Εξέταση: Περιγραφική Θεωρία Συνόλων
(Μεταπτυχιακό Μάθημα)

Ιούνιος 2023

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών

Διάρκεια εξέτασης:
2 ώρες

Διδάσκων:
Β. Γρηγοριάδης

Σημειώσεις.

- Υπάρχουν συνολικά **12 ερωτήματα** και παίρνει **1 μονάδα** το κάθε ένα. Η βαθμολογία του γραπτού σας είναι το $\min\{x, 10\}$, όπου x ο βαθμός που γράψατε. Μπορείτε να απαντήσετε σε **όσα ερωτήματα επιθυμείτε** χωρίς κανέναν περιορισμό.
- Οι απαντήσεις σας πρέπει να είναι πλήρεις και αιτιολογημένες.
- Οι φυσικοί αριθμοί είναι το σύνολο $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$. Το σύνολο όλων των πεπερασμένων ακολουθιών φυσικών αριθμών συμβολίζεται με $\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$. Η κενή ακολουθία συμβολίζεται με Λ.
- Αν $k, i \in \mathbb{N}$ με τον συμβολισμό $(k)^{(i)}$ εννοούμε την πεπερασμένη ακολουθία $(k, k, \dots, k)$ με μήκος i.
- Υπενθυμίζεται ότι η μετρική $d_{\mathcal{N}}$ του χώρου του Baire $\mathcal{N}$ ικανοποιεί για όλα τα $\alpha, \beta \in \mathcal{N}$ με $\alpha \neq \beta$ ότι $d_{\mathcal{N}}(\alpha, \beta) = 2^{-n}$, όπου n είναι ο ελάχιστος $k \in \mathbb{N}$ με $\alpha(k) \neq \beta(k)$.

Ερώτημα 1. Δίνονται τα $\alpha, \beta \in \mathcal{N}$ με $\alpha(n) = (-1)^n + 1$ και $\beta(n) = (-1)^{n+1} + 1$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(i) Βρείτε την απόσταση $d_{\mathcal{N}}(\alpha, \beta)$.

(ii) Δώστε το παράδειγμα $\gamma, \delta \in \mathcal{N}$ με $d_{\mathcal{N}}(\gamma, \delta) < 2^{-3}$.

Ερώτημα 2. Εξετάστε τις πιο κάτω ακολουθίες $(\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}}$ και $(\beta_i)_{i\in\mathbb{N}}$ του $\mathcal{N}$ ως προς τη σύγκλιση,

$$\alpha_i = (i, 0, 0, 0, \dots), \quad \beta_i = (0)^{(i)} * (-1)^i * (0, 0, \dots, 0, \dots), \quad i \in \mathbb{N}.$$

Στην περίπτωση όπου έχουμε σύγκλιση να δώσετε το όριο της ακολουθίας.

Ερώτημα 3. Αποδείξτε ότι για κάθε $u \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ το σύνολο $\mathcal{N}_u = \{\alpha \in \mathcal{N} \mid u \sqsubseteq \alpha\}$ είναι $d_{\mathcal{N}}$-κλειστό υποσύνολο του $\mathcal{N}$.
Υπόδειξη. Ένας τρόπος είναι με τη χρήση ορίων ακολουθιών.

Ερώτημα 4. Δώστε το παράδειγμα ενός κλειστού υποσυνόλου του $\mathbb{R}$, του οποίου ο τέλειος πυρήνας να είναι μη κενό σύνολο και το διάσπαρτο μέρος του να είναι το σύνολο $\{1 + 2^{-n} \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Ερώτημα 5. Θεωρούμε τις πεπερασμένες ακολουθίες φυσικών αριθμών: $u_1 = (1, 2)$ και $u_2 = (3, 4, 5)$. Βρείτε το μικρότερο δυνατό δένδρο T στο $\mathbb{N}$ που περιέχει τα u_1, u_2.
(Δηλαδή βρείτε ένα δένδρο T στο $\mathbb{N}$, το οποίο περιέχει τα u_1, u_2 και επιπλέον για κάθε δένδρο S με την ιδιότητα $u_1, u_2 \in S$ να ισχύει $T \subseteq S$.)

Ερώτημα 6. Εξετάστε αν τα παρακάτω δένδρα έχουν μη κενό σώμα,

$$T = \Big\{\Lambda\Big\} \bigcup \Big\{(0)\Big\} \bigcup \Big\{(1), (1, 2)\Big\} \bigcup \Big\{(2), (2, 3), (2, 3, 4)\Big\}$$
$$\bigcup \Big\{(3), (3, 4), (3, 4, 5), (3, 4, 5, 6)\Big\} \cup \dots$$
$$S = \{(0)^n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Ερώτημα 7. Δίνεται μια κλάση συνόλων Γ που είναι κλειστή ως προς συνεχή αντικατάσταση και τον τελεστή $\exists^{\mathbb{N}}$. Υποθέτουμε ότι η Γ ικανοποιεί την εξής ιδιότητα: για κάθε Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$ και κάθε ακολουθία συνόλων $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με $P_n \in \Gamma(\mathcal{X})$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, το σύνολο

$$P = \{(x, n) \in \mathcal{X} \times \mathbb{N} \mid x \in P_n\}$$

ανήκει στη Γ. Δείξτε ότι η Γ είναι κλειστή ως προς $\bigvee_{\mathbb{N}}$.

Ερώτημα 8. Βρείτε μια κλάση στην ιεραρχία των Borel συνόλων πεπερασμένης τάξης στην οποία να ανήκει το σύνολο $Q \subseteq 2^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$, το οποίο ορίζεται ως εξής:

$$\alpha \in Q \iff \exists i \; \forall j \; \exists k \geq j \; \alpha(i,k) = 0,$$

όπου τα πιο πάνω i, j, k είναι φυσικοί αριθμοί και $\alpha \in 2^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$.

Ερώτημα 9. Δίνεται ένα σύνολο $A \in \bigcup_{n\geq 1} \underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_n(\mathbb{R})$. Με n_A εννοούμε τον ελάχιστο φυσικό $n \geq 1$ για τον οποίο ισχύει $A \in \underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_n(\mathbb{R})$. Αν υπάρχει συνεχής συνάρτηση $f : \mathcal{N} \to \mathbb{R}$ έτσι ώστε το σύνολο $P = f^{-1}[A]$ ***να μην*** ανήκει στη $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_3(\mathcal{N})$ τι μπορούμε να συμπεράνουμε για τον n_A;

Ερώτημα 10. Θεωρούμε τον χώρο Tr όλων των δένδρων στο $\mathbb{N}$ και το σύνολο IF όλων των μη θεμελιωμένων δένδρων στο $\mathbb{N}$. Βρείτε μια κλάση Γ από την ιεραρχία των προβολικών συνόλων για την οποία ισχύει ότι $\mathrm{IF} \in \Gamma(\mathrm{Tr})$. Μπορείτε να πάρετε δεδομένο ότι η συνάρτηση

$$f : \mathrm{Tr} \times \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} \to \{0,1\} : f(T,u) = \begin{cases} 1, & u \in T, \\ 0, & u \notin T, \end{cases}$$

είναι συνεχής.

Ερώτημα 11. Θεωρούμε τον Πολωνικό χώρο $C([0,1])$ όλων των συνεχών συναρτήσεων $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ με τη μετρική της ομοιόμορφης σύγκλισης όπως επίσης και τον Πολωνικό χώρο $\mathcal{X} = C([0,1])^{\mathbb{N}}$. Ορίζουμε το σύνολο $C \subseteq \mathcal{X}$ ως εξής:

$(f_i)_{i\in\mathbb{N}} \in C \iff$ για κάθε $x \in [0,1]$ η ακολουθία πραγματικών αριθμών $(f_i(x))_{i\in\mathbb{N}}$ είναι συγκλίνουσα.

Βρείτε μια κλάση Γ από την ιεραρχία των προβολικών συνόλων για την οποία ισχύει ότι $C \in \Gamma(\mathcal{X})$. Μπορείτε να πάρετε δεδομένο ότι η συνάρτηση $((f_i)_{i\in\mathbb{N}}, n, x) \mapsto f_n(x)$ είναι συνεχής.

Ερώτημα 12. Αποδείξτε ότι για κάθε Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$ η οικογένεια $\underset{\sim}{\mathbf{\Delta}}^1_1(\mathcal{X})$ περιέχεται στην οικογένεια $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ όλων των Borel υποσυνόλων του $\mathcal{X}$.
Υπόδειξη. Μπορείτε να εφαρμόσετε το Θεώρημα Διαχωρισμού του Luzin.