Συντομότερες Διαδρομές

Διδάσκοντες: **Αρ. Παγουρτζής, Δ. Φωτάκης, Δ. Σούλιου, Παν. Γροντάς**

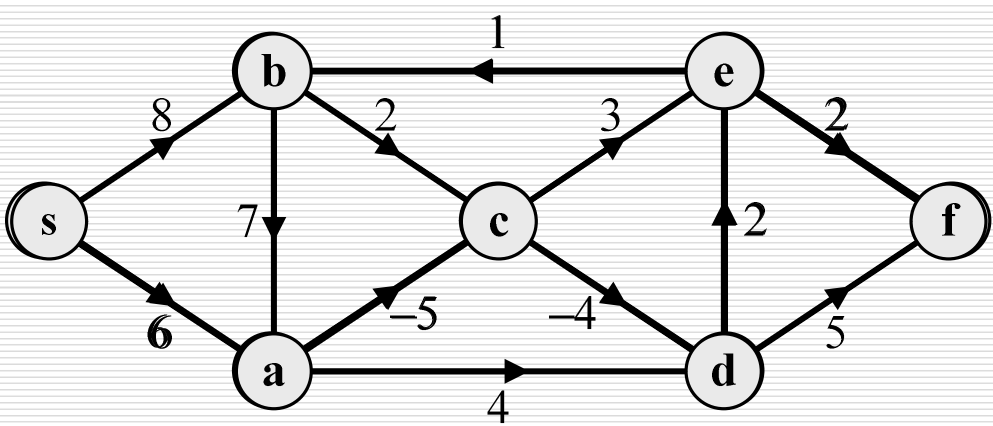
Επιμέλεια διαφανειών: **Δ. Φωτάκης**

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και Μηχανικών Υπολογιστών

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

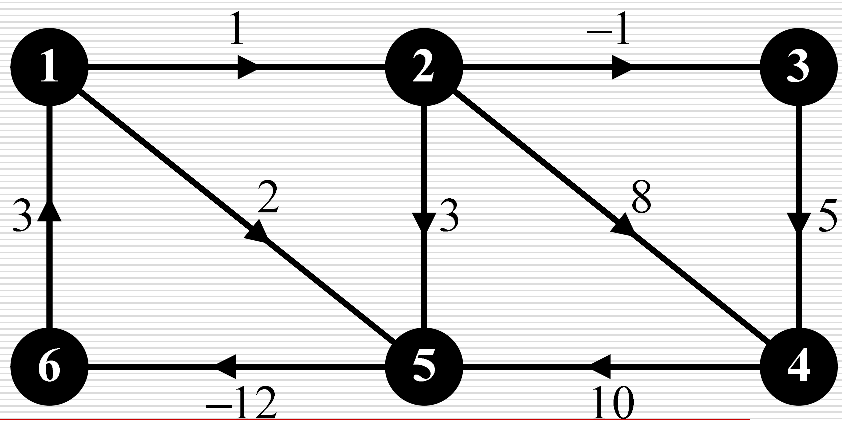
Συντομότερη Διαδρομή

- Κατευθυνόμενο G(V, E, w) με μήκη $w : E \mapsto \mathbb{R}$
  - Μήκος διαδρομής $p = (v_0, v_1, \ldots, v_k) : w(p) = \sum_{i=1}^{k} w(v_{i-1}, v_i)$
  - Απόσταση d(u, v): μήκος συντομότερης u – v διαδρομής.
  - Αν δεν υπάρχει u – v διαδρομή, d(u, v) = ∞.
- Ζητούμενο: αποστάσεις και συντομότερες διαδρομές από **αρχική κορυφή** s προς όλες τις κορυφές.
  - Θεμελιώδες πρόβλημα συνδυαστικής βελτιστοποίησης.



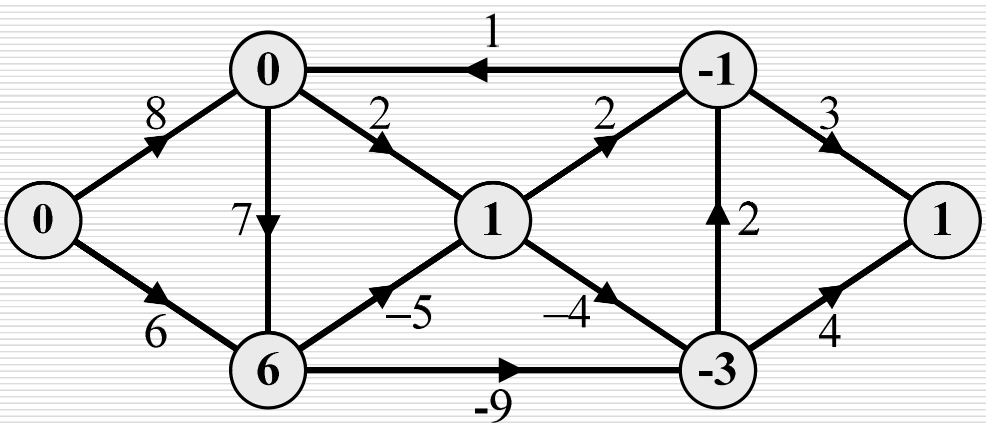
Κύκλοι Αρνητικού Μήκους

- Διαδρομή: ακολ. κορυφών όπου διαδοχικές συνδέονται με ακμή.
- Μονοκονδυλιά: διαδρομή χωρίς επαναλαμβανόμενες ακμές.
- (Απλό) μονοπάτι: διαδρομή χωρίς επαναλαμβανόμενες κορυφές.
  - Υπάρχει διαδρομή u – v ανν υπάρχει μονοπάτι u – v.
- Συντομότερη διαδρομή είναι **μονοπάτι** εκτός αν...
  - Υπάρχει κύκλος αρνητικού μήκους!
  - Αποστάσεις δεν ορίζονται γιατί συνολικό μήκος διαδρομής μπορεί να μειώνεται επ’ άπειρο!
  - Κύκλος αρνητικού μήκους σε κάποια u – v διαδρομή $\Rightarrow d(u, v) = -\infty$.



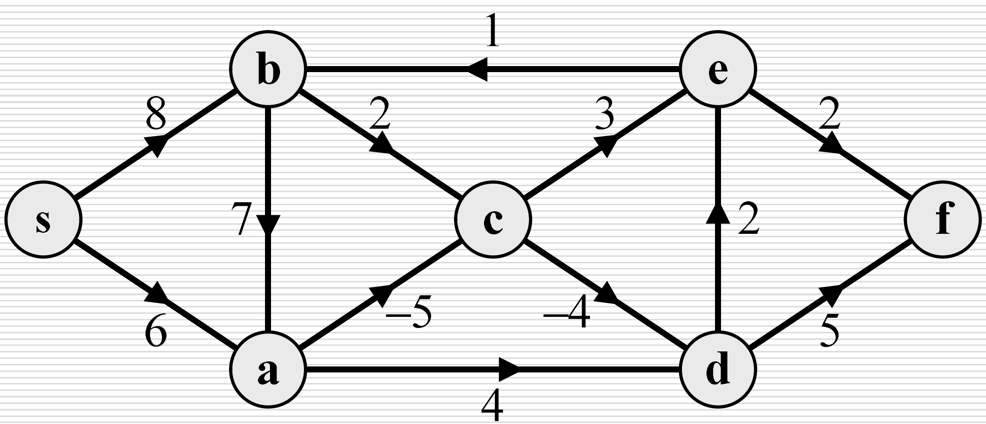
Συντομότερα Μονοπάτια

- Αν $p = (v_0, v_1, \ldots, v_k)$ είναι συντομότερο μονοπάτι, κάθε $v_i - v_j$ τμήμα του αποτελεί συντομότερο $v_i - v_j$ μονοπάτι.
  - Αρχή **βελτιστότητας**.
- Συντομότερα μονοπάτια από s προς όλες τις κορυφές: Δέντρο Συντομότερων Μονοπατιών (SPT, ΔΣΜ).
  - Αν συντομότερα $s - v_1$ και $s - v_2$ μονοπάτια έχουν κοινή κορυφή u, χρησιμοποιούν (ίδιο) συντομότερο s – u μονοπάτι.
  - ΔΣΜ αναπαρίσταται με **πίνακα γονέων.**



Συντομότερα Μονοπάτια

- Ταυτίζεται ΔΣΜ με ΕΣΔ;
- Έστω συντομότερα μονοπάτια από s σε G(V, E, w).
  - Τι συμβαίνει σε G(V, E, kw), k > 0;
  - Τι συμβαίνει σε G(V, E, kw), k < 0;
  - Τι συμβαίνει σε G(V, E, w+k), k > 0;

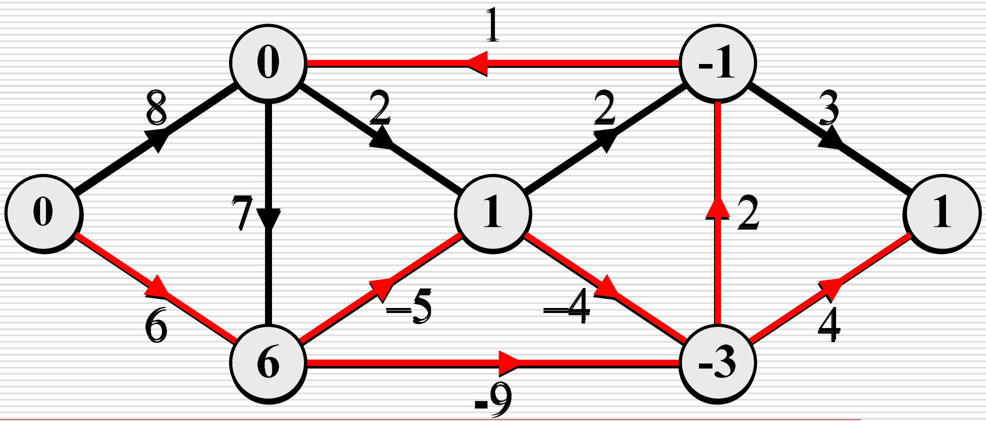


Αποστάσεις

- Αποστάσεις ικανοποιούν την «τριγωνική ανισότητα»:

$$\forall (v,u) \in E,\ d(s,u) \le d(s,v) + w(v,u)$$
$$\forall v,u \in V,\quad d(s,u) \le d(s,v) + d(v,u)$$

  - Ισότητα ισχύει ανν συντ. s – u μονοπάτι περιέχει ακμή (v, u) (αντίστοιχα, διέρχεται από κορυφή v).



Υπολογισμός Συντομότερων Μονοπατιών

- Διατηρούμε «απαισιόδοξη» εκτίμηση D[u] για d(s, u).
  - Αρχικά: $D[s] = 0$ και $D[u] = \infty \quad \forall u \in V \setminus \{s\}$
    $p[u] = \text{NULL} \quad \forall u \in V$
  - Αλγόριθμος εξετάζει ακμές (v, u) και αναπροσαρμόζει D[u].
    Αν $D[u] > D[v] + w(v, u)$, τότε $D[u] \leftarrow D[v] + w(v, u)$
    $p[u] \leftarrow v$
- D[u] = μήκος συντομότερου γνωστού s – u μονοπατιού.
  - Επαγωγικά: αν ισχύει πριν τελευταία εξέταση ακμής (v, u), ισχύει και μετά αφού $D[u] \leftarrow \min\{D[u], D[v] + w(v, u)\}$
  - Πάντα $D[u] \geq d(s, u)$, και $D[u] = \infty$ αν $\nexists\, s - u$ μονοπάτι.
  - Όταν ακμές συντομότερου s – v μονοπατ. εξεταστούν με τη σειρά, γίνεται D[u] = d(s, u) και δεν μειώνεται στο μέλλον.
- Συστηματική εξέταση ακμών και κριτήριο τερματισμού.

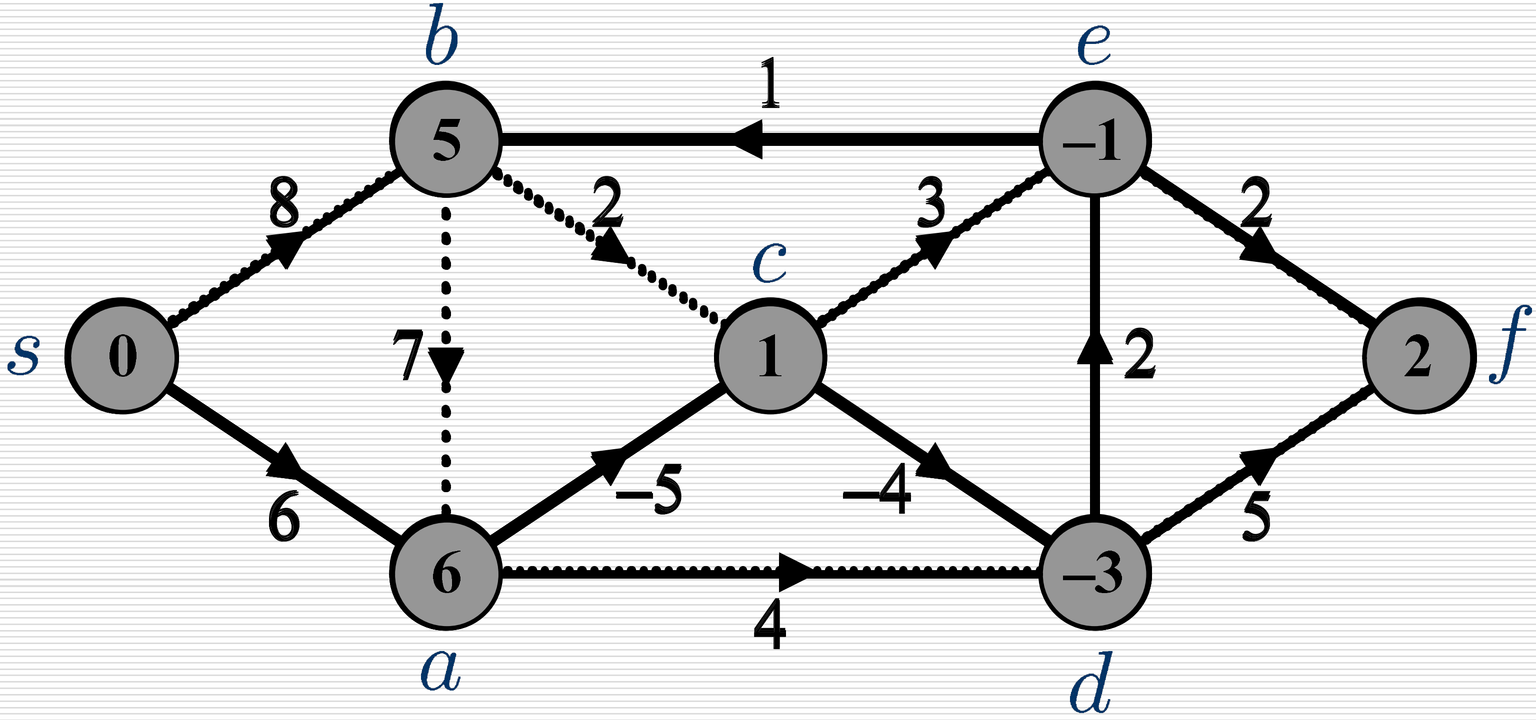
Αλγόριθμος Bellman-Ford

- «Απαισιόδοξη» εκτίμηση D[u].
  - Τέλος κάθε φάσης i, D[u] ≤ D[u, i]
- Σε φάση i = 1, …, n–1, κάθε ακμή εξετάζεται μία φορά.
- Επιπλέον φάση για έλεγχο ύπαρξης κύκλου αρνητικού μήκος.
- Χρόνος εκτέλεσης $\Theta(nm)$.

Bellman-Ford$(G(V, E, w), s)$

for all $u \in V$ **do**
  $D[u] \leftarrow \infty$; $p[u] \leftarrow$ NULL;
$D[s] \leftarrow 0$;
for $i \leftarrow 1$ **to** $n - 1$ **do**
  for all $(v, u) \in E$ **do**
    if $D[u] > D[v] + w(v, u)$ **then**
      $D[u] \leftarrow D[v] + w(v, u)$;
      $p[u] \leftarrow v$;
for all $(v, u) \in E$ **do**
  if $D[u] > D[v] + w(v, u)$ **then**
    return(NEG-CYCLE);

Αλγ. Bellman-Ford: Παράδειγμα

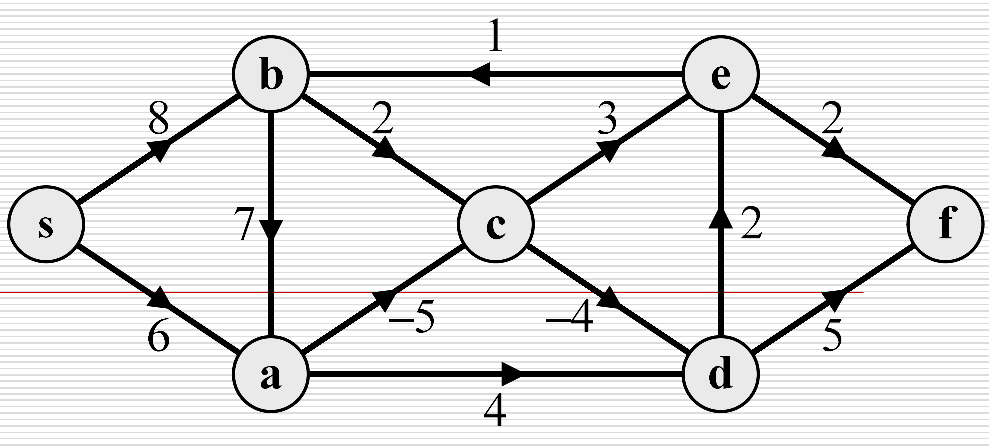


Αλγ. Bellman-Ford ως DP

- Ιδέα: δοκιμή όλων των ακμών σε κάθε πιθανή θέση για συντομότερο s – u μονοπάτι (ταυτόχρονα για όλες τις u).
  - D(u, i) = μήκος συντομότερου s – u μονοπ. με ≤ i ακμές.
  - Αρχικά D(s, 0) = 0 και D(u, 0) = ∞ για κάθε u ≠ s.
  - Από ΣΜ με ≤ i ακμές σε ΣΜ με ≤ i+1 ακμές:

$$D(u, i+1) = \min\{D(u, i), \min_{v:(v,u)\in E}\{D(v, i) + w(v, u)\}\}$$

  - (Απλό) μονοπάτι έχει ≤ n – 1 ακμές ⇒ D(u, n–1) = d(s, u)
    D(u, n) < D(u, n–1) ανν κύκλος αρνητικού μήκους.
  - Υπολογισμός τιμών D(u, i), u ∈ V, i = 1, …, n, με **δυναμικό προγραμματισμό**.

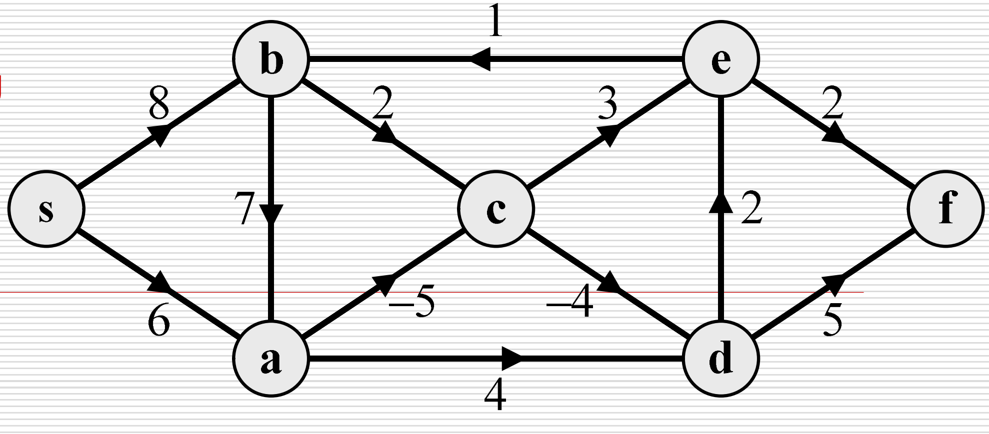


Αλγ. Bellman-Ford: Ορθότητα

- Αν όχι κύκλος αρνητικού μήκους, $D[u] = d(s, u)$ στο τέλος.
  - Συντομότερο s – u μονοπάτι $s = v_0, v_1, \ldots, v_k = u$ με k ακμές.
  - Επαγωγική υπόθ.: Τέλος φάσης $i-1$, $D[v_{i-1}] = d(s, v_{i-1})$.
  - Τέλος φάσης i: εξέταση ακμής (v_{i-1}, v_i) και $D[v_i] = d(s, v_i)$:

$$\begin{aligned} d(s, v_i) \leq D[v_i] &\leq D[v_{i-1}] + w(v_{i-1}, v_i) \\ &= d(s, v_{i-1}) + w(v_{i-1}, v_i) = d(s, v_i) \end{aligned}$$

  - Τέλος φάσης n – 1: $D[u] = d(s, u)$ για κάθε κορυφή u.
  - $D[u]$ δεν μειώνεται άλλο, αφού πάντα $D[u] \geq d(s, u)$.
  - Αλγόριθμος δεν επιστρέφει ένδειξη για κύκλο αρνητικού μήκους.

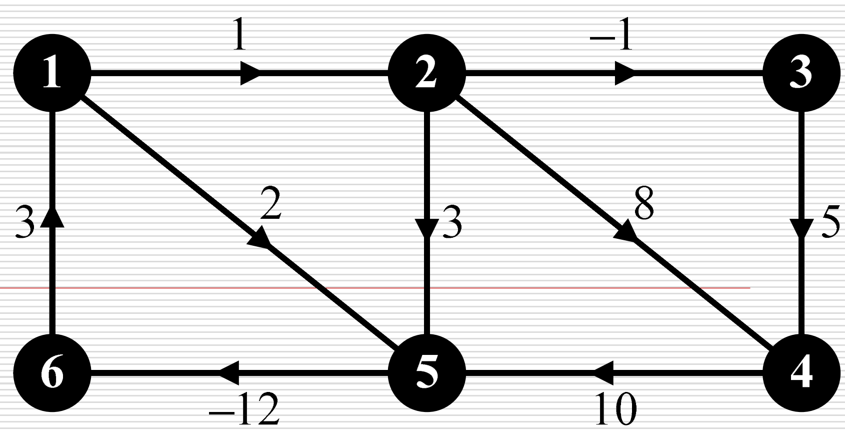


Αλγ. Bellman-Ford: Ορθότητα

- Αν κύκλος αρνητικού μήκους, ένδειξη στο τέλος.
  - Έστω κύκλος αρνητικού μήκους $v_0, v_1, \ldots, v_{k-1}, v_k\ (= v_0)$ προσπελάσιμος από s.
  - Εκτιμήσεις $D[v_i]$ πεπερασμένες στο τέλος φάσης n−1.
  - Αν όχι ένδειξη, πρέπει στη φάση n για κάθε v_i στον κύκλο: $D[v_i] \leq D[v_{i-1}] + w(v_{i-1}, v_i)$
  - Αθροίζοντας κατά μέλη:

$$\sum_{i=1}^{k} D[v_i] \leq \sum_{i=1}^{k} D[v_{i-1}] + \sum_{i=1}^{k} w(v_{i-1}, v_i) \Rightarrow \sum_{i=1}^{k} w(v_{i-1}, v_i) \geq 0$$

  - Άτοπο! Άρα ο αλγόριθμος επιστρέφει ένδειξη για κύκλο αρνητικού μήκους.



Συντομότερα Μονοπάτια σε DAG

- Σε DAG, σειρά εμφάνισης κορυφών σε κάθε μονοπάτι (άρα και ΔΣΜ) ακολουθεί τοπολογική διάταξη!
  - Έστω τοπολογική διάταξη $s = v_1, v_2, \ldots, v_n$.
  - $d(s, v_k)$ εξαρτάται μόνο από $d(s, v_j)$ με $j < k$: $$d(s, v_k) = \min_{v_j : (v_j, v_k) \in E} \{d(s, v_j) + w(v_j, v_k)\}$$
- Κορυφές εντάσσονται στο ΔΣΜ με σειρά τοπολογ. διάταξης και εξετάζονται εξερχόμενες ακμές τους (μια φορά κάθε ακμή!).
  - Ορθότητα με επαγωγή (παρόμοια με Bellman-Ford).
  - Επαγωγική υπόθ.: ακριβώς πριν την ένταξη του v_k στο ΔΣΜ, ισχύει ότι $D[v_j]=d(s,v_j)$ για κάθε $j = 0, \ldots, k$.
  - Ακριβώς πριν ένταξη v_{k+1} στο ΔΣΜ, $D[v_{k+1}]=d(s,v_{k+1})$ αφού

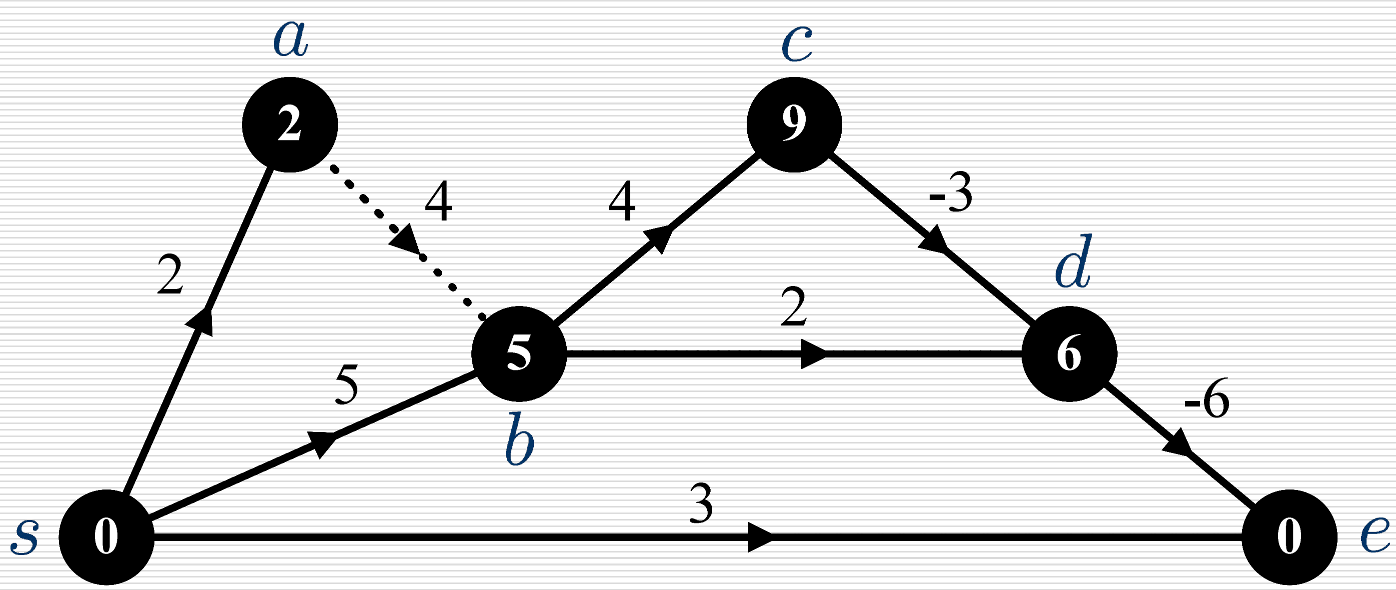
$$D[v_{k+1}] = \min_{v_j : (v_j, v_{k+1}) \in E} \{D[v_j] + w(v_j, v_{k+1})\}$$

Συντομότερα Μονοπάτια σε DAG

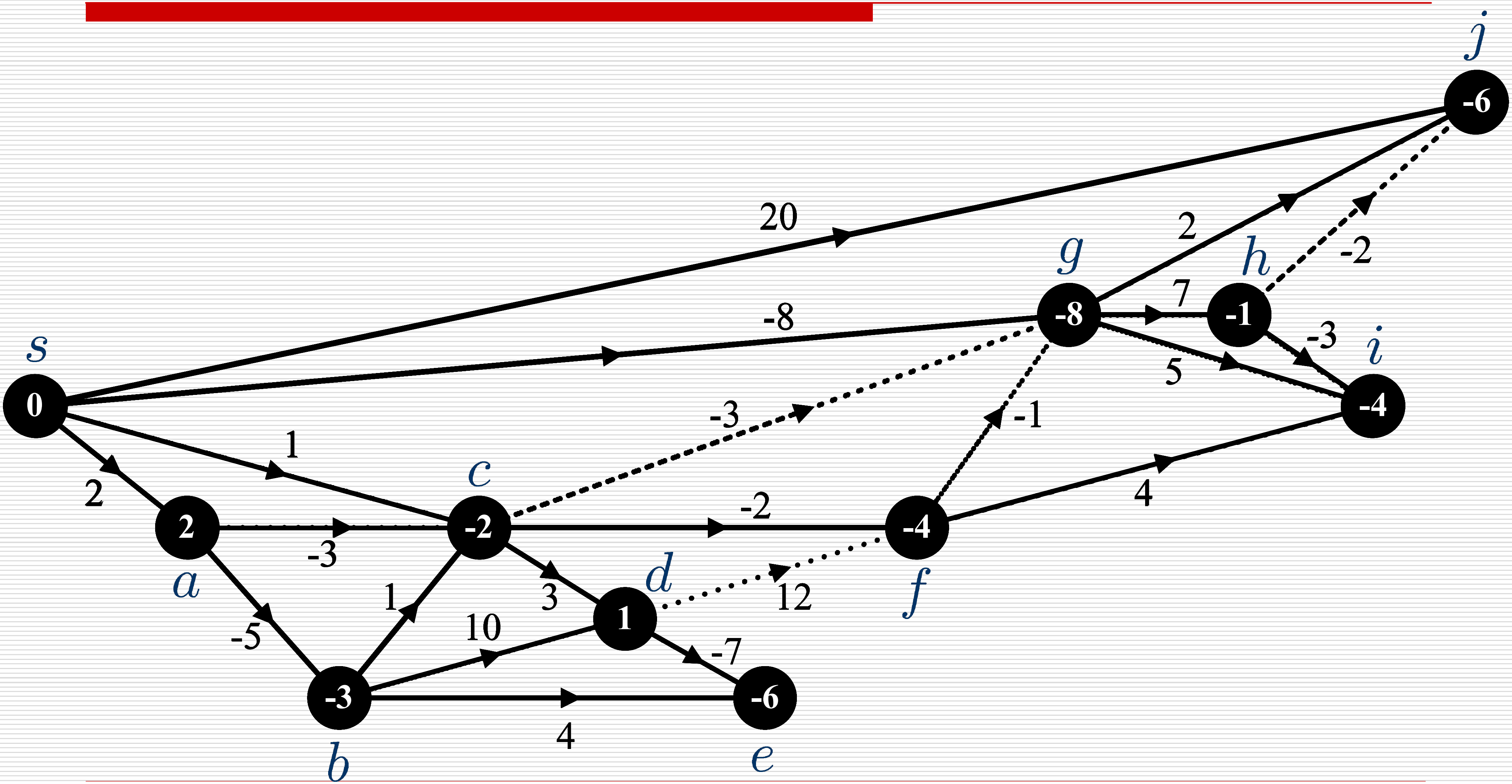
- Χρόνος εκτέλεσης: γραμμικός, Θ(n+m)
- Χρησιμοποιείται και για υπολογισμό μακρύτερων μονοπατιών.
  - Αν G(V, E, w) **ακυκλικό**, p μακρύτερο s – u μονοπάτι ανν p συντομότερη s – u διαδρομή στο G(V, E, –w).

ShortestPath-DAG$(G(V, E, w), v_1)$
    Έστω τοπολογική διάταξη $v_1, v_2, \ldots, v_n$;
    for $j \leftarrow 1$ **to** n **do**
        $D[v_j] \leftarrow \infty$; $p[v_j] \leftarrow$ NULL;
    $D[v_1] \leftarrow 0$;
    for $j \leftarrow 1$ **to** $n - 1$ **do**
        for all $(v_j, v_i) \in E$ **do**
            if $D[v_i] > D[v_j] + w(v_j, v_i)$ **then**
                $D[v_i] \leftarrow D[v_j] + w(v_j, v_i)$;
                $p[v_i] \leftarrow v_j$;

Παράδειγμα



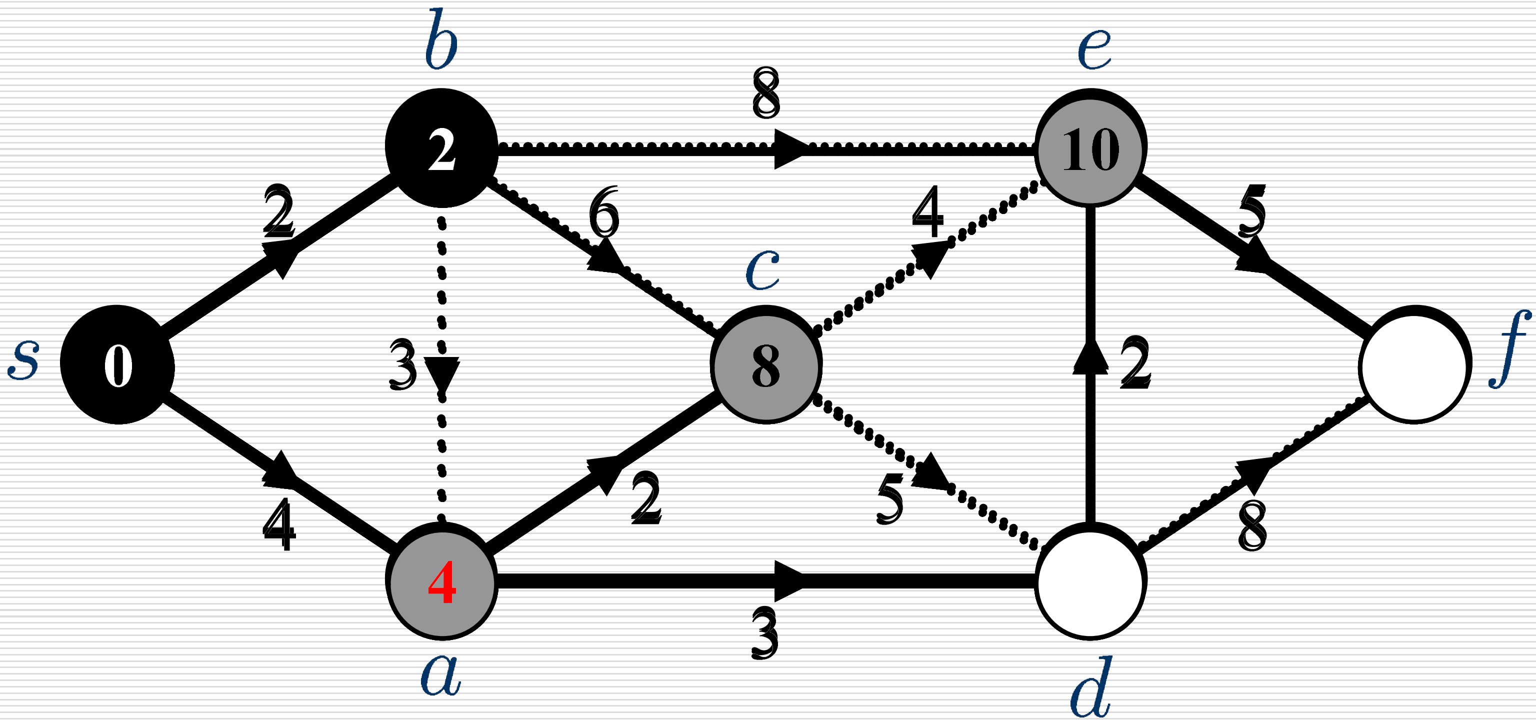
Παράδειγμα



Αλγόριθμος Dijkstra

- Ταχύτερα αν όχι αρνητικά μήκη! Αποτελεί γενίκευση BFS.
  - Ταχύτερα αν υπάρχει πληροφορία για σειρά εμφάνισης κορυφών σε συντομότερα μονοπάτια (και ΔΣΜ).
  - Μη αρνητικά μήκη: κορυφές σε αύξουσα σειρά απόστασης.
- Κορυφές εντάσσονται σε ΔΣΜ σε αύξουσα απόσταση και εξετάζονται εξερχόμενες ακμές τους (μια φορά κάθε ακμή!).
  - Αρχικά D[s] = 0 και D[u] = ∞ για κάθε u ≠ s.
  - Κορυφή u εκτός ΔΣΜ με ελάχιστο D[u] εντάσσεται σε ΔΣΜ.
  - Για κάθε ακμή (u, v), $D[v] \leftarrow \min\{D[v], D[u] + w(u, v)\}$
- Ορθότητα: όταν u εντάσσεται σε ΔΣΜ, D[u] = d(s, u).
  - Μη αρνητικά μήκη: κορυφές v με μεγαλύτερο D[v] σε μεγαλύτερη απόσταση και δεν επηρεάζουν D[u].

Αλγόριθμος Dijkstra: Παράδειγμα



Αλγόριθμος Dijkstra

- Άπληστος αλγόριθμος.
- **Υλοποίηση**:
  - Ελάχιστο D[v]: ουρά προτεραιότητας.
  - Binary heap: $\Theta(m \log n)$
  - Fibonacci heap: $\Theta(m + n \log n)$
  - Ελάχιστο D[v] γραμμικά: $\Theta(n^2)$.

$\mathrm{Dijkstra}(G(V, E, w), s)$

$\quad$ **for all** $u \in V$ **do**

$\quad\quad D[u] \leftarrow \infty;\ \ p[u] \leftarrow \text{NULL};$

$\quad D[s] \leftarrow 0;\ \ S \leftarrow \emptyset;$

$\quad$ **while** $|S| < |V|$ **do**

$\quad\quad u \notin S : D[u] = \min_{v \notin S}\{D[v]\};$

$\quad\quad S \leftarrow S \cup \{u\};$

$\quad\quad$ **for all** $v \in \mathrm{AdjList}[u]$ **do**

$\quad\quad\quad$ **if** $D[v] > D[u] + w(u, v)$ **then**

$\quad\quad\quad\quad D[v] \leftarrow D[u] + w(u, v);$

$\quad\quad\quad\quad p[v] \leftarrow u;$

Κάτι μου Θυμίζει ...;!

$\text{Dijkstra}(G(V,E,w),s)$

for all $u \in V$ **do**

$\quad D[u] \leftarrow \infty;\;\; p[u] \leftarrow \text{NULL};$

$D[s] \leftarrow 0;\;\; S \leftarrow \emptyset;$

while $|S| < |V|$ **do**

$\quad u \notin S : D[u] = \min_{v \notin S}\{D[v]\};$

$\quad S \leftarrow S \cup \{u\};$

$\quad$ **for** all $v \in \text{AdjList}[u]$ **do**

$\quad\quad$ **if** $D[v] > D[u] + w(u,v)$ **then**

$\quad\quad\quad D[v] \leftarrow D[u] + w(u,v);$

$\quad\quad\quad p[v] \leftarrow u;$

$\text{MST-Prim}(G(V,E,w),s)$

for all $u \in V$ **do**

$\quad c[u] \leftarrow \infty;\;\; p[u] \leftarrow \text{NULL};$

$c[s] \leftarrow 0;\;\; S \leftarrow \emptyset;\;\; \Delta \leftarrow \emptyset;$

while $|S| < |V|$ **do**

$\quad u \notin S : c[u] = \min_{v \notin S}\{c[v]\};$

$\quad S \leftarrow S \cup \{u\};$

$\quad$ **for all** $v \in \text{AdjList}[u]$ **do**

$\quad\quad$ **if** $v \notin S$ **and** $w(u,v) < c[v]$ **then**

$\quad\quad\quad c[v] \leftarrow w(u,v);$

$\quad\quad\quad p[v] \leftarrow u;$

$\quad$ **if** $p[u] \neq \text{NULL}$ **then**

$\quad\quad \Delta \leftarrow \Delta \cup \{u, p[u]\};$

Αλγόριθμος Dijkstra: Εξέλιξη

- Απόσταση (και συντομότερο μονοπάτι) από s προς κοντινότερη (στην s), 2η κοντινότερη (στην s) κορυφή, κοκ.
- Συντομότερα μονοπάτια για κοντινότερες κορυφές, με υπολογισμένες αποστάσεις, σχηματίζουν υποδέντρο του ΔΣΜ.
- Επόμενη κοντινότερη (στην s) κορυφή είναι **συνοριακή** κορυφή.
  - Συνοριακή κορυφή: δεν ανήκει σε υποδέντρο ΔΣΜ και έχει εισερχόμενη ακμή από υποδέντρο.
- Εκτιμήσεις απόστασης συνοριακών κορυφών διατηρούνται σε ουρά προτεραιότητας.
- Συνοριακή κορυφή με ελάχιστη εκτίμηση απόστασης «βγαίνει» από ουρά προτεραιότητας και προστίθεται στο υποδέντρο.
  - Εκτιμήσεις απόστασης συνοριακών κορυφών ενημερώνονται με προσθήκη νέας κορυφής στο υποδέντρο (για εξερχόμενες ακμές της).

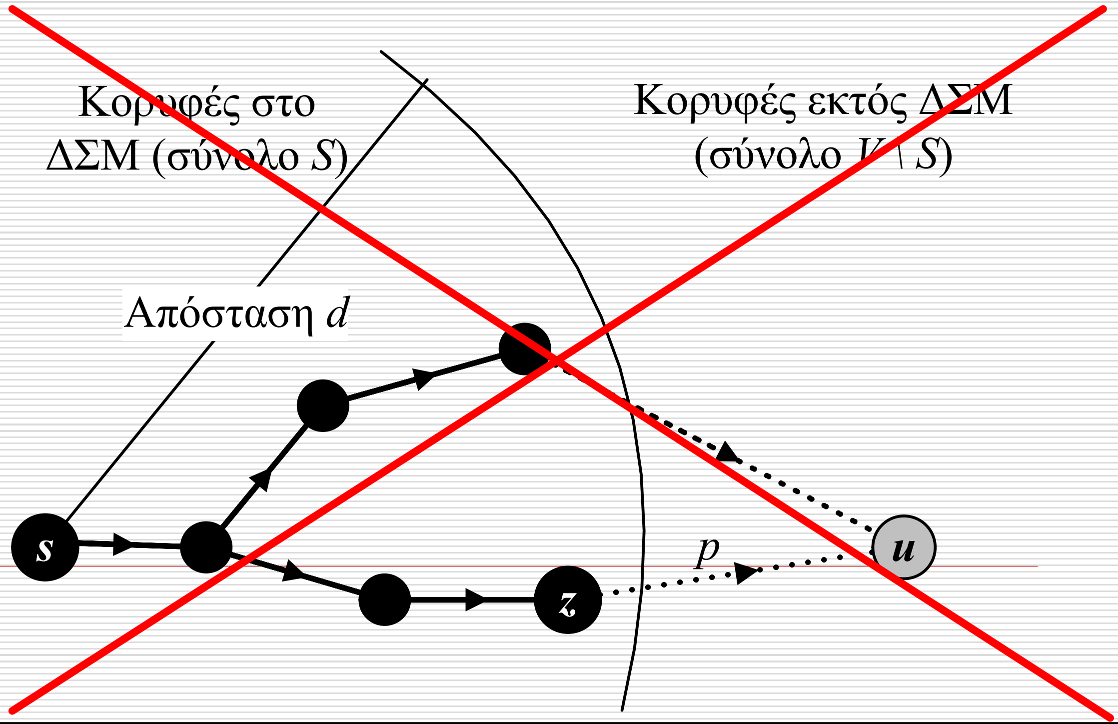
Αλγόριθμος Dijkstra: Ορθότητα

- Θ.δ.ο όταν κορυφή u εντάσσεται σε ΔΣΜ, D[u] = d(s, u).
  - Επαγωγή: έστω D[v] = d(s, v) για κάθε v ήδη στο ΔΣΜ.
  - u έχει ελάχιστο D[u] (εκτός ΔΣΜ). Έστω ότι D[u] > d(s, u).
  - p συντομότερο s – u μονοπάτι με μήκος d(s, u) < D[u], και z τελευταία κορυφή πριν u στο p:

Μπορεί z στο ΔΣΜ;

$$d(s,u) = d(s,z) + w(z,u) < D[u]$$
$$\Rightarrow z \notin S$$

Όχι!



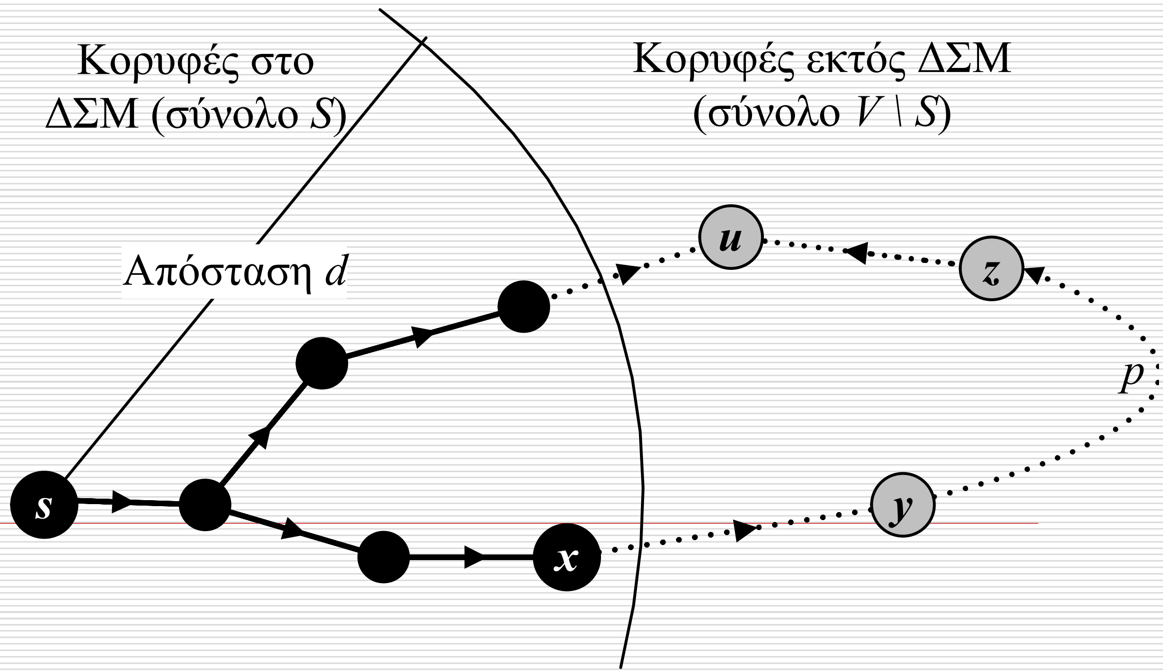
Αλγόριθμος Dijkstra: Ορθότητα

- Θ.δ.ο όταν κορυφή u εντάσσεται σε ΔΣΜ, D[u] = d(s, u).
  - Επαγωγή: έστω D[v] = d(s, v) για κάθε v ήδη στο ΔΣΜ.
  - u έχει ελάχιστο D[u] (εκτός ΔΣΜ). Έστω ότι D[u] > d(s, u).
  - p συντομότερο s – u μονοπάτι με μήκος d(s, u) < D[u], και z τελευταία κορυφή πριν u στο p:

Έστω x (≠ z) τελευταία κορυφή του p στο ΔΣΜ και y (μπορεί y = z) επόμενη της x στο p.

$$D[y] \leq D[x] + w(x, y)$$
$$= d(s, x) + w(x, y)$$
$$= d(s, y) < D[u]$$

$\Rightarrow D[y] < D[u]$, **άτοπο!**



Dijkstra vs Bellman-Ford

- Αλγ. Dijkstra ταχύτερος κατά n αλλά δεν εφαρμόζεται για αρνητικά μήκη.
  - Βασίζεται στο ότι αποστάσεις δεν μειώνονται κατά μήκος συντομότερου μονοπατιού.
- Αλγ. Bellman-Ford εφαρμόζεται για αρνητικά μήκη.
  - Αποστάσεις μπορεί να μειώνονται κατά μήκος συντομότερου μονοπατιού.
  - «Τελευταία» κορυφή μπορεί σε μικρότερη απόσταση από αρχική.

Ερωτήσεις – Ασκήσεις

- Αρνητικά μήκη $\rightarrow$ προσθέτουμε μεγάλο αριθμό $\rightarrow$ $\rightarrow$ θετικά μήκη $\rightarrow$ αλγόριθμος Dijkstra;
- Νδο BFS υπολογίζει ΔΣΜ όταν ακμές μοναδιαίου μήκους.
- Όταν μη-αρνητικά μήκη, μπορεί ένα ΔΣΜ και ένα ΕΣΔ να μην έχουν καμία κοινή ακμή;
- **Bottleneck** Shortest Paths:
  - Κόστος μονοπατιού p: $c(p) = \max_{e \in p}\{w(e)\}$
  - Υπολογισμός ΔΣΜ για bottleneck κόστος;
  - Τροποποίηση Dijkstra λύνει Bottleneck Shortest Paths (ακόμη και για αρνητικά μήκη):

$$\forall (v, u) \in E\,, D[u] \leftarrow \min\{D[u], \max\{D[v], w(v, u)\}\}$$

Συντομότερα Μονοπάτια για Όλα τα Ζεύγη Κορυφών

- Υπολογισμός απόστασης d(v, u) και συντομότερου v – u μονοπατιού για κάθε ζεύγος $(v, u) \in V \times V$.
- Αλγόριθμος για ΣΜ από μία κορυφή για κάθε $s \in V$.
  - Αρνητικά μήκη: Bellman-Ford σε χρόνο $\Theta(n^2 m)$.
  - Μη-αρνητικά μήκη: Dijkstra σε χρόνο $\Theta(n m + n^2 \log n)$.
- Αρνητικά μήκη: Floyd-Warshall σε χρόνο $\Theta(n^3)$.
- Αναπαράσταση λύσης:
  - Αποστάσεις: πίνακας D[1..n][1..n]
  - Συντομότερα μονοπάτια: n ΔΣΜ, ένα για κάθε αρχική κορυφή.
    - Πίνακας P[1..n][1..n]: n πίνακες γονέων.
    - Γραμμή P[i]: πίνακας γονέων ΔΣΜ(v_i).

Αλγόριθμος Floyd-Warshall

- Θεωρούμε γράφημα G(V, E, w) με μήκη στις ακμές.
  - Καθορισμένη (αυθαίρετη) αρίθμηση κορυφών $v_1, v_2, \ldots, v_n$.
- Αναπαράσταση γραφήματος με πίνακα γειτνίασης:

$$w(v_i, v_j) = \begin{cases} 0 & v_i = v_j \\ w(v_i, v_j) & v_i \neq v_j \quad (v_i, v_j) \in E \\ \infty & v_i \neq v_j \quad (v_i, v_j) \notin E \end{cases}$$

- Υπολογισμός απόστασης $d(v_i, v_j)$ από $d(v_i, v_k)$, $d(v_k, v_j)$ για όλα τα $k \in V \setminus \{v_i, v_j\}$:

$$d(v_i, v_j) = \min\{w(v_i, v_j), \min_{v_k \in V \setminus \{v_i, v_j\}} \{d(v_i, v_k) + d(v_k, v_j)\}\}$$

  - Φαύλος κύκλος(;): $d(v_i, v_k) \rightarrow d(v_i, v_j)$ και $d(v_i, v_j) \rightarrow d(v_i, v_k)$
  - **Δυναμικός προγραμματισμός**: υπολογισμός όλων με συστηματικό bottom-up τρόπο!

Αλγόριθμος Floyd-Warshall

- $D_k[v_i, v_j]$: μήκος συντομότερου $v_i - v_j$ μονοπατιού με ενδιάμεσες κορυφές μόνο από $V_k = \{v_1, \ldots, v_k\}$
  - Αρχικά $D_0[v_i, v_j] = w(v_i, v_j)$ γιατί $V_0 = \emptyset$.
  - Έστω ότι γνωρίζουμε $D_{k-1}[v_i, v_j]$ για όλα τα ζεύγη v_i, v_j .
  - $D_k[v_i, v_j]$ διέρχεται από v_k καμία ή μία φορά (μονοπάτι!):

$$D_k[v_i, v_j] = \min\{D_{k-1}[v_i, v_j], D_{k-1}[v_i, v_k] + D_{k-1}[v_k, v_j]\}$$

  - Αναδρομική σχέση για $D_0, D_1, \ldots, D_n$:

$$D_k[v_i, v_j] = \begin{cases} w(v_i, v_j) & k = 0 \\ \min\{D_{k-1}[v_i, v_j], D_{k-1}[v_i, v_k] + D_{k-1}[v_k, v_j]\} & k = 1, \ldots, n \end{cases}$$

  - Υπολογισμός D_n με **δυναμικό προγραμματισμό**.
  - Κύκλος αρνητικού μήκους αν $D_n[v_i, v_i] < 0$.

Αλγόριθμος Floyd-Warshall

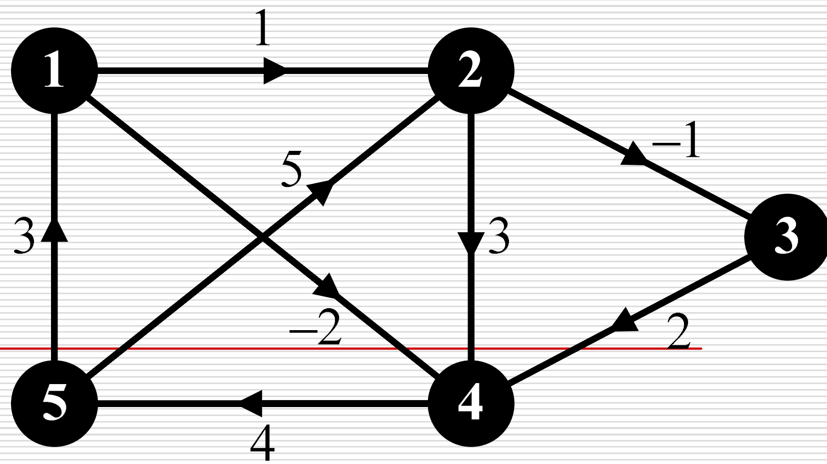
- Τυπικός δυναμικός προγραμματισμός:

Χρόνος: **Θ(n³)**

Floyd-Warshall$(G(V, E, w))$

for $i \leftarrow 1$ **to** n **do**
  for $j \leftarrow 1$ **to** n **do**
    if $(v_i, v_j) \in E$ **then** $D_0[i, j] \leftarrow w(v_i, v_j)$;
    else $D_0[i, j] \leftarrow \infty$;
  $D_0[i, i] \leftarrow 0$;
for $k \leftarrow 1$ **to** n **do**
  for $i \leftarrow 1$ **to** n **do**
    for $j \leftarrow 1$ **to** n **do**
      if $D_{k-1}[i, j] > D_{k-1}[i, k] + D_{k-1}[k, j]$ **then**
        $D_k[i, j] \leftarrow D_{k-1}[i, k] + D_{k-1}[k, j]$;
      else $D_k[i, j] \leftarrow D_{k-1}[i, j]$;

Παράδειγμα



$$D_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \infty & -2 & \infty \\ \infty & 0 & -1 & 3 & \infty \\ \infty & \infty & 0 & 2 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 0 & 4 \\ 3 & 5 & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix}$$

$$D_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \infty & -2 & \infty \\ \infty & 0 & -1 & 3 & \infty \\ \infty & \infty & 0 & 2 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 0 & 4 \\ 3 & 4 & \infty & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -2 & \infty \\ \infty & 0 & -1 & 3 & \infty \\ \infty & \infty & 0 & 2 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 0 & 4 \\ 3 & 4 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -2 & \infty \\ \infty & 0 & -1 & 1 & \infty \\ \infty & \infty & 0 & 2 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 0 & 4 \\ 3 & 4 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -2 & 2 \\ \infty & 0 & -1 & 1 & 5 \\ \infty & \infty & 0 & 2 & 6 \\ \infty & \infty & \infty & 0 & 4 \\ 3 & 4 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -2 & 2 \\ 8 & 0 & -1 & 1 & 5 \\ 9 & 10 & 0 & 2 & 6 \\ 7 & 8 & 7 & 0 & 4 \\ 3 & 4 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Υπολογισμός Συντομότερων Μονοπατιών

- $P_k[v_i, \cdot\,]$: ΔΣΜ(v_i) με ενδιάμεσες κορυφές μόνο από V_k .
  - Αποστάσεις $D_k[v_i, \cdot\,]$ αντιστοιχούν σε μονοπάτια $P_k[v_i, \cdot\,]$.
  - $P_k[v_i, v_j]$: προηγούμενη κορυφή της v_j στο συντομότερο $v_i - v_j$ μονοπάτι με ενδιάμεσες κορυφές μόνο από V_k .
- P_0 καθορίζεται από πίνακα γειτνίασης:

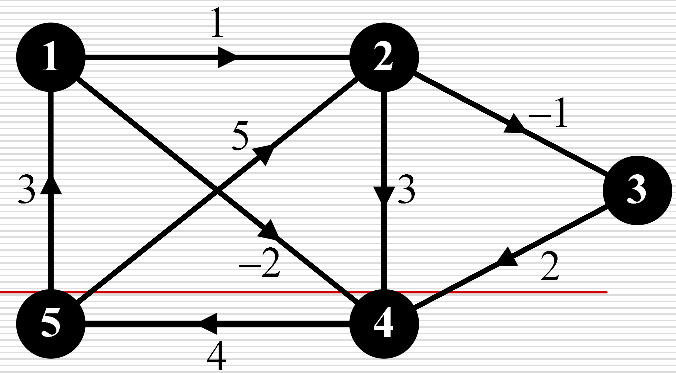
$$P_0[v_i, v_j] = \begin{cases} \text{NULL} & \text{αν } i = j \text{ ή } (v_i, v_j) \notin E \\ v_i & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

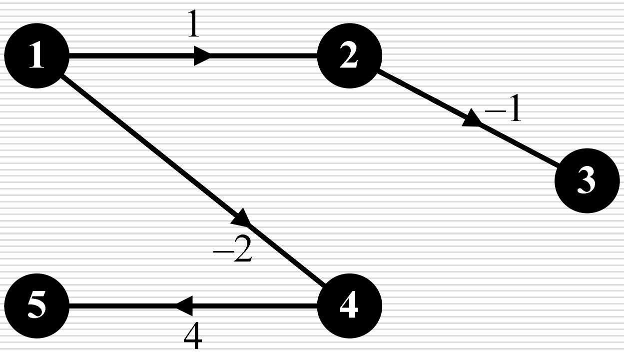
- Αναδρομική σχέση για P_0, P_1, …, P_n :

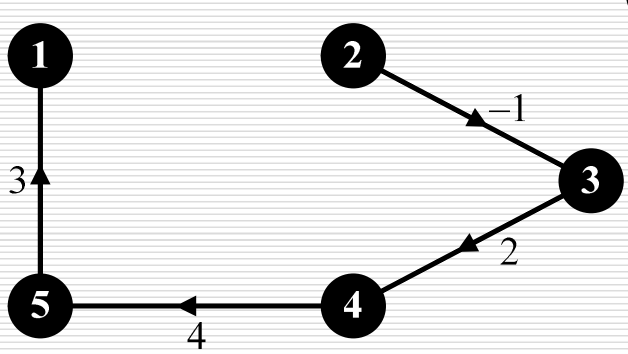
$$P_k[v_i, v_j] = \begin{cases} P_{k-1}[v_i, v_j] & D_{k-1}[v_i, v_j] \leq D_{k-1}[v_i, v_k] + D_{k-1}[v_k, v_j] \\ P_{k-1}[v_k, v_j] & D_{k-1}[v_i, v_j] > D_{k-1}[v_i, v_k] + D_{k-1}[v_k, v_j] \end{cases}$$

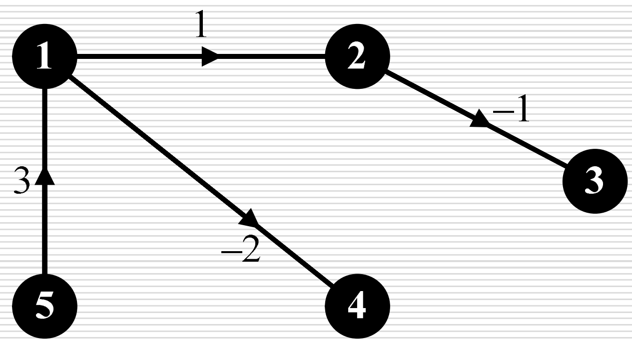
  - Υπολογισμός P_n ταυτόχρονα με υπολογισμό D_n .
  - Εύκολη τροποποίηση προηγούμενης υλοποίησης.

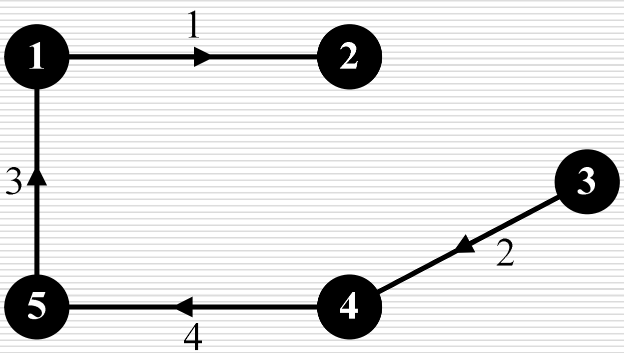
Παράδειγμα

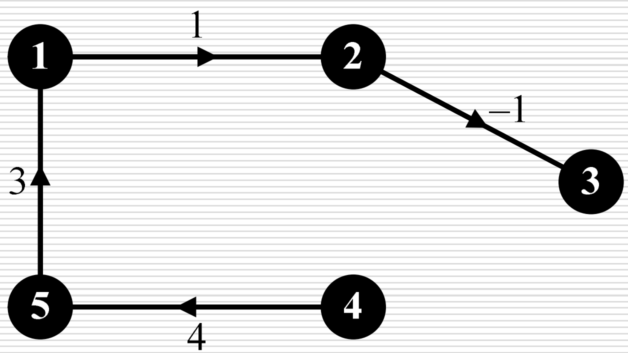












$$P_5 = \begin{pmatrix} \text{NULL} & 1 & 2 & 1 & 4 \\ 5 & \text{NULL} & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & \text{NULL} & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 2 & \text{NULL} & 4 \\ 5 & 1 & 2 & 1 & \text{NULL} \end{pmatrix}$$

Αλγόριθμος Johnson

- Συντομότερα μονοπάτια για όλα τα ζεύγη κορυφών σε αραιά γραφήματα με αρνητικά μήκη:
  - **Μετατροπή** αρνητικών μηκών σε **μη αρνητικά** χωρίς να αλλάξουν τα συντομότερα μονοπάτια.
- Αλγόριθμος για γράφημα G(V, E, w):
  - Νέα κορυφή s που συνδέεται με κάθε u $\in$ V με ακμή μηδενικού μήκους: G′(V $\cup$ {s}, E $\cup$ {(s, u)}, w).
  - Bellman-Ford για G′ με αρχική κορυφή s. Έστω h(u) απόσταση κορυφής u $\in$ V από s.
  - Αν όχι κύκλος αρνητικού μήκους, υπολόγισε νέα (μη αρνητικά) μήκη: $\hat{w}(v,u) = w(v,u) + h(v) - h(u), \forall (v,u) \in E$
  - Για κάθε u $\in$ V, Dijkstra σε $G(V,E,\hat{w})$ με αρχική κορυφή u.

Αλγόριθμος Johnson

- Χρονική πολυπλοκότητα:
  - Bellman-Ford και n φορές Dijkstra: $\Theta(n\,m + n^2 \log n)$.
- Ορθότητα:
  - Νέα μήκη μη αρνητικά: h(·) αποστάσεις από s, και ισχύει ότι

$$\forall (v,u) \in E,\, h(u) \le h(v) + w(v,u) \Rightarrow \hat{w}(v,u) \ge 0$$

  - Μεταβολή στα μήκη δεν επηρεάζει συντομότερα μονοπάτια.
  - Μήκος **κάθε** α – β μονοπατιού μεταβάλλεται κατά h(β) – h(α).
  - Έστω $p \equiv (\alpha = v_0, v_1, \ldots, v_k = \beta)$ οποιοδήποτε α – β μονοπάτι.

$$\hat{\ell}(p) = \sum_{i=0}^{k-1} \hat{w}(v_i, v_{i+1}) = \sum_{i=0}^{k-1} [w(v_i, v_{i+1}) + h(v_i) - h(v_{i+1})]$$

$$= \sum_{i=0}^{k-1} w(v_i, v_{i+1}) + h(v_0) - h(v_k) = \ell(p) + h(\alpha) - h(\beta)$$

Σύνοψη

- Συντομότερα μονοπάτια από μία αρχική κορυφή s:
  - Αρνητικά μήκη: Bellman-Ford σε χρόνο $\Theta(n\, m)$.
    - Δυναμικός προγραμματισμός.
  - DAGs με αρνητικά μήκη σε χρόνο $\Theta(m + n)$.
  - Μη-αρνητικά μήκη: Dijkstra σε χρόνο $\Theta(m + n \log n)$.
    - (Προσαρμοστικός) άπληστος αλγόριθμος.
- Συντομότερα μονοπάτια για όλα τα ζεύγη κορυφών:
  - Αρνητικά μήκη: Floyd-Warshall σε χρόνο $\Theta(n^3)$.
    - Δυναμικός προγραμματισμός.
  - (Μη-)αρνητικά μήκη και αραιά γραφήματα, $m = o(n^2)$:
    - n φορές Dijkstra σε χρόνο $\Theta(n\, m + n^2 \log n)$.
    - Αν αρνητικά μήκη, αλγ. Johnson για μετατροπή σε θετικά!