \neg\varphi)$ ΑΣ1 με $(\varphi, \neg\varphi)$ και $(\psi, \neg\psi)$

3. $\neg\varphi$ Υπόθεση

4. $\neg\psi \rightarrow \neg\varphi$ 2, 3, MP

5. $(\neg\psi \rightarrow \varphi) \rightarrow \psi$ 1, 4, MP

■ Ποια από τα παρακάτω προκύπτουν **άμεσα** από αξιώματα;

■ $\varphi \rightarrow \varphi$

■ $\chi \rightarrow (\chi \rightarrow \chi)$

■ $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)$

■ $(\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \neg\varphi)$

$$\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$$

$$(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$$

$$(\neg\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow ((\neg\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \varphi)$$

Τυπικές Αποδείξεις

□ Είναι σωστή τυπική απόδειξη για $\psi \mid - (\neg\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow \varphi$

1. ψ

Υπόθεση

2. $\psi \rightarrow (\neg\varphi \rightarrow \psi)$

ΑΣ1 με (φ, ψ) και $(\psi, \neg\varphi)$

3. $\neg\varphi \rightarrow \psi$

2, 1, MP

4. $(\neg\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\neg\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow \varphi)$

ΑΣ3 με (φ, φ) και $(\psi, \neg\psi)$

5. $(\neg\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow \varphi$

4, 3, MP

■ Το βήμα 4 είναι **λάθος!!!**

$$\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$$

$$(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$$

$$(\neg\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow ((\neg\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \varphi)$$

Τυπικές Αποδείξεις

□ Σωστή τυπική απόδειξη για $\neg\neg\psi \vdash (\neg\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow \varphi$

1. $\neg\neg\psi$

Υπόθεση

2. $\neg\neg\psi \rightarrow (\neg\varphi \rightarrow \neg\neg\psi)$

ΑΣ1 με $(\varphi, \neg\neg\psi)$ και $(\psi, \neg\varphi)$

3. $\neg\varphi \rightarrow \neg\neg\psi$

2, 1, MP

4. $(\neg\varphi \rightarrow \neg\neg\psi) \rightarrow ((\neg\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow \varphi)$

ΑΣ3 με (φ, φ) και $(\psi, \neg\psi)$

5. $(\neg\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow \varphi$

4, 3, MP

■ Με χρήση του $\vdash \psi \rightarrow \neg\neg\psi$ μπορούμε να αποδείξουμε και ότι $\psi \vdash (\neg\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow \varphi$

Τυπικές Αποδείξεις

- Θεώρημα Απαγωγής: $T \cup \{\varphi\} \vdash \psi \Leftrightarrow T \vdash \varphi \rightarrow \psi$
- Θ. Αντιθετοαναστροφής: $T \cup \{\varphi\} \vdash \neg\psi \Leftrightarrow T \cup \{\psi\} \vdash \neg\varphi$
 - Τυπική απόδειξη για $\vdash \varphi \rightarrow \neg\neg\varphi$
$$\vdash \varphi \rightarrow \neg\neg\varphi \stackrel{\Theta.\text{Απαγ.}}{\Leftrightarrow} \varphi \vdash \neg\neg\varphi \stackrel{\Theta.\text{Αν/φης}}{\Leftrightarrow} \neg\varphi \vdash \neg\varphi$$
- Θ. Απαγωγής σε Άτοπο: **Αν** $T \cup \{\varphi\}$ **αντιφατικό**, $T \vdash \neg\varphi$
- Για νδο $\vdash (\varphi \rightarrow \chi) \rightarrow ((\varphi \rightarrow (\chi \rightarrow \psi)) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)) \dots$
 - ... αρκεί νδο $\{\varphi \rightarrow \chi, \varphi \rightarrow (\chi \rightarrow \psi), \varphi\} \vdash \psi$.
 1. φ Υπόθεση
 2. $\varphi \rightarrow (\chi \rightarrow \psi)$ Υπόθεση
 3. $\chi \rightarrow \psi$ 2, 1, MP
 4. $\varphi \rightarrow \chi$ Υπόθεση
 5. χ 4, 1 MP
 6. ψ 3, 5, MP

Συντακτική vs Σημασιολογική Προσέγγιση

Σημασιολογική Προσέγγιση

- ταυτολογία: $\models \varphi$
- ταυτολ. συνεπαγωγή $T \models \varphi$
- **ικανοποιήσιμο** T
- μη ικανοποιήσιμο T
- αν T μη ικανοποιήσιμο,
τότε $T \models \varphi$, για κάθε φ .

□ Εγκυρότητα: $\forall T, \forall \varphi, T \vdash \varphi \Rightarrow T \models \varphi$

□ Πληρότητα: $\forall T, \forall \varphi, T \models \varphi \Rightarrow T \vdash \varphi$

Συντακτική Προσέγγιση

- τυπικό θεώρημα: $\vdash \varphi$
- απόδειξη με υποθέσεις $T \vdash \varphi$
- **συνεπές** T : $\nexists \varphi (T \vdash \varphi \text{ και } T \vdash \neg \varphi)$
- **αντιφατικό** T : $\exists \varphi (T \vdash \varphi \text{ και } T \vdash \neg \varphi)$
 $\forall \varphi T \vdash \varphi$
- αν T αντιφατικό,
τότε $T \vdash \varphi$, για κάθε φ .