

# Ελαστικότητα

Δ. Ευταξιόπουλος

15 Νοεμβρίου 2022



# Περιεχόμενα

<b>1</b>	<b>Ανάλυση τάσεων</b>	<b>7</b>
1.1	Μαζικές δυνάμεις, επιφανειακές δυνάμεις και τάσεις . . .	7
1.2	Ομοιόμορφη εντατική κατάσταση . . . . .	9
1.2.1	Κύριες τάσεις . . . . .	12
1.2.2	Ακρότατες διατμητικές τάσεις . . . . .	13
1.3	Εντατική κατάσταση σε σημείο . . . . .	14
1.4	Διαφορικές εξισώσεις ισορροπίας . . . . .	15
1.5	Τρισδιάστατη εντατική κατάσταση . . . . .	19
1.5.1	Κύριες τάσεις . . . . .	21
1.5.2	Ακρότατες διατμητικές τάσεις . . . . .	23
1.6	Ασκήσεις . . . . .	24
1.6.1	Άσκηση . . . . .	24
1.6.2	Άσκηση . . . . .	24
1.6.3	Άσκηση . . . . .	24
<b>2</b>	<b>Ανάλυση παραμορφώσεων και μετατοπίσεων</b>	<b>25</b>
2.1	Σχέσεις παραμορφώσεων και μετατοπίσεων . . . . .	25
2.2	Εξισώσεις συμβιβαστού . . . . .	28
2.3	Παραμορφώσεις σε σημείο . . . . .	29
2.4	Γενικευμένες μετατοπίσεις . . . . .	33
2.5	Αρχή της επαλληλίας . . . . .	36
2.6	Άσκηση . . . . .	36
<b>3</b>	<b>Σχέσεις τάσεων - παραμορφώσεων</b>	<b>39</b>
3.1	Γενικευμένος νόμος Hooke . . . . .	39
3.2	Μέτρο διόγκωσης . . . . .	43
3.3	Άσκηση . . . . .	44
<b>4</b>	<b>Καρτεσιανοί τανυστές και η χρήση δεικτών</b>	<b>45</b>
4.1	Γραφή με δείκτες . . . . .	45
4.1.1	Παράδειγμα . . . . .	46
4.2	Τανυστές πρώτης τάξης . . . . .	47
4.3	Τανυστές μεγαλύτερης τάξης . . . . .	47

4.3.1	Παράδειγμα . . . . .	49
4.3.2	Παράδειγμα . . . . .	49
4.4	Δέλτα του Kronecker . . . . .	50
4.4.1	Παραδείγματα . . . . .	50
4.5	Το σύμβολο της εναλλαγής . . . . .	51
4.6	Το θεώρημα Gauss . . . . .	51
4.7	Ασκήσεις . . . . .	52
4.7.1	Άσκηση . . . . .	52
4.7.2	Άσκηση . . . . .	53
4.7.3	Άσκηση . . . . .	53
<b>5</b>	<b>Ο τανυστής της τάσης</b>	<b>55</b>
5.1	Κύριοι άξονες του τανυστή τάσης . . . . .	57
5.2	Ακρότατες διατμητικές τάσεις . . . . .	58
5.3	Εξισώσεις ισορροπίας . . . . .	61
5.4	Ασκήσεις . . . . .	62
5.4.1	Άσκηση . . . . .	62
5.4.2	Άσκηση . . . . .	62
<b>6</b>	<b>Παραμορφώσεις, μετατοπίσεις και ο νόμος Hooke</b>	<b>65</b>
6.1	Παραμόρφωση και μετατόπιση . . . . .	65
6.2	Γενικευμένος νόμος του Hooke . . . . .	68
6.2.1	Παράδειγμα . . . . .	69
6.3	Ισότροπα υλικά . . . . .	69
6.3.1	Παράδειγμα . . . . .	70
6.3.2	Παράδειγμα . . . . .	71
6.4	Εξισώσεις συμβιβαστού των παραμορφώσεων . . . . .	73
<b>7</b>	<b>Διέπουσες εξισώσεις της ελαστικότητας</b>	<b>77</b>
7.1	Διέπουσες εξισώσεις με χρήση δεικτών . . . . .	77
7.2	Διέπουσες εξισώσεις σε αναπτυγμένη μορφή . . . . .	78
7.3	Άσκηση . . . . .	81
<b>8</b>	<b>Ενεργειακές μέθοδοι</b>	<b>83</b>
8.1	Ενέργεια παραμόρφωσης . . . . .	83
8.2	Μεταβαλλόμενη εντατική κατάσταση και μαζικές δυνάμεις	88
8.3	Η Αρχή Δυνατών Έργων . . . . .	90
8.4	Το Θεώρημα Ελαχίστου της Δυναμικής Ενέργειας . . . . .	94
8.4.1	Παράδειγμα . . . . .	95
8.4.2	Παράδειγμα . . . . .	98
8.5	Η μέθοδος Rayleigh - Ritz . . . . .	99
8.5.1	Παράδειγμα . . . . .	100
8.6	Ασκήσεις . . . . .	102
8.6.1	Άσκηση . . . . .	102

8.6.2 Άσκηση . . . . .	103
<b>9 Διατύπωση των προβλημάτων της ελαστικότητας</b>	<b>105</b>
9.1 Εισαγωγή . . . . .	105
9.2 Συνοριακές συνθήκες . . . . .	106
9.3 Διέπουσες εξισώσεις σε προβλήματα επίπεδης παραμόρφωσης . . . . .	108
9.4 Η Αρχή της Επαλληλίας . . . . .	111
9.5 Μοναδικότητα των λύσεων της γραμμικής ελαστικότητας	112
9.6 Η Αρχή του Saint - Venant . . . . .	113
9.7 Άσκηση . . . . .	114
<b>10 Προβλήματα στο επίπεδο</b>	<b>117</b>
10.1 Κατάσταση επίπεδης έντασης . . . . .	117
10.2 Προσεγγιστικός χαρακτήρας των εξισώσεων της επίπεδης έντασης . . . . .	120
<b>11 Συνοριακά προβλήματα σε καρτεσιανές συντεταγμένες</b>	<b>123</b>
11.1 Πολυωνυμικές τασικές συναρτήσεις . . . . .	123
11.2 Πολυώνυμα δεύτερου και τρίτου βαθμού . . . . .	124
11.3 Κάμψη προβόλου με φορτίο στο άκρο . . . . .	126
11.4 Άσκήσεις . . . . .	132
11.4.1 Άσκηση . . . . .	132
11.4.2 Άσκηση . . . . .	133
<b>12 Προβλήματα σε πολικές συντεταγμένες</b>	<b>135</b>
12.1 Διέπουσες εξισώσεις . . . . .	135
12.2 Αξονοσυμμετρικά προβλήματα στο επίπεδο . . . . .	139
12.2.1 Παράδειγμα . . . . .	141
12.3 Η λύση Michell . . . . .	142
12.3.1 Παράδειγμα: Εφελκυσμός πλάκας με οπή . . . . .	145
12.4 Άσκηση . . . . .	147
<b>13 Στρέψη δοκού τυχαίας διατομής</b>	<b>149</b>
13.1 Γενική λύση του προβλήματος . . . . .	149
13.2 Λύση για άτρακτο ελλειπτικής διατομής . . . . .	157
13.3 Το ανάλογο πρόβλημα από τη ρευστομηχανική . . . . .	159
<b>14 Προβλήματα με σφήνες</b>	<b>163</b>
14.1 Γενικά . . . . .	163
14.2 Παράδειγμα . . . . .	164
14.3 Γενική ομοιόμορφη φόρτιση στις πλευρές . . . . .	166
14.3.1 Ιδιοτιμές για τη γωνία της σφήνας . . . . .	167
14.4 Η ασυμπτωτική μέθοδος Williams . . . . .	167
14.4.1 Αποδεκτές ιδιομορφίες . . . . .	169

14.4.2	Ανάπτυγμα ιδιοσυναρτήσεων . . . . .	171
14.4.3	Η φύση των ιδιομορφιών . . . . .	173
14.4.4	Το ιδιόμορφο τασικό πεδίο . . . . .	176
14.5	Άσκηση . . . . .	177
<b>15</b>	<b>Προβλήματα επαφών στο επίπεδο</b>	<b>179</b>
15.1	Ομοιότητα . . . . .	179
15.2	Η λύση Flamant . . . . .	180
15.3	Το ημιεπίπεδο με συγκεντρωμένη δύναμη στην ελεύθερη επιφάνεια . . . . .	181
15.3.1	Η κατακόρυφη συνιστώσα $F_y$ της δύναμης . . . . .	182
15.3.2	Η οριζόντια συνιστώσα $F_x$ της δύναμης . . . . .	183
15.3.3	Το συνδυασμένο πεδίο των $F_y$ και $F_x$ . . . . .	183
15.4	Κατανεμημένο κατακόρυφο φορτίο . . . . .	184
15.5	Προβλήματα επαφών χωρίς τριβή . . . . .	185
15.5.1	Μέθοδος επίλυσης της ιδιόμορφης ολοκληρωτικής εξίσωσης Cauchy . . . . .	186
15.5.2	Διεισδυτής με επίπεδο οριζόντιο μέτωπο . . . . .	188
15.5.3	Διεισδυτής με κυλινδρικό μέτωπο . . . . .	189
15.6	Άσκηση . . . . .	191
<b>16</b>	<b>Συγκεντρωμένες δυνάμεις, εξαρμώσεις και ρωγμές</b>	<b>193</b>
16.1	Η λύση Kelvin . . . . .	193
16.2	Εξαρμώσεις (Dislocations) . . . . .	195
16.2.1	Οι εξαρμώσεις στην Επιστήμη Υλικών . . . . .	198
16.2.2	Σύγκριση της έννοιας των εξαρμώσεων στα συνεχή και στα διακριτά μέσα . . . . .	199
16.2.3	Οι εξαρμώσεις ως συναρτήσεις Green . . . . .	200
16.2.4	Συγκεντρώσεις τάσεων . . . . .	201
16.3	Ρωγμές . . . . .	202
16.3.1	Η Γραμμικά Ελαστική Μηχανική των Θραύσεων . . . . .	203
16.3.2	Ρωγή στο επίπεδο υπό εφελκυσμό . . . . .	203

# Κεφάλαιο 1

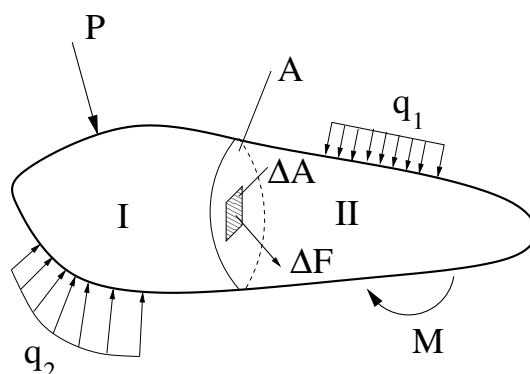
## Ανάλυση τάσεων

### 1.1 Μαζικές δυνάμεις, επιφανειακές δυνάμεις και τάσεις

Όταν σ' ένα σώμα εφαρμόζεται ένα σύνολο εξωτερικών δυνάμεων, αναπτύσσονται εσωτερικές δυνάμεις μέσα στο σώμα. Η συμπεριφορά του σώματος, δηλαδή οι αλλαγές στις διαστάσεις του (η παραμόρφωσή του) ή η τελική αστοχία του, είναι συνάρτηση των εσωτερικών δυνάμεων, οι οποίες με τη σειρά τους είναι συνάρτηση των εξωτερικών δυνάμεων που επιβάλλονται στο σώμα. Οι εξωτερικά επιβαλλόμενες δυνάμεις χωρίζονται σε:

1. *Μαζικές δυνάμεις* που συνδέονται με τη μάζα του σώματος, δηλαδή είναι κατανεμημένες σ' όλο τον όγκο του σώματος. Δεν προκύπτουν από την επαφή του σώματος με άλλα σώματα. Παραδείγματα τέτοιων δυνάμεων είναι γενικά οι δυνάμεις πεδίου όπως οι δυνάμεις βαρύτητας και οι μαγνητικές δυνάμεις, αλλά και οι αδρανειακές δυνάμεις. Μετρώνται σε δύναμη ανά μονάδα όγκου και θα συμβολίζουμε τις συνιστώσες της κατανομής τους ανά μονάδα όγκου, κατά τους  $x$ ,  $y$  και  $z$  άξονες ενός καρτεσιανού συστήματος αναφοράς, με  $F_x$ ,  $F_y$  και  $F_z$  αντίστοιχα.
2. *Επιφανειακές δυνάμεις* που προκύπτουν από τη φυσική επαφή μεταξύ δύο σωμάτων και ασκούνται στην εξωτερική επιφάνειά τους. Στο εσωτερικό ενός σώματος, παριστάνουν τη δύναμη που ασκείται σε μια «φανταστική» εσωτερική τομή - επιφάνεια, εμβαδού  $A$  (Σχήμα 1.1), από το τμήμα του σώματος που αποκόπηκε στο τμήμα του σώματος που μελετάμε.

Αν ένα φανταστικό επίπεδο κόβει ένα σώμα σε δύο τμήματα I και II και κάνουμε το διάγραμμα ελευθέρου σώματος του I, δηλαδή βάλουμε σ' αυτό τις δυνάμεις που ασκεί το II στο I και τις εξωτερικές δυνάμεις  $P$  και  $q_2$  που δέχεται το I, παρατηρούμε ότι οι επιφανειακές δυνάμεις  $P$  και  $q_2$  εξισορροποούνται από τη δύναμη που ασκεί το τμήμα II στο



Σχήμα 1.1: Εξωτερικές δυνάμεις και εσωτερική διατομή ενός στερεού σώματος

τμήμα I. Αυτή η δύναμη όμως κατανέμεται σ' ολόκληρη την κοινή επιφάνεια  $A$  μεταξύ των τμημάτων I και II. Κάθε στοιχειώδης επιφάνεια  $\Delta A$  της  $A$ , δέχεται δύναμη  $\Delta F$ . Η μέση τιμή της δύναμης ανά μονάδα επιφάνειας είναι

$$p_{ave} = \frac{\Delta F}{\Delta A} \quad (1.1)$$

Η τάση σ' ένα σημείο  $\Delta A$  ορίζεται ως η οριακή τιμή της μέσης δύναμης ανά μονάδα επιφάνειας, καθώς η επιφάνεια  $\Delta A$  τείνει στο 0, δηλαδή

$$p = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta A} = \frac{dF}{dA} \quad (1.2)$$

Η δύναμη  $dF$  δεν είναι αναγκαστικά κάθετη ή εφαπτόμενη στην επιφάνεια  $dA$  πάνω στην οποία δρα. Η τάση  $p$  όπως ορίστηκε εδώ, που ασκείται πάνω σε επιφάνεια  $dA$ , είναι ένα διάνυσμα που έχει τη διεύθυνση και φορά του διανύσματος της δύναμης  $dF$ . Το διάνυσμα

$$\vec{p} = \frac{d\vec{F}}{dA} \quad (1.3)$$

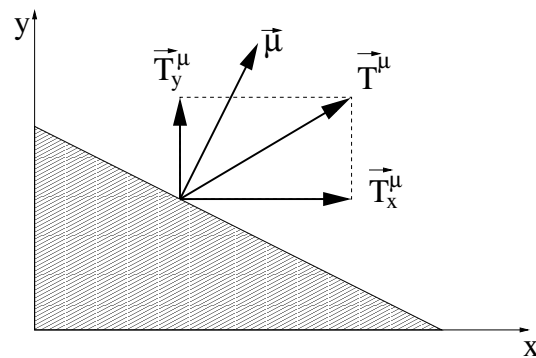
ονομάζεται *διάνυσμα τάσης*.

Τις συνιστώσες του διανύσματος τάσης που ασκείται στην εξωτερική επιφάνεια ενός σώματος, συμβολίζουμε με  $T_x^\mu$ ,  $T_y^\mu$  και  $T_z^\mu$ .  $\vec{\mu}$  είναι το προς τα έξω μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στην επιφάνεια (Σχήμα 1.2). Η τάση σε εσωτερική επιφάνεια έχει συνιστώσες  $p_x$ ,  $p_y$  και  $p_z$ .

Περισσότερο σημαντικές στην πράξη είναι οι *ορθές* και οι *διατμητικές* συνιστώσες του διανύσματος τάσης. Με  $\sigma$  συμβολίζουμε την ορθή τάση, δηλαδή τη συνιστώσα της τάσης που είναι κάθετη στο επίπεδο όπου αυτή (η τάση) εφαρμόζεται. Η διατμητική συνιστώσα της τάσης συμβολίζεται με  $\tau$  και κείται πάνω στην επιφάνεια όπου αυτή δρα (Σχήμα 1.3). Προφανώς ισχύει

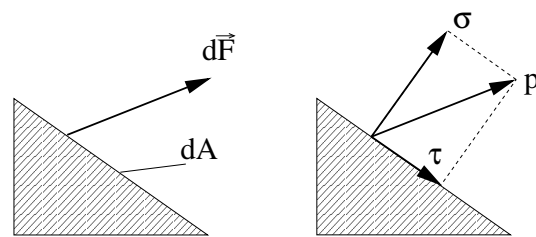
$$p^2 = \sigma^2 + \tau^2 \quad (1.4)$$





Σχήμα 1.2: Το διάνυσμα τάσης  $\vec{T}^\mu$  στην εξωτερική επιφάνεια ενός δι-διάστατου σώματος

Ας δούμε τώρα μια τρισδιάστατη εντατική κατάσταση όπως παρου-

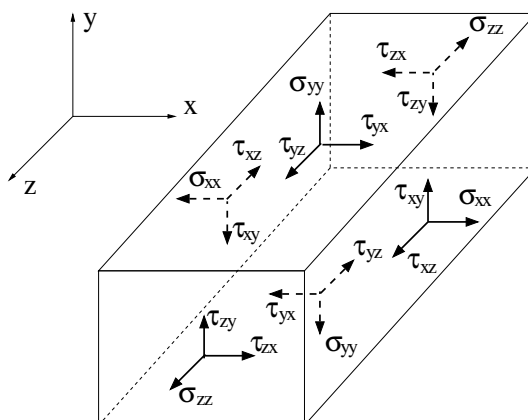


Σχήμα 1.3: Η ορθή και η διατμητική τάση

σιάζεται στο παρακάτω ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο (Σχήμα 1.4). Τα επίπεδα ονομάζονται, σύμφωνα με τη διεύθυνση και φορά του προς τα έξω μοναδιαίου, κάθετου διανύσματος σ' αυτά. Το προς τα έξω μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα, δείχνει μακριά από το εσωτερικό του σώματος. Η δεξιά έδρα του ορθογωνίου ονομάζεται θετική κατά  $x$  έδρα, ενώ η αριστερή έδρα του ορθογωνίου ονομάζεται αρνητική κατά  $x$  έδρα, διότι το προς τα έξω μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα σ' αυτή, έχει την αρνητική διεύθυνση του άξονα  $x$ . Θετικές θεωρούνται οι τάσεις που δρουν σε θετικές έδρες και έχουν φορά τη θετική φορά των αξόνων, η δρουν σε αρνητικές έδρες και έχουν φορά την αρνητική φορά των αξόνων. Ο πρώτος δείκτης στις τάσεις αναφέρεται στο επίπεδο όπου αυτές ασκούνται, ενώ ο δεύτερος δείκτης αναφέρεται στη διεύθυνση της τάσης.

## 1.2 Ομοιόμορφη εντατική κατάσταση

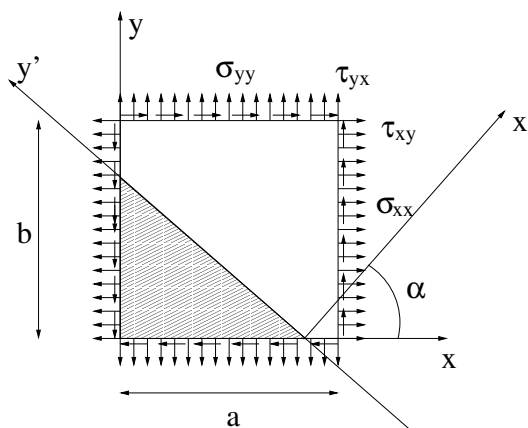
Αν η εντατική κατάσταση σ' ένα σώμα είναι ίδια σε κάθε σημείο του, δηλαδή αν οι τάσεις είναι ανεξάρτητες από τις χωρικές συντεταγμέ-



Σχήμα 1.4: Απεικόνιση τάσεων πάνω στις έδρες ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου

νες  $x$ ,  $y$  και  $z$ , τότε λέμε ότι έχουμε *ομοιόμορφη* εντατική κατάσταση. Στην ομοιόμορφη εντατική κατάσταση, οι μαζικές δυνάμεις είναι ίσες με μηδέν.

Έστω ότι, στο επίπεδο  $xy$ , έχουμε την ομοιόμορφη εντατική κατάσταση του Σχήματος 1.5. Επειδή έχουμε επίπεδη εντατική κατάσταση,



Σχήμα 1.5: Επίπεδη εντατική κατάσταση

ισχύει ότι

$$\tau_{xz} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0 \quad (1.5)$$

Η  $\sigma_{zz}$  μπορεί να είναι διάφορη του μηδενός, αλλά δεν την εξετάζουμε εδώ. Έστω ότι το ορθογώνιο του Σχήματος 1.5, έχει μοναδιαίο πάχος κάθετα στο χαρτί. Παίρνοντας ισορροπία ροπών ως προς την κάτω

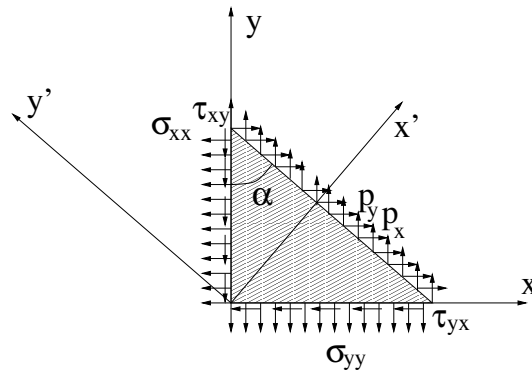
αριστερή κορυφή του ορθογωνίου έχω

$$\sigma_{xx}b\frac{b}{2} - \sigma_{xx}b\frac{b}{2} + \sigma_{yy}a\frac{a}{2} - \sigma_{yy}a\frac{a}{2} - \tau_{xy}ba + \tau_{yx}ab = 0 \Rightarrow \tau_{xy} = \tau_{yx} \quad (1.6)$$

Το αποτέλεσμα (1.6) είναι αρκετά γενικό για δύο κάθετα μεταξύ τους επίπεδα, όπου ισχύει ότι

$$\tau'_{xy} = \tau'_{yx} \quad (1.7)$$

Αναφερόμενοι στο Σχήμα 1.5, απομονώνουμε το κάτω αριστερά πρισματικό κομμάτι και θεωρούμε τις συνιστώσες  $p_x$  και  $p_y$  του διανύσματος τάσης στο επίπεδο  $x'$  (Σχήμα 1.6). Από στατική ισορροπία κατά  $x$



Σχήμα 1.6: Οι τάσεις στις έδρες πρίσματος τριγωνικής διατομής έχουμε

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow p_x A - \sigma_{xx} A \cos \alpha - \tau_{xy} A \sin \alpha = 0 \Rightarrow p_x = \sigma_{xx} \cos \alpha + \tau_{xy} \sin \alpha \quad (1.8)$$

Όμοια από ισορροπία κατά  $y$  παίρνουμε

$$p_y = \sigma_{yy} \sin \alpha + \tau_{xy} \cos \alpha \quad (1.9)$$

Αλλά η ορθή τάση στην έδρα  $x'$  είναι

$$\sigma'_{xx} = p_x \cos \alpha + p_y \sin \alpha \quad (1.10)$$

Από (1.8) - (1.10) παίρνουμε

$$\sigma'_{xx} = \sigma_{xx} \cos^2 \alpha + \sigma_{yy} \sin^2 \alpha + 2\tau_{xy} \sin \alpha \cos \alpha \quad (1.11)$$

Με όμοια διαδικασία βρίσκουμε ότι

$$\tau'_{xy} = (\sigma_{yy} - \sigma_{xx}) \sin \alpha \cos \alpha + \tau_{xy} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \quad (1.12)$$

Η  $\sigma'_{yy}$  βρίσκεται αν θέσουμε το  $\alpha + \frac{\pi}{2}$ , στη θέση του  $\alpha$  στην (1.11). Τότε προκύπτει τελικά ότι

$$\sigma'_{yy} = \sigma_{xx} \sin^2 \alpha + \sigma_{yy} \cos^2 \alpha - 2\tau_{xy} \sin \alpha \cos \alpha \quad (1.13)$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (1.11) και (1.13) παρατηρούμε ότι

$$\sigma'_{xx} + \sigma'_{yy} = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} = \text{σταθερό} \quad (1.14)$$

δηλαδή το άθροισμα των ορθών τάσεων σε δύο κάθετα μεταξύ τους επίπεδα, παραμένει αμετάβλητο όταν αλλάζει η γωνία  $\alpha$ .

Οι (1.11) - (1.13) γράφονται και ως

$$\sigma'_{xx} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} + \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \cos 2\alpha + \tau_{xy} \sin 2\alpha \quad (1.15)$$

$$\sigma'_{yy} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} - \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \cos 2\alpha - \tau_{xy} \sin 2\alpha \quad (1.16)$$

$$\tau'_{xy} = \frac{\sigma_{yy} - \sigma_{xx}}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha \quad (1.17)$$

### 1.2.1 Κύριες τάσεις

Για να βρούμε τα επίπεδα όπου αναπτύσσονται η μέγιστη και η ελάχιστη ορθή τάση, παραγωγίζουμε τη σχέση (1.15) ως προς  $\alpha$ , δηλαδή

$$\frac{d\sigma'_{xx}}{d\alpha} = -(\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) \sin 2\alpha + 2\tau_{xy} \cos 2\alpha = 0 \Rightarrow \tan 2\alpha = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}} \quad (1.18)$$

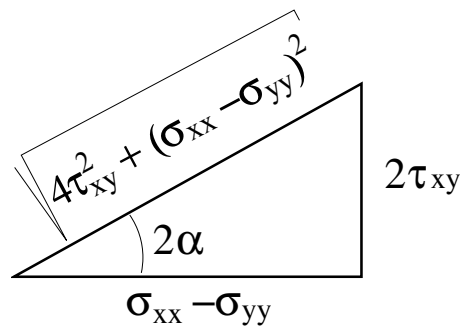
Οι δύο λύσεις  $\alpha$  της (1.18) διαφέρουν κατά  $90^\circ$ , δηλαδή η μέγιστη και η ελάχιστη τάση προκύπτουν σε κάθετα μεταξύ τους επίπεδα. Από τις (1.17) και (1.18) προκύπτει αμέσως ότι η διατμητική τάση στα επίπεδα αυτά είναι ίση με μηδέν. Τα επίπεδα αυτά λέγονται *κύρια επίπεδα* και οι ορθές τάσεις που ασκούνται πάνω σ' αυτά λέγονται *κύριες τάσεις*. Τα ημίτονα και συνημίτονα που αντιστοιχούν στη γωνία που ορίζεται από την (1.18), είναι

$$\sin 2\alpha = \pm \frac{2\tau_{xy}}{\sqrt{4\tau_{xy}^2 + (\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2}} \quad (1.19)$$

$$\cos 2\alpha = \pm \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{\sqrt{4\tau_{xy}^2 + (\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2}} \quad (1.20)$$

όπως φαίνεται από το Σχήμα 1.7. Παρατηρώντας ότι τα ημίτονα και συνημίτονα στις (1.19) και (1.20), πρέπει να είναι η και τα δύο θετικά η και τα δύο αρνητικά για να ισχύει η (1.18), αντικαθιστούμε τις (1.19) και (1.20) στις (1.15) και (1.16) και παίρνουμε

$$\sigma_{max} = \sigma_1 = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (1.21)$$



Σχήμα 1.7: Ορθογώνιο τρίγωνο που για το οποίο ισχύει η σχέση (1.18)

από τα θετικά  $\cos 2\alpha$ ,  $\sin 2\alpha$  και

$$\sigma_{min} = \sigma_2 = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (1.22)$$

από τα αρνητικά.

### 1.2.2 Ακρότατες διατμητικές τάσεις

Όπως εργαστήκαμε για την εύρεση των κυρίων τάσεων, έτσι και για τις ακρότατες διατμητικές παίρνουμε

$$\frac{d\tau'_{xy}}{d\alpha} = (\sigma_{yy} - \sigma_{xx}) \cos 2\alpha - 2\tau_{xy} \sin 2\alpha = 0 \Rightarrow \tan 2\alpha = -\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2\tau_{xy}} \quad (1.23)$$

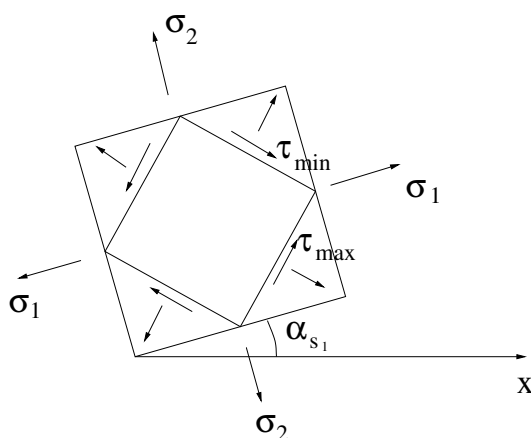
Η (1.23) δίνει δύο κάθετα μεταξύ τους επίπεδα, από τις δύο λύσεις ως προς  $\alpha$  της (1.23) που διαφέρουν κατά  $90^\circ$ , όπου αναπτύσσονται η  $\tau_{max}$  και η  $\tau_{min}$ . Από τις (1.18) και (1.23), προκύπτει ότι τα επίπεδα των ακρότατων διατμητικών τάσεων σχηματίζουν γωνία  $45^\circ$  με τα επίπεδα των κυρίων τάσεων. Από την τριγωνομετρία προκύπτει ότι

$$\alpha_{s_1} = \alpha_{p_1} - 45^\circ \quad (1.24)$$

όπου  $\alpha_{s_1}$  είναι ο προσανατολισμός του επιπέδου της  $\tau_{max}$  και  $\alpha_{p_1}$  είναι ο προσανατολισμός του επιπέδου της  $\sigma_1$  (Σχήμα 1.8). Από τις (1.17) και (1.23) προκύπτει ότι

$$\tau_{max} = +\sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = -\tau_{min} \quad (1.25)$$

Δηλαδή οι ακρότατες διατμητικές τάσεις, είναι ίσες και αντίθετες. Η  $\tau_{max}$  είναι η θετική.



Σχήμα 1.8: Επίπεδα κυρίων και ακρότατων διατμητικών τάσεων

Από τις (1.16) και (1.23), προκύπτει ότι στα επίπεδα των ακρότατων διατμητικών τάσεων, η ορθή τάση είναι

$$\sigma_{aver} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} \quad (1.26)$$

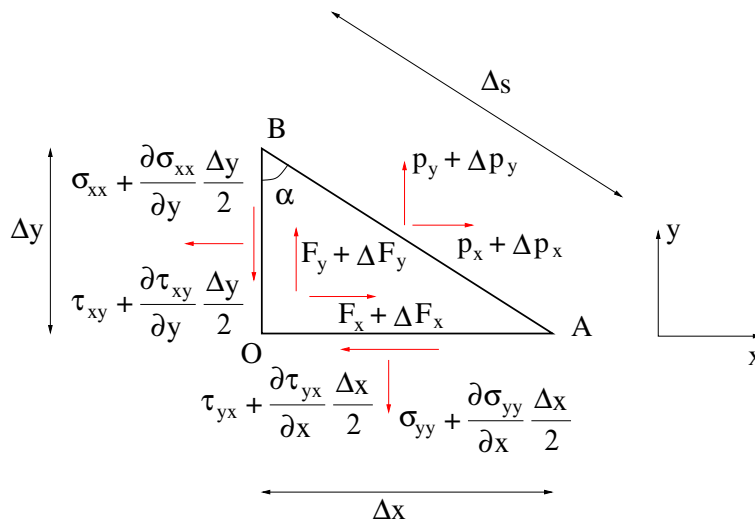
δηλαδή ίδια και στα δύο αυτά επίπεδα.

### 1.3 Εντατική κατάσταση σε σημείο

Θα δείξουμε ότι οι παραπάνω σχέσεις μετασχηματισμού των τάσεων ισχύουν και για μη ομοιόμορφη κατανομή των τάσεων, περιλαμβανομένης και της περίπτωσης ύπαρξης μαζικών δυνάμεων. Θεωρούμε την εντατική κατάσταση στο σημείο  $O$  (Σχήμα 1.9). Πάνω ακριβώς στο σημείο  $O$ , οι τάσεις είναι  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$  και  $\tau_{xy}$ .  $p_x$  και  $p_y$  είναι οι συνιστώσες του διανύσματος τάσης, που ασκείται σε επίπεδο που είναι παράλληλο στο  $AB$  και περνά από το σημείο  $O$ .  $F_x$  και  $F_y$  είναι οι συνιστώσες των μαζικών δυνάμεων στο  $O$ . Οι διαστάσεις του τριγωνικού στοιχείου  $AOB$ , είναι  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  και  $\Delta s$  και είναι μικρές ποσότητες. Στο όριο, αν  $\Delta x \rightarrow 0$  και  $\Delta y \rightarrow 0$  με τέτοιο τρόπο ώστε  $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \text{σταθερά}$ , (δηλαδή αν η  $AB$  πλησιάζει το  $O$  παραμένοντας παράλληλη προς την αρχική της θέση) το ευθύγραμμο τμήμα  $AB$  περνά από το  $O$ .

Από την ισορροπία δυνάμεων κατά  $x$  έχουμε

$$(p_x + \Delta p_x)\Delta s = \left(\sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial y} \frac{\Delta y}{2}\right)\Delta y + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} \frac{\Delta x}{2}\right)\Delta x - (F_x + \Delta F_x)\frac{\Delta x \Delta y}{2} \quad (1.27)$$

Σχήμα 1.9: Εντατική κατάσταση κοντά στο σημείο  $O$ 

Διαιρώ την (1.27) κατά μέλη με  $\Delta s$  και παίρνω

$$p_x + \Delta p_x = \left( \sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial y} \frac{\Delta y}{2} \right) \cos \alpha + \left( \tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \right) \sin \alpha - (F_x + \Delta F_x) \frac{\Delta x \cos \alpha}{2} \quad (1.28)$$

Καθώς  $\Delta x \rightarrow 0$  και  $\Delta y \rightarrow 0$ , αναγκαστικά έχουμε και ότι  $\Delta p_x \rightarrow 0$  και  $\Delta F_x \rightarrow 0$ . Έτσι η (1.28) δίνει

$$p_x = \sigma_{xx} \cos \alpha + \tau_{yx} \sin \alpha \quad (1.29)$$

Όμοια παίρουμε

$$p_y = \sigma_{yy} \sin \alpha + \tau_{xy} \cos \alpha \quad (1.30)$$

Οι (1.29) και (1.30) είναι ακριβώς ίδιες με τις (1.8) και (1.9). Θα δείξουμε σε επόμενο κεφάλαιο ότι  $\tau_{xy} = \tau_{yx}$  και συνεπώς οι (1.29) και (1.30) οδηγούν στις σχέσεις μετασχηματισμού (1.15) - (1.17).

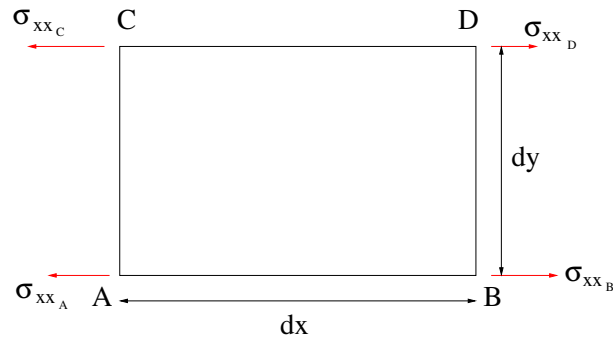
## 1.4 Διαφορικές εξισώσεις ισορροπίας

Γενικά οι τάσεις μεταβάλλονται από σημείο σε σημείο μέσα σ' ένα σώμα (Σχήμα 1.10). Έστω ότι η τάση στο A είναι  $\sigma_{xxA} = \sigma_{xx}$ . Τότε

$$\sigma_{xxB} = \sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx \quad (1.31)$$

$$\sigma_{xxC} = \sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial y} dy \quad (1.32)$$

$$\sigma_{xxD} = \sigma_{xxB} + \frac{\partial \sigma_{xxB}}{\partial y} dy \quad (1.33)$$

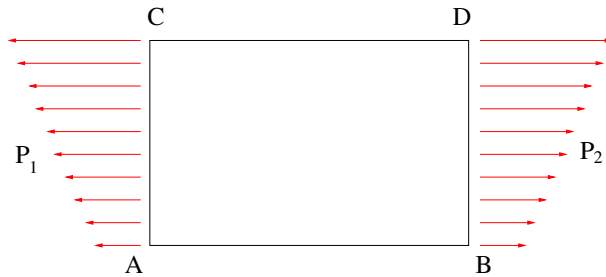


Σχήμα 1.10: Μεταβαλλόμενες τάσεις στη γειτονιά του σημείου A.

Από τις σχέσεις (1.31) και (1.33) παίρνουμε

$$\begin{aligned} \sigma_{xxD} &= \sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx \right) dy \implies \\ \sigma_{xxD} &= \sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial y} dy \end{aligned} \quad (1.34)$$

Η δύναμη  $P_1$  στην αριστερή πλευρά AC του στοιχείου (Σχήμα 1.11 είναι



Σχήμα 1.11: Δυνάμεις στη γειτονιά του σημείου A.

$$\begin{aligned} P_1 &= \left( \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial y} dy}{2} \right) dy \implies \\ P_1 &= \sigma_{xx} dy + \frac{1}{2} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial y} dy^2 \end{aligned} \quad (1.35)$$



Η δύναμη στη δεξιά πλευρά BD είναι

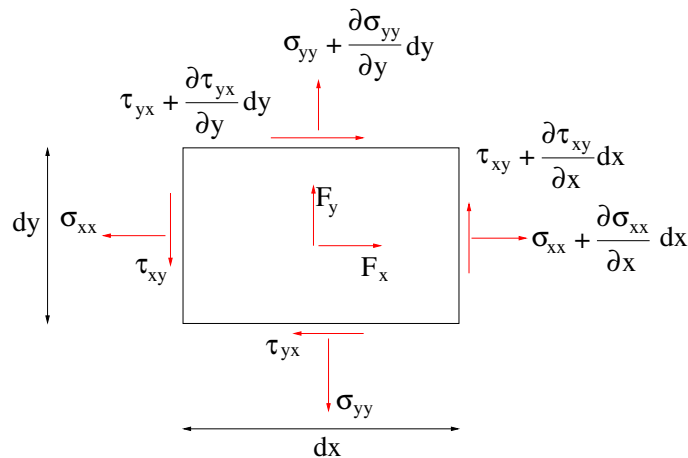
$$P_2 = \left( \frac{\sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx + \sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial y} dy}{2} \right) dy \Rightarrow$$

$$P_2 = \sigma_{xx} dy + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx dy + \frac{1}{2} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial y} dy^2 \quad (1.36)$$

Από τις (1.35) και (1.36) παίρνουμε

$$P_1 - P_2 = \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx dy \quad (1.37)$$

Θεωρώ τώρα ότι οι μέσες τάσεις στην αριστερή και στη δεξιά πλευρά του στοιχείου, στο μέσο καθ' ύψος του στοιχείου, είναι  $\sigma_{xx}$  και  $\left( \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx + \sigma_{xx} \right)$  αντίστοιχα. Τότε προκύπτει πάλι η (1.37). Έτσι χρησιμοποιούμε το απλοποιημένο σύστημα τάσεων, που φαίνεται στο Σχήμα 1.12, με ομοιόμορφες κατανομές σε κάθε πλευρά. Θεωρώντας ισορροπία δυνάμεων



Σχήμα 1.12: Ομοιόμορφες κατανομές τάσεων στις πλευρές ορθογώνιου στοιχείου.

ως προς  $x$ , γράφουμε

$$F_x dx dy + \left( \sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx \right) dy - \sigma_{xx} dy +$$

$$\left( \tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) dx - \tau_{yx} dx = 0 \quad (1.38)$$

και τελικά παίρνουμε

$$\left( \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + F_x \right) dx dy = 0. \quad (1.39)$$

Επειδή όμως  $dx dy \neq 0$ , παίρνουμε

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + F_x = 0 \quad (1.40)$$

Όμοια, από την ισορροπία κατά  $y$  παίρνουμε

$$\frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + F_y = 0 \quad (1.41)$$

Σε τρισδιάστατη εντατική κατάσταση οι (1.40) και (1.41) γενικεύονται στις

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + F_x = 0 \quad (1.42)$$

$$\frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + F_y = 0 \quad (1.43)$$

$$\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + F_z = 0 \quad (1.44)$$

Με αναφορά το Σχήμα 1.12, παίρνουμε την εξίσωση ισορροπίας ροπών ως προς το κάτω αριστερά γωνιακό σημείο του ορθογωνίου. Έτσι έχουμε

$$\left( \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} dy dx \right) \frac{dx}{2} - \left( \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx dy \right) \frac{dy}{2} + \left( \tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx \right) dy dx - \left( \tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) dx dy + F_y dx dy \frac{dx}{2} - F_x dx dy \frac{dy}{2} \quad (1.45)$$

Αγνοώντας τα γινόμενα τριών διαφορικών ως πολύ μικρές ποσότητες, παίρνω τελικά

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} \quad (1.46)$$

Μπορεί να δειχθεί και για τρισδιάστατη εντατική κατάσταση, ότι ισχύουν οι σχέσεις συμμετρίας

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} \quad (1.47)$$

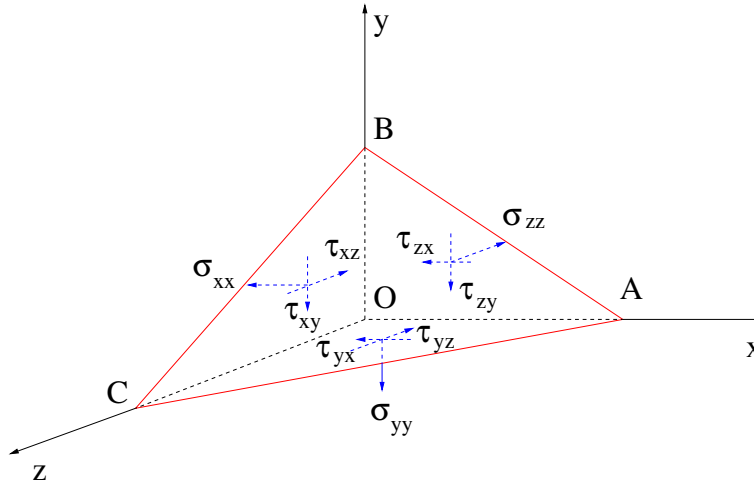
$$\tau_{xz} = \tau_{zx} \quad (1.48)$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} \quad (1.49)$$

Οι σχέσεις (1.42) - (1.44) και (1.47) - (1.49) αποτελούν σύστημα 3 εξισώσεων με 6 αγνώστους. Έτσι, με τα όσα έχουμε αναφέρει μέχρι τώρα, το πρόβλημα της εύρεσης της κατανομής των τάσεων μέσα σ' ένα σώμα, είναι στατικά απροσδιόριστο.

## 1.5 Τρισδιάστατη εντατική κατάσταση

Ο στόχος μας είναι να βρούμε τις τάσεις σ' ένα κεκλιμένο επίπεδο  $x'$ , αν οι τάσεις στα επίπεδα  $x$ ,  $y$  και  $z$  είναι γνωστές και η διεύθυνση  $x'$  είναι επίσης γνωστή (Σχήμα 1.13). Η διεύθυνση του επιπέδου ABC,



Σχήμα 1.13: Τάσεις στις έδρες τετράεδρου στοιχείου.

ορίζεται από τις γωνίες που σχηματίζει η κάθετος σ' αυτό (δηλαδή ο άξονας  $x'$ ), με τους άξονες  $x$ ,  $y$  και  $z$ . Ορίζουμε τα συνημίτονα των γωνιών αυτών με  $\alpha_{11}$ ,  $\alpha_{21}$  και  $\alpha_{31}$  αντίστοιχα.

Το εμβαδό του τριγώνου AOC συνδέεται με το εμβαδό του τριγώνου ABC με τη σχέση

$$A_{AOC} = A_{ABC} \cos(y, x') = A\alpha_{21} \quad (1.50)$$

Όμοια παίρνουμε και ότι

$$A_{AOB} = A\alpha_{31} \quad (1.51)$$

$$A_{BOC} = A\alpha_{11} \quad (1.52)$$

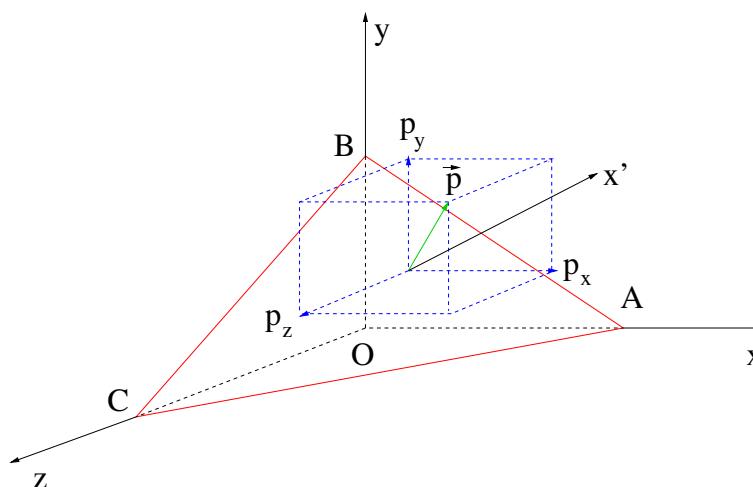
όπου  $A$  είναι η επιφάνεια του τριγώνου ABC και το σύμβολο  $(y, x')$  αναφέρεται στη γωνία μεταξύ των αξόνων  $y$  και  $x'$ .

Έστω τώρα ότι  $\vec{p}$  είναι το διάνυσμα τάσης που ασκείται στην έδρα ABC (Σχήμα 1.14). Οι συνιστώσες του  $\vec{p}$  ως προς το σύστημα  $x$ ,  $y$  και  $z$ , είναι  $p_x$ ,  $p_y$  και  $p_z$  αντίστοιχα. Από την ισορροπία δυνάμεων κατά  $x$ ,  $y$  και  $z$ , παίρνουμε

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow p_x = \sigma_{xx}\alpha_{11} + \tau_{yx}\alpha_{21} + \tau_{zx}\alpha_{31} \quad (1.53)$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow p_y = \tau_{xy}\alpha_{11} + \sigma_{yy}\alpha_{21} + \tau_{zy}\alpha_{31} \quad (1.54)$$

$$\sum F_z = 0 \Rightarrow p_z = \tau_{xz}\alpha_{11} + \tau_{yz}\alpha_{21} + \sigma_{zz}\alpha_{31} \quad (1.55)$$



Σχήμα 1.14: Ανάλυση του διανύσματος τάσης  $\vec{p}$  που ασκείται στην έδρα ABC.

Η  $\sigma'_{xx}$ , δηλαδή η ορθή τάση που ασκείται στην έδρα ABC, μπορεί να βρεθεί προβάλλοντας το  $\vec{p}$  πάνω στον άξονα  $x'$ . Εναλλακτικά, μπορούμε να προβάλλουμε τις συνιστώσες  $p_x$ ,  $p_y$  και  $p_z$  πάνω στον άξονα  $x'$  και να αθροίσουμε τις προβολές. Από τις (1.50) - (1.55) παίρνουμε

$$\sigma'_{xx} = \sigma_{xx}\alpha_{11}^2 + \sigma_{yy}\alpha_{21}^2 + \sigma_{zz}\alpha_{31}^2 + 2\tau_{xy}\alpha_{11}\alpha_{21} + 2\tau_{yz}\alpha_{21}\alpha_{31} + 2\tau_{zx}\alpha_{31}\alpha_{11} \quad (1.56)$$

Η διατμητική τάση πάνω στην ABC είναι

$$\tau^2 = p^2 - \sigma'^2_{xx} \quad (1.57)$$

όπου

$$p^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 \quad (1.58)$$

Αν θέλουμε να βρούμε και τη διεύθυνση της  $\tau$ , πρέπει να εισαγάγουμε ένα καινούργιο ορθογώνιο σύστημα  $x'$ ,  $y'$  και  $z'$ , όπου οι άξονες  $y'$  και  $z'$  κείνται πάνω στην έδρα ABC. Ορίζουμε έτσι τις διευθύνσεις  $x'$ ,  $y'$  και  $z'$  από τα συνημίτονα κατεύθυνσης που φαίνονται στον Πίνακα 1.1.

Στον Πίνακα 1.1, το  $\alpha_{11}$  είναι το συνημίτονο της γωνίας μεταξύ των αξόνων  $x$  και  $x'$ , το  $\alpha_{23}$  είναι το συνημίτονο της γωνίας μεταξύ των αξόνων  $y$  και  $z'$  κ.ο.κ. Συνοπτικά, ο πρώτος δείκτης στο συνημίτονο κατεύθυνσης αναφέρεται στον άξονα του αρχικού συστήματος και ο δεύτερος δείκτης στον άξονα του τελικού (στραμμένου) συστήματος. Προβάλλοντας το  $p$  πάνω στις διευθύνσεις  $y'$  και  $z'$ , παίρνουμε τις δια-

	$x'$	$y'$	$z'$
$x$	$\alpha_{11}$	$\alpha_{12}$	$\alpha_{13}$
$y$	$\alpha_{21}$	$\alpha_{22}$	$\alpha_{23}$
$z$	$\alpha_{31}$	$\alpha_{32}$	$\alpha_{33}$

Πίνακας 1.1: Τα συνημίτονα κατεύθυνσης των αξόνων του νέου συστήματος (τονούμενου) ως προς το αρχικό σύστημα (άτονο).

τμητικές τάσεις

$$\begin{aligned} \tau'_{xy} = & \sigma_{xx}\alpha_{11}\alpha_{12} + \sigma_{yy}\alpha_{21}\alpha_{22} + \sigma_{zz}\alpha_{31}\alpha_{32} \\ & \tau_{xy}(\alpha_{11}\alpha_{22} + \alpha_{21}\alpha_{12}) + \tau_{yz}(\alpha_{21}\alpha_{32} + \alpha_{31}\alpha_{22}) + \\ & \tau_{zx}(\alpha_{31}\alpha_{12} + \alpha_{11}\alpha_{32}) \end{aligned} \quad (1.59)$$

$$\begin{aligned} \tau'_{xz} = & \sigma_{xx}\alpha_{11}\alpha_{13} + \sigma_{yy}\alpha_{21}\alpha_{23} + \sigma_{zz}\alpha_{31}\alpha_{33} \\ & \tau_{xy}(\alpha_{11}\alpha_{23} + \alpha_{21}\alpha_{13}) + \tau_{yz}(\alpha_{21}\alpha_{33} + \alpha_{31}\alpha_{23}) + \\ & \tau_{zx}(\alpha_{31}\alpha_{13} + \alpha_{11}\alpha_{33}) \end{aligned} \quad (1.60)$$

Τα 9 συνημίτονα κατεύθυνσης δεν είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους. Θα δείξουμε αργότερα ότι μεταξύ τους ισχύουν οι σχέσεις:

$$\alpha_{11}^2 + \alpha_{21}^2 + \alpha_{31}^2 = 1 \quad (1.61)$$

$$\alpha_{12}^2 + \alpha_{22}^2 + \alpha_{32}^2 = 1 \quad (1.62)$$

$$\alpha_{13}^2 + \alpha_{23}^2 + \alpha_{33}^2 = 1 \quad (1.63)$$

$$\alpha_{11}\alpha_{12} + \alpha_{21}\alpha_{22} + \alpha_{31}\alpha_{32} = 0 \quad (1.64)$$

$$\alpha_{12}\alpha_{13} + \alpha_{22}\alpha_{23} + \alpha_{32}\alpha_{33} = 0 \quad (1.65)$$

$$\alpha_{11}\alpha_{13} + \alpha_{21}\alpha_{23} + \alpha_{31}\alpha_{33} = 0 \quad (1.66)$$

### 1.5.1 Κύριες τάσεις

Αναζητώ τα επίπεδα όπου η ορθή τάση παίρνει μέγιστη τιμή, δηλαδή αναζητώ τα επίπεδα των κυρίων τάσεων για τρισδιάστατη εντατική κατάσταση. Παραγωγίζω λοιπόν την (1.56) μια φορά ως προς  $\alpha_{11}$

και μια φορά ως προς  $\alpha_{21}$ . Ως προς  $\alpha_{31}$  δεν παραγωγίζουμε, διότι το  $\alpha_{31}$  εξαρτάται από τα  $\alpha_{11}$  και  $\alpha_{21}$  μέσα από τη σχέση (1.61). Τα αποτελέσματα των παραγωγίσεων τα εξισώνω με μηδέν και παίρνω

$$\frac{\alpha_{11}\sigma_{xx} + \alpha_{21}\tau_{xy} + \alpha_{31}\tau_{xz}}{\alpha_{11}} = \frac{\alpha_{11}\tau_{xy} + \alpha_{21}\sigma_{yy} + \alpha_{31}\tau_{yz}}{\alpha_{21}} = \frac{\alpha_{11}\tau_{xz} + \alpha_{21}\tau_{yz} + \alpha_{31}\sigma_{zz}}{\alpha_{31}} \quad (1.67)$$

Από τις (1.53) - (1.55), οι (1.67) γράφονται

$$\frac{p_x}{\alpha_{11}} = \frac{p_y}{\alpha_{21}} = \frac{p_z}{\alpha_{31}} \quad (1.68)$$

Η σχέση (1.68) δείχνει ότι το επίπεδο όπου η ορθή τάση παρουσιάζει ακρότατο, είναι κάθετο προς το διάνυσμα τάσης. Επομένως η διατημητική τάση είναι μηδέν στο επίπεδο αυτό. Έτσι αν  $\sigma_p$  είναι η ακρότατη τιμή της ορθής τάσης  $\sigma'_{xx}$ , ισχύουν οι σχέσεις

$$\sigma_p = \frac{p_x}{\alpha_{11}} = \frac{p_y}{\alpha_{21}} = \frac{p_z}{\alpha_{31}} \quad (1.69)$$

Από τις (1.53) - (1.55) και από την (1.69) βρίσκουμε

$$\alpha_{11}(\sigma_{xx} - \sigma_p) + \alpha_{21}\tau_{xy} + \alpha_{31}\tau_{xz} = 0 \quad (1.70)$$

$$\alpha_{11}\tau_{xy} + \alpha_{21}(\sigma_{yy} - \sigma_p) + \alpha_{31}\tau_{yz} = 0 \quad (1.71)$$

$$\alpha_{11}\tau_{xz} + \alpha_{21}\tau_{yz} + \alpha_{31}(\sigma_{zz} - \sigma_p) = 0 \quad (1.72)$$

Μη τετριμμένη λύση των (1.70) - (1.72) ως προς  $\alpha_{11}$ ,  $\alpha_{21}$ ,  $\alpha_{31}$ , (δηλαδή  $\alpha_{11} \neq 0$ ,  $\alpha_{21} \neq 0$ ,  $\alpha_{31} \neq 0$ ), υπάρχει μόνο αν η ορίζουσα των συντελεστών των αγνώστων είναι μηδέν, δηλαδή αν

$$\begin{aligned} & \sigma_p^3 - (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})\sigma_p^2 + \\ & (\sigma_{xx}\sigma_{yy} + \sigma_{yy}\sigma_{zz} + \sigma_{zz}\sigma_{xx} - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2)\sigma_p - \\ & (\sigma_{xx}\sigma_{yy}\sigma_{zz} + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} - \sigma_{xx}\tau_{yz}^2 - \sigma_{yy}\tau_{xz}^2 - \sigma_{zz}\tau_{xy}^2) = 0 \end{aligned} \quad (1.73)$$

Υπάρχουν πάντα τρεις πραγματικές ρίζες της (1.73). Αυτές αντιστοιχούν στις τρεις κύριες τάσεις που συμβολίζουμε με  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  και  $\sigma_3$ , όπου  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ .

Για την εύρεση των κυρίων επιπέδων, δηλαδή των επιπέδων όπου ασκούνται οι κύριες τάσεις, αντικαθιστούμε τις τιμές των  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $\sigma_3$  διαδοχικά στις (1.70) - (1.72). Βέβαια δύο μόνο από τις τρεις εξισώσεις (1.70) - (1.72) παραμένουν ανεξάρτητες, διότι η ορίζουσα των συντελεστών των αγνώστων είναι μηδέν. Ως τρίτη εξίσωση χρησιμοποιούμε την

$$\alpha_{11}^2 + \alpha_{21}^2 + \alpha_{31}^2 = 0 \quad (1.74)$$

για κάθε τιμή της  $\sigma_p$ .

Παρατηρούμε ότι η (1.73) ορίζει τις τρεις τιμές  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  και  $\sigma_3$  της  $\sigma_p$ , ανεξάρτητα από τον προσανατολισμό του συστήματος συντεταγμένων  $Oxyz$ . Δηλαδή οι ποσότητες μέσα στις παρενθέσεις στη (1.73), παραμένουν αναλλοίωτες ως προς τα συστήματα συντεταγμένων και επομένως

$$\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz} = \sigma'_{xx} + \sigma'_{yy} + \sigma'_{zz} \quad (1.75)$$

$$\sigma_{xx}\sigma_{yy} + \sigma_{yy}\sigma_{zz} + \sigma_{zz}\sigma_{xx} - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2 = \sigma'_{xx}\sigma'_{yy} + \sigma'_{yy}\sigma'_{zz} + \sigma'_{zz}\sigma'_{xx} - \tau'^2_{xy} - \tau'^2_{yz} - \tau'^2_{zx} \quad (1.76)$$

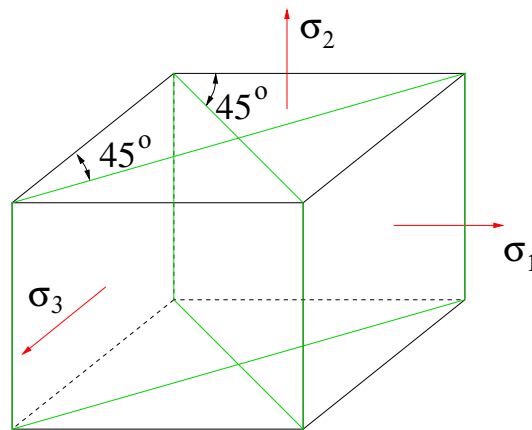
$$\sigma_{xx}\sigma_{yy}\sigma_{zz} + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} - \sigma_{xx}\tau_{yz}^2 - \sigma_{yy}\tau_{xz}^2 - \sigma_{zz}\tau_{xy}^2 = \sigma'_{xx}\sigma'_{yy}\sigma'_{zz} + 2\tau'_{xy}\tau'_{yz}\tau'_{zx} - \sigma'_{xx}\tau'^2_{yz} - \sigma'_{yy}\tau'^2_{xz} - \sigma'_{zz}\tau'^2_{xy} \quad (1.77)$$

### 1.5.2 Ακρότατες διατμητικές τάσεις

Τα επίπεδα των ακρότατων διατμητικών τάσεων, μπορούν να βρεθούν αν παραγωγίσουμε την (1.57) ως προς  $\alpha_{11}$  και ως προς  $\alpha_{21}$ . Τα αποτελέσματα των παραγωγίσεων τα θέτουμε ίσα με μηδέν. Προκύπτει τότε ότι η μέγιστη διατμητική τάση είναι

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \quad (1.78)$$

όπου  $\sigma_1$  είναι η μέγιστη κύρια τάση και  $\sigma_3$  είναι η ελάχιστη κύρια τάση. Η  $\tau_{max}$  ασκείται σε επίπεδο που διχοτομεί τα επίπεδα της μέγιστης και της ελάχιστης κύριας τάσης (Σχήμα 1.15). Στην εξαγωγή αυτού του



Σχήμα 1.15: Επίπεδα ακρότατων διατμητικών τάσεων (με πράσινο χρώμα).

αποτελέσματος θεωρούμε σαν αρχικό σύστημα, το κύριο σύστημα τάσεων.

## 1.6 Ασκήσεις

### 1.6.1 Άσκηση

Δείξτε ότι οι τάσεις

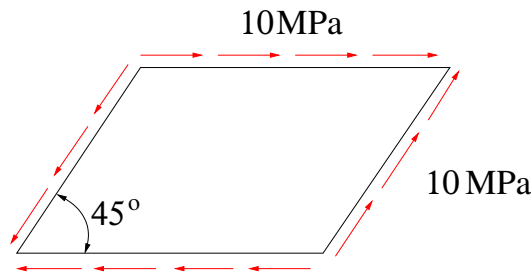
$$\sigma_{xx} = \sigma'_{xx} = \sigma_0 \quad (1.79)$$

$$\tau_{xy} = -\tau'_{xy} = \tau_0 \neq 0 \quad (1.80)$$

δεν ορίζουν την εντατική κατάσταση σ' ένα σημείο. (Υπόδειξη: Δείξτε ότι με τις δεδομένες τάσεις, δεν είναι δυνατό να προσδιοριστεί η γωνία  $\alpha$ .) Δείξτε ότι οι παραπάνω τάσεις, ορίζουν την εντατική κατάσταση σ' ένα σημείο, αν είναι δεδομένη και η γωνία  $\alpha$ .

### 1.6.2 Άσκηση

Λεπτή πλάκα βρίσκεται υπό ομοιόμορφη εντατική κατάσταση όπως στο Σχήμα 1.16. Να βρεθούν οι κύριες τάσεις και οι κύριες διευθύνσεις.



Σχήμα 1.16: Λεπτή πλάκα υπό ομοιόμορφη διάτμηση.

### 1.6.3 Άσκηση

Δίνεται η παρακάτω τρισδιάστατη εντατική κατάσταση

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} = 8MPa, \quad \sigma_{zz} = -6MPa, \quad \sigma_{yy} = -2MPa, \\ \tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \end{aligned} \quad (1.81)$$

Να βρεθούν οι τάσεις ως προς νέο σύστημα αξόνων  $x', y', z'$ , όπου

$$\alpha_{11} = \frac{2}{\sqrt{5}}, \quad \alpha_{12} = \frac{-1}{\sqrt{5}}, \quad \alpha_{33} = +1 \quad (1.82)$$



## Κεφάλαιο 2

# Ανάλυση παραμορφώσεων και μετατοπίσεων

### 2.1 Σχέσεις παραμορφώσεων και μετατοπίσεων

Ένα σώμα λέμε ότι παραμορφώνεται όταν οι σχετικές θέσεις των υλικών σημείων του αλλάζουν. Αυτή η κατάσταση είναι διαφορετική από την κίνηση στερεού σώματος, όπου η απόσταση μεταξύ δύο σημείων του παραμένει αμετάβλητη. Όταν ασκούνται δυνάμεις  $\sigma'$  ένα σώμα, η θέση κάθε σημείου του σώματος γενικά αλλάζει. Η μετατόπισή ενός σημείου είναι, το διάνυσμα από την αρχική μέχρι την τελική θέση του σημείου. Συμβολίζουμε τις συνιστώσες της μετατόπισης κατά  $x$ ,  $y$  και  $z$  με  $u$ ,  $v$  και  $w$  αντίστοιχα.

Θεωρούμε ράβδο που υπόκειται σε μονοαξονική ένταση (Σχήμα 2.1). Τα σημεία  $A$  και  $B$  παίρνουν τις θέσεις  $A'$  και  $B'$  αντίστοιχα, στην παραμορφωμένη κατάσταση. Ορίζοντας την ορθή παραμόρφωση  $\epsilon_{xx}$ , ως την ανηγμένη αλλαγή μήκους, έχουμε

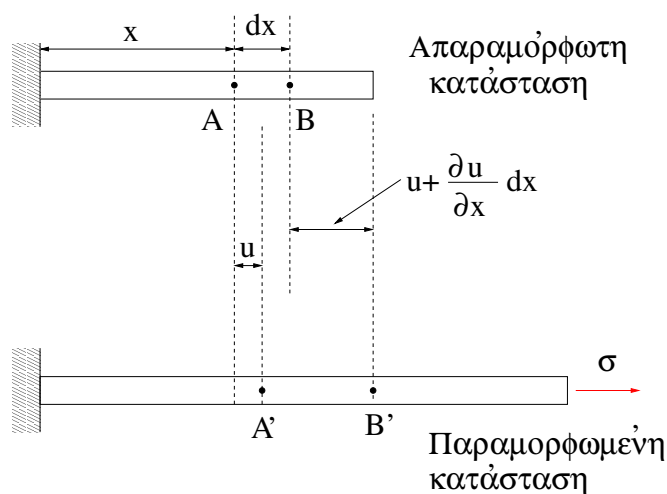
$$\epsilon_{xx} = \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) dx}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2.1)$$

Οι δύο δείκτες αναφέρονται στη διεύθυνση της ίνας  $AB$  του υλικού στην απαραμόρφωτη κατάσταση.

Έστω τώρα επίπεδη εντατική κατάσταση που ορίζεται από τις εξισώσεις

$$u = u(x, y, z), \quad v = v(x, y, z), \quad w = 0 \quad (2.2)$$

Θεωρούμε την παραμόρφωση και μετατόπιση του στοιχειώδους ορθογωνίου  $ABCD$  που παίρνει την τελική θέση  $A'B'C'D'$  (Σχήμα 2.2). Η παραμόρφωση έχει δύο διακεκριμένους τύπους. Ο πρώτος τύπος παραμόρφωσης σχετίζεται με την αλλαγή του μήκους των πλευρών



Σχήμα 2.1: Ράβδος υπό μονοαξονική ένταση.

του ορθογωνίου και ο δεύτερος τύπος παραμόρφωσης συνδέεται με τη στροφή της μιας πλευράς ως προς την άλλη. Η *ορθή παραμόρφωση (τροπή)* σε δεδομένη διεύθυνση ορίζεται ως η ανηγμένη αλλαγή μήκους (δηλαδή η αλλαγή μήκους ανά μονάδα αρχικού μήκους), μιας γραμμής υλικού που αρχικά ήταν προσανατολισμένη στη δεδομένη διεύθυνση. Η *διατμητική παραμόρφωση (τροπή)* ορίζεται ως η μεταβολή της αρχικά ορθής γωνίας μεταξύ δύο αξόνων (η γωνία μετριέται σε ακτίνια). Η διατμητική παραμόρφωση είναι θετική αν η ορθή γωνία μεταξύ των θετικών ημιαξόνων, μειώνεται. Γωνίες γραφόμενες κατά την αντιωρολογιακή φορά θεωρούνται θετικές, γι' αυτό και χρησιμοποιούμε το  $-\lambda$  στο Σχήμα 2.2. Σύμφωνα με το Σχήμα 2.2 έχουμε:

$$\epsilon_{xx} = \frac{A'B' - AB}{AB} = \frac{A'B' - dx}{dx} \quad (2.3)$$

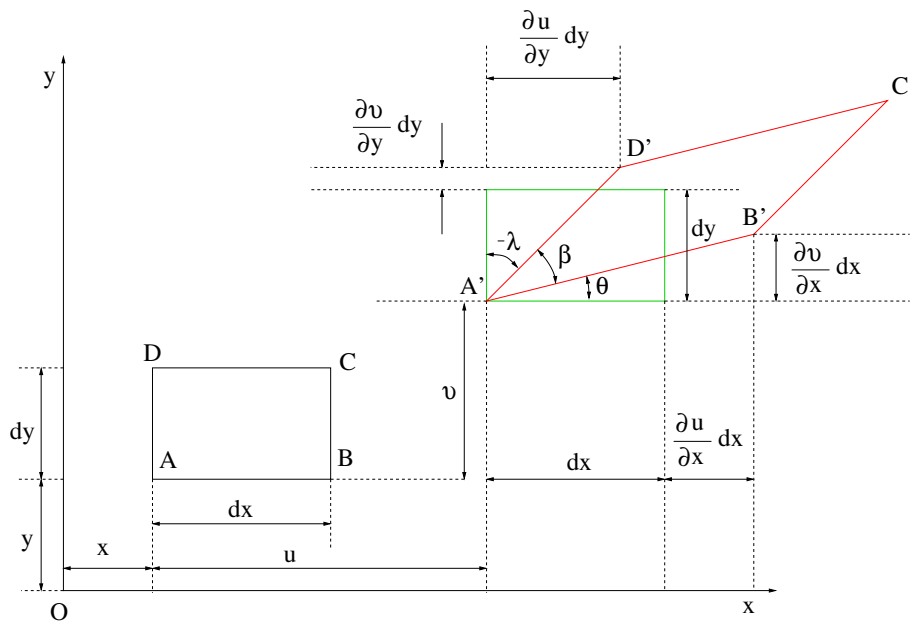
$$\epsilon_{yy} = \frac{A'D' - AD}{AD} = \frac{A'D' - dy}{dy} \quad (2.4)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\pi}{2} - \beta = \theta - \lambda \quad (2.5)$$

Στη γραμμική θεωρία της ελαστικότητας που θα εξετάσουμε, θεωρούμε ότι οι παραμορφώσεις και οι χωρικές παράγωγοι των μετατοπίσεων είναι μικρές ποσότητες. Έστω  $u$  και  $v$  οι μετατοπίσεις του σημείου A. Οι μετατοπίσεις του B θα είναι

$$u + \frac{\partial u}{\partial x} dx \quad (2.6)$$

$$v + \frac{\partial v}{\partial x} dx \quad (2.7)$$



Σχήμα 2.2: Μετατόπιση και παραμόρφωση ορθογώνιου στοιχείου.

και οι μετατοπίσεις του D θα είναι

$$u + \frac{\partial u}{\partial y} dy \quad (2.8)$$

$$v + \frac{\partial v}{\partial y} dy \quad (2.9)$$

Έτσι έχουμε

$$\begin{aligned} (A'B')^2 &= [dx(1 + \epsilon_{xx})]^2 = \left(dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} dx\right)^2 \Rightarrow \\ \epsilon_{xx}^2 + 2\epsilon_{xx} + 1 &= 1 + 2\frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 \Rightarrow \\ \epsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2.10) \end{aligned}$$

αγνοώντας όρους με δυνάμεις  $\geq 2$ , πολύ μικρούς. Με παρόμοια διαδικασία παίρνουμε

$$\epsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (2.11)$$

Από το Σχήμα 2.2 παρατηρούμε ότι

$$\theta = \frac{\frac{\partial v}{\partial x} dx}{dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx} \quad (2.12)$$

διότι για μικρές γωνίες  $\theta$  ισχύει ότι  $\theta = \tan \theta$ . Από την (2.12) προκύπτει ότι

$$\theta = \frac{\partial v}{\partial x} \quad (2.13)$$

και με παρόμοιο τρόπο μπορούμε να δείξουμε ότι

$$\lambda = -\frac{\partial u}{\partial y} \quad (2.14)$$

Από τις (2.13), (2.14) και (2.10) παίρνουμε τη σχέση

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (2.15)$$

όπου οι μερικές παράγωγοι στη (2.15) είναι θετικές αν οι AB και AD στρέφονται η μια προς την άλλη, δηλαδή όταν οι  $u$  και  $v$  αυξάνονται όταν αυξάνεται το  $y$  και το  $x$  αντίστοιχα.

Γενικεύοντας σε τρεις διαστάσεις έχουμε τις σχέσεις

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2.16)$$

$$\epsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (2.17)$$

$$\epsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (2.18)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (2.19)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \quad (2.20)$$

$$\gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \quad (2.21)$$

Από τις (2.19) - (2.21) παρατηρούμε ότι ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις συμμετρίας:

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx} \quad (2.22)$$

$$\gamma_{yz} = \gamma_{zy} \quad (2.23)$$

$$\gamma_{zx} = \gamma_{xz} \quad (2.24)$$

## 2.2 Εξισώσεις συμβιβαστού

Αν δοθούν οι συνιστώσες της μετατόπισης  $u$ ,  $v$  και  $w$  σαν συναρτήσεις των  $x$ ,  $y$  και  $z$ , μπορούμε να βρούμε τις έξι συνιστώσες της παραμόρφωσης από  $\epsilon_{xx}$ ,  $\epsilon_{yy}$ ,  $\epsilon_{zz}$ ,  $\gamma_{xy}$ ,  $\gamma_{yz}$  και  $\gamma_{zx}$  από τις σχέσεις (2.16) -

(2.21). Αν δοθούν όμως οι έξι συνιστώσες της παραμόρφωσης σαν συναρτήσεις των  $x, y$  και  $z$  και ζητάμε να βρούμε τις μετατοπίσεις  $u, v$  και  $w$ , έχουμε να λύσουμε ένα σύστημα έξι εξισώσεων με τρεις αγνώστους. Ένα τέτοιο σύστημα δεν έχει λύση εκτός αν οι συνιστώσες της παραμόρφωσης συνδέονται μεταξύ τους με κάποιες σχέσεις.

Παραγωγίζοντας την (2.16) δύο φορές ως προς  $y$ , την (2.17) δύο φορές ως προς  $x$  και προσθέτοντας τις προκύπτουσες σχέσεις κατά μέλη, παίρνουμε

$$\frac{\partial^2 \epsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{yy}}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 u}{\partial y^2 \partial x} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} \quad (2.25)$$

Από την (2.19) παίρνουμε

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (2.26)$$

Από τις (2.25) και (2.26) προκύπτει ότι

$$\frac{\partial^2 \epsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{yy}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (2.27)$$

Όμοια δείχνουμε ότι ισχύουν και οι σχέσεις

$$\frac{\partial^2 \epsilon_{yy}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{zz}}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} \quad (2.28)$$

$$\frac{\partial^2 \epsilon_{zz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{xx}}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x} \quad (2.29)$$

$$2 \frac{\partial^2 \epsilon_{xx}}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) \quad (2.30)$$

$$2 \frac{\partial^2 \epsilon_{yy}}{\partial z \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) \quad (2.31)$$

$$2 \frac{\partial^2 \epsilon_{zz}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) \quad (2.32)$$

Οι σχέσεις (2.27) - (2.32) είναι οι εξισώσεις συμβιβαστού των παραμορφώσεων. Οι συνιστώσες της παραμόρφωσης  $\epsilon_{xx}, \epsilon_{yy}, \epsilon_{zz}, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}$  και  $\gamma_{zx}$  πρέπει να ικανοποιούν τις (2.27) - (2.32) έτσι ώστε να είναι ολοκληρωσιμες και να μπορούν να δώσουν τις συσυστιώσες των μετατοπίσεων  $u, v$  και  $w$ .

## 2.3 Παραμορφώσεις σε σημείο

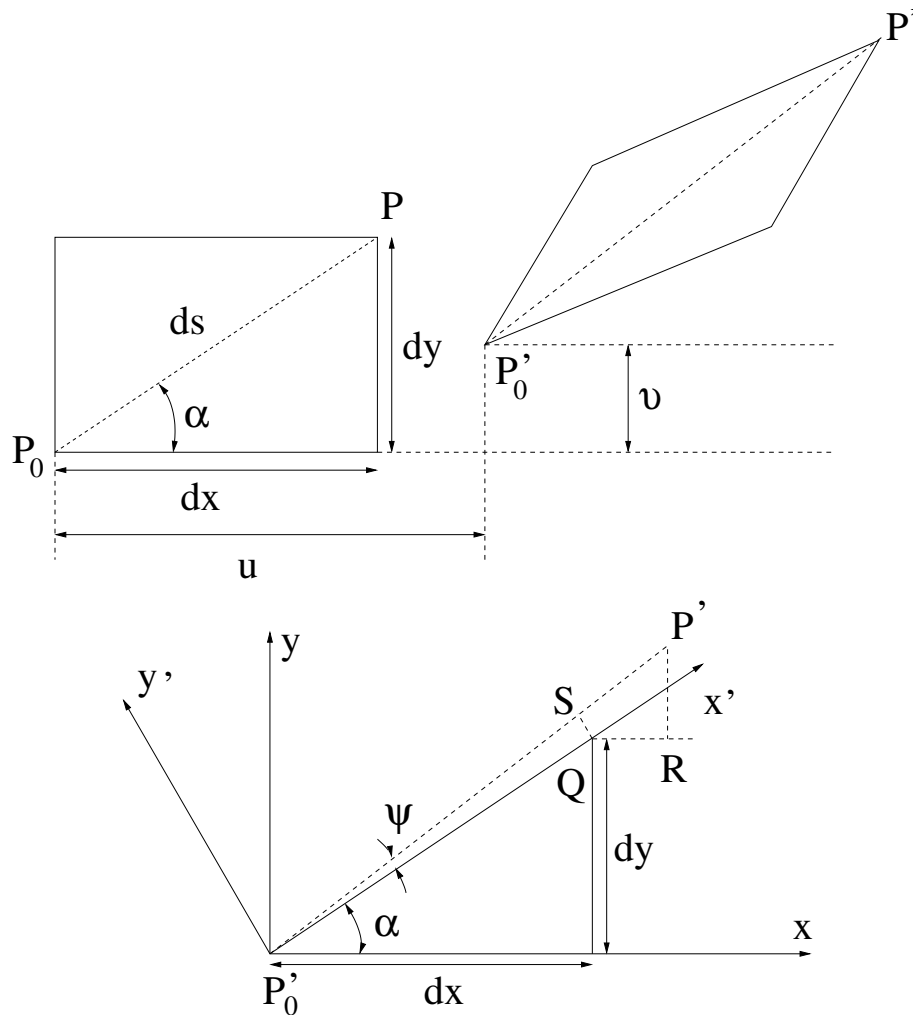
Σε κατάσταση επίπεδης παραμόρφωσης, δηλαδή όταν  $u = u(x, y)$ ,  $v = v(x, y)$  και  $w = 0$ , αν δίνονται τα στοιχεία  $\epsilon_{xx}, \epsilon_{yy}$  και  $\gamma_{xy}$  σ' ένα

σημείο του σώματος, είναι δυνατό να βρούμε τις παραμορφώσεις σ' ένα στοιχείο προσανατολισμένο σ' οποιαδήποτε διεύθυνση στο σημείο αυτό. Σε στοιχειώδες ορθογώνιο στοιχείο (Σχήμα 2.3, αν οι μετατοπίσεις του σημείου  $P_0$  είναι  $u$  και  $v$ , τότε οι μετατοπίσεις του σημείου  $P$  θα είναι

$$u + \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy \quad (2.33)$$

$$v + \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy \quad (2.34)$$

Αναζητούμε τις παραμορφώσεις  $\epsilon'_{xx}$ ,  $\epsilon'_{yy}$  και  $\gamma'_{xy}$  ως προς το σύστημα



Σχήμα 2.3: Μετατοπίσεις και παραμορφώσεις στη γειτονιά του σημείου  $P_0$ .

$x'y'$ . Ισχύουν οι σχέσεις

$$QR = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy \quad (2.35)$$

$$RP' = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy \quad (2.36)$$

Προβάλλουμε τα  $QR$  και  $RP'$  στη διεύθυνση  $x'$  και παίρνουμε

$$P'S \cos \psi = QR \cos \alpha + RP' \sin \alpha \quad (2.37)$$

Αλλά

$$\cos \psi \simeq 1 \quad (2.38)$$

διότι το  $\psi$  είναι πολύ μικρό. Έτσι από τις (2.35) - (2.38) παίρνουμε

$$\begin{aligned} \epsilon'_{xx} &= \frac{P'S}{ds} = \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{ds} \right) \cos \alpha + \\ &\quad \left( \frac{\partial v}{\partial y} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{dx}{ds} \right) \sin \alpha \implies \\ \epsilon'_{xx} &= \epsilon_{xx} \cos^2 \alpha + \epsilon_{yy} \sin^2 \alpha + \gamma_{xy} \sin \alpha \cos \alpha \end{aligned} \quad (2.39)$$

διότι

$$\frac{dy}{ds} = \sin \alpha \quad (2.40)$$

$$\frac{dx}{ds} = \cos \alpha \quad (2.41)$$

$$(2.42)$$

Η (2.39) γράφεται και ως

$$\epsilon'_{xx} = \frac{\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy}}{2} + \frac{\epsilon_{xx} - \epsilon_{yy}}{2} \cos 2\alpha + \frac{\gamma_{xy}}{2} \sin 2\alpha \quad (2.43)$$

Αν θέσουμε όπου  $\alpha$  το  $\alpha + \frac{\pi}{2}$  στην (2.43) παίρνουμε τη σχέση

$$\epsilon'_{yy} = \frac{\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy}}{2} - \frac{\epsilon_{xx} - \epsilon_{yy}}{2} \cos 2\alpha - \frac{\gamma_{xy}}{2} \sin 2\alpha \quad (2.44)$$

Σχετικά με τη διαμητική παραμόρφωση  $\gamma'_{xy}$ , γράφουμε αρχικά

$$\tan \psi \simeq \psi = \frac{QS}{ds} = \frac{(RP') \cos \alpha - (QR) \sin \alpha - (P'S)\psi}{ds} \quad (2.45)$$

Αλλά

$$(P'S)\psi = \epsilon'_{xx} ds\psi \quad (2.46)$$

και είναι αμελητέο σε σχέση με τους υπόλοιπους όρους της (2.45). Έτσι προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}\psi &= \left( \frac{\partial v}{\partial y} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{ds} \right) \cos \alpha - \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{ds} \right) \sin \alpha \implies \\ \psi &= -(\epsilon_{xx} - \epsilon_{yy}) \sin \alpha \cos \alpha + \frac{\partial v}{\partial x} \cos^2 \alpha - \frac{\partial u}{\partial y} \sin^2 \alpha\end{aligned}\quad (2.47)$$

Η (2.47) εκφράζει τη στροφή (γωνιακή μετατόπιση) του άξονα  $x'$ . Η στροφή του άξονα  $y'$  βρίσκεται από την (2.47), αν όπου  $\alpha$  θέσω το  $\alpha + \frac{\pi}{2}$ . Τελικά παίρνουμε

$$\psi |_{\alpha + \frac{\pi}{2}} = -(\epsilon_{yy} - \epsilon_{xx}) \cos \alpha \sin \alpha + \frac{\partial v}{\partial x} \sin^2 \alpha - \frac{\partial u}{\partial y} \cos^2 \alpha \quad (2.48)$$

Αλλά

$$\begin{aligned}\gamma'_{xy} &= \psi - \psi |_{\alpha + \frac{\pi}{2}} = 2(\epsilon_{yy} - \epsilon_{xx}) \cos \alpha \sin \alpha + \\ &\quad \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \implies \\ \gamma'_{xy} &= (\epsilon_{yy} - \epsilon_{xx}) \sin 2\alpha + \gamma_{xy} \cos 2\alpha\end{aligned}\quad (2.49)$$

Παρατηρούμε ότι υπάρχει ομοιότητα μεταξύ των σχέσεων (2.43), (2.44) και (2.49) και των αντίστοιχων σχέσεων μετασχηματισμού των τάσεων (1.15) - (1.17). Έτσι αλλάζοντας το  $\sigma$  σε  $\epsilon$  και το  $\tau$  σε  $\frac{\gamma}{2}$ , παίρνουμε από τις εξισώσεις μετασχηματισμού των τάσεων, τις εξισώσεις μετασχηματισμού των παραμορφώσεων.

Για τα επίπεδα των κυρίων παραμορφώσεων ισχύει ότι

$$\tan 2\alpha = \frac{\gamma_{xy}}{\epsilon_{xx} - \epsilon_{yy}} \quad (2.50)$$

και για τις τιμές των κυρίων παραμορφώσεων ισχύουν οι σχέσεις

$$\epsilon_1 = \frac{\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy}}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(\epsilon_{xx} - \epsilon_{yy})^2 + \gamma_{xy}^2} \quad (2.51)$$

$$\epsilon_2 = \frac{\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy}}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(\epsilon_{xx} - \epsilon_{yy})^2 + \gamma_{xy}^2} \quad (2.52)$$

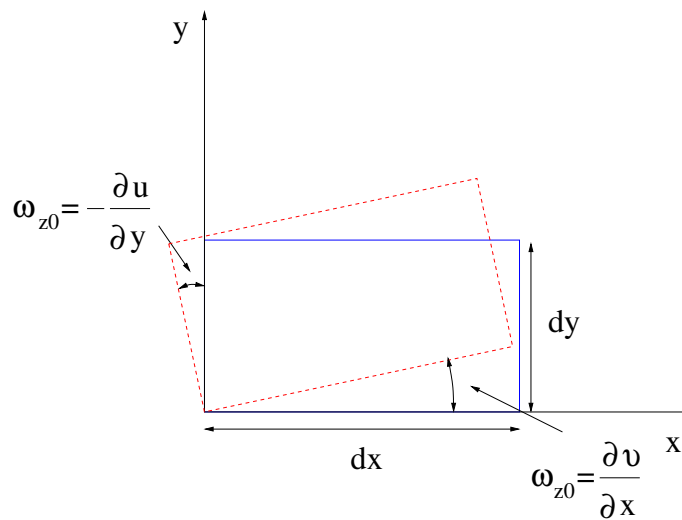
Ανάλογες σχέσεις, με αυτές του μετασχηματισμού των τάσεων σε τρεις διαστάσεις, προκύπτουν και για τις παραμορφώσεις σε τρεις διαστάσεις π.χ.

$$\begin{aligned}\epsilon'_{xx} &= \epsilon_{xx} \alpha_{11}^2 + \epsilon_{yy} \alpha_{21}^2 + \epsilon_{zz} \alpha_{31}^2 + \gamma_{xy} \alpha_{11} \alpha_{21} + \gamma_{yz} \alpha_{21} \alpha_{31} + \\ &\quad \gamma_{zx} \alpha_{31} \alpha_{11}\end{aligned}\quad (2.53)$$



## 2.4 Γενικευμένες μετατοπίσεις

Αν μας δοθούν οι συνιστώσες  $u$ ,  $v$  και  $w$  της μετατόπισης, σαν συναρτήσεις των συντεταγμένων  $x$ ,  $y$  και  $z$  μέσα σ' ένα σώμα, μπορούμε να βρούμε τις παραμορφώσεις και τη γεωμετρία κάθε στοιχείου απειροστών διαστάσεων, στην παραμορφωμένη κατάσταση (Σχήμα 2.3). Αν δοθούν όμως οι παραμορφώσεις και τις ολοκληρώσουμε για να βρούμε τις μετατοπίσεις  $u$ ,  $v$  και  $w$ , θα προκύψουν σταθερές ολοκλήρωσης. Θα δείξουμε ότι οι τελευταίες, αντιστοιχούν σε μετατοπίσεις και στροφές στερεού (απαραμόρφωτου) σώματος. Το στοιχείο του Σχή-



Σχήμα 2.4: Στροφή στερεού σώματος.

ματος 2.4 στρέφεται σαν στερεό (απαραμόρφωτο) σώμα κατά μια μικρή γωνία  $\omega_{z0}$ . Ισχύει ότι

$$\omega_{z0} = \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \quad (2.54)$$

Κατά τη στροφή αυτή δεν αναπτύσσονται παραμορφώσεις.

Αν μαζί με τη στροφή στερεού σώματος, αναπτύσσονται και παραμορφώσεις μέσα στο σώμα, ορίζουμε την ποσότητα

$$\omega_z = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (2.55)$$

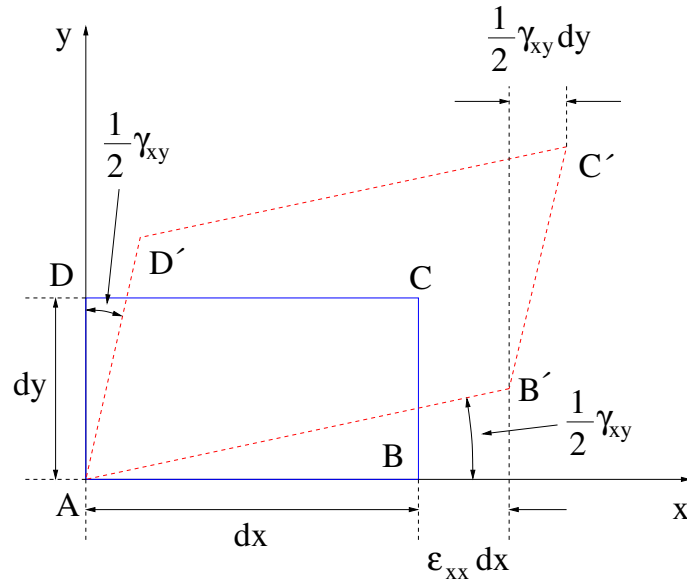
Η  $\omega_z$  εκφράζει το μέσο όρο της γωνιακής μετατόπισης (στροφής) των πλευρών  $dx$  και  $dy$  του ορθογωνίου και ονομάζεται *στροφή*

Από το Σχήμα 2.3, βρίσκουμε ότι η μετατόπιση κατά  $x$  του σημείου

$C$  θα είναι  $u + du$  όπου

$$\begin{aligned} du &= \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy \implies \\ du &= \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) dy + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) dy \implies \\ du &= \epsilon_{xx} dx + \frac{1}{2} \gamma_{xy} dy - \omega_z dy \end{aligned} \quad (2.56)$$

Οι δύο πρώτοι όροι στην (2.56) παριστάνουν τη μεταβολή της μετατόπισης στο σημείο  $C$  σε σχέση με το σημείο  $A$ , με αναφορά το Σχήμα 2.2, λόγω των παραμορφώσεων  $\epsilon_{xx}$  και  $\gamma_{xy}$ . Η μεταβολή αυτή οφείλεται μόνο σε καθαρή παραμόρφωση. Η καθαρή αυτή παραμόρφωση παριστάνεται στο Σχήμα 2.5. Ο τελευταίος όρος στην (2.56) παριστάνει μια



Σχήμα 2.5: Κατάσταση καθαρής παραμόρφωσης.

μετατόπιση λόγω στροφής, που αν προστεθεί στη μετατόπιση λόγω καθαρής παραμόρφωσης, το στοιχείο θα πάρει την τελική του θέση. Αποδεικνύεται ότι η γωνία  $\omega_z$  παριστάνει τη μικρή γωνιακή μετατόπιση (στροφή) των κυρίων αξόνων παραμόρφωσης.

Όμοια μπορούμε να δείξουμε ότι, η σχετική μετατόπιση κατά τον άξονα  $y$ , του σημείου  $C$  ως προς το  $A$  είναι

$$dv = \epsilon_{yy} dy + \frac{1}{2} \gamma_{xy} dx - \omega_z dx \quad (2.57)$$

Οι σχέσεις (2.56) και (2.57) μπορούν να ολοκληρωθούν, αν ικανοποιούνται οι εξισώσεις συμβιβαστού των παραμορφώσεων. Το ολοκλήρωμά

τους περιλαμβάνει συναρτήσεις της μορφής

$$u^* = u_0 - \omega_{z0}y \quad (2.58)$$

$$v^* = v_0 + \omega_{z0}x \quad (2.59)$$

Οι συναρτήσεις μετατοπίσεων  $u^*$  και  $v^*$  δεν παράγουν παραμορφώσεις, όπως φαίνεται από τις εξισώσεις (2.16), (2.17) και (2.19). Μπορούν επομένως να προστίθενται σε οποιοδήποτε πεδίο μετατοπίσεων, χωρίς να αλλάζει η κατανομή των παραμορφώσεων. Εκφράζουν γενικευμένη μετατόπιση στερεού σώματος, που περιλαμβάνει μεταφορά  $(u_0, v_0)$  και μικρή στροφή  $\omega_{z0}$ . Αν δίνεται η μετατόπιση  $(u_0, v_0)$  και η στροφή  $\omega_{z0}$  σ' ένα σημείο του σώματος, τότε βρίσκουμε πλήρως, χωρίς αυθαίρετες σταθερές, τις μετατοπίσεις που αντιστοιχούν σε δεδομένες παραμορφώσεις.

Η στροφή  $\omega_{z0}$  αναφέρεται στην κίνηση ολόκληρου του σώματος, σαν στερεό σώμα, δηλαδή είναι ανεξάρτητη από τις χωρικές συντεταγμένες. Η  $\omega_z$  εκφράζει τη στροφή ενός στοιχείου του σώματος, απειροστών διαστάσεων και εξαρτάται από τις χωρικές συντεταγμένες.

Οι (2.55) - (2.57) γενικεύονται σε τρεις διαστάσεις ως

$$du = \epsilon_{xx}dx + \frac{1}{2}\gamma_{xy}dy + \frac{1}{2}\gamma_{xz}dz - \omega_z dy + \omega_y dz \quad (2.60)$$

$$dv = \epsilon_{yy}dy + \frac{1}{2}\gamma_{xy}dx + \frac{1}{2}\gamma_{yz}dz - \omega_x dz + \omega_z dx \quad (2.61)$$

$$dw = \epsilon_{zz}dz + \frac{1}{2}\gamma_{xz}dx + \frac{1}{2}\gamma_{yz}dy - \omega_y dx + \omega_x dy \quad (2.62)$$

όπου

$$\omega_x = \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \quad (2.63)$$

$$\omega_y = \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad (2.64)$$

$$\omega_z = \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (2.65)$$

$$(2.66)$$

είναι οι μικρές γωνίες στροφής γύρω από άξονες παράλληλους προς  $x$ ,  $y$  και  $z$ . Ολοκληρώνοντας τις (2.60) - (2.62), οι αυθαίρετες συναρτήσεις ολοκλήρωσης παίρνουν τη μορφή

$$u^* = u_0 - \omega_{z0}y + \omega_{y0}z \quad (2.67)$$

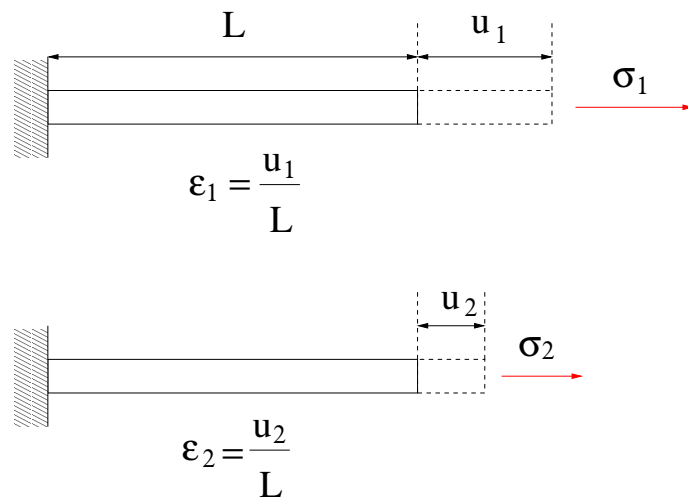
$$v^* = v_0 - \omega_{x0}z + \omega_{z0}x \quad (2.68)$$

$$w^* = w_0 - \omega_{y0}x + \omega_{x0}y \quad (2.69)$$

αλλά δεν επηρεάζουν τις παραμορφώσεις. Έτσι σε προβλήματα της ελαστικότητας συχνά αγνοούμε τις μετατοπίσεις στερεού σώματος.

## 2.5 Αρχή της επαλληλίας

Δύο επί μέρους καταστάσεις μικρών παραμορφώσεων μπορούν να προστεθούν και να μας δώσουν τη συνολική παραμόρφωση που θα προέκυπτε από την επάλληλη (ή μια αμέσως μετά την άλλη) εφαρμογή τους. Η σειρά επιβολής των δύο επί μέρους καταστάσεων παραμόρφωσης, δεν έχει σημασία. Στο Σχήμα 2.6 φαίνονται δύο επί μέρους καταστάσεις εφελκυστικής παραμόρφωσης μιας ράβδου, με αντίστοιχες επιμηκύνσεις  $u_1$  και  $u_2$  και ομοιόμορφες παραμορφώσεις  $\epsilon_1$  και  $\epsilon_2$ . Αν



Σχήμα 2.6: Δύο επί μέρους καταστάσεις παραμόρφωσης.

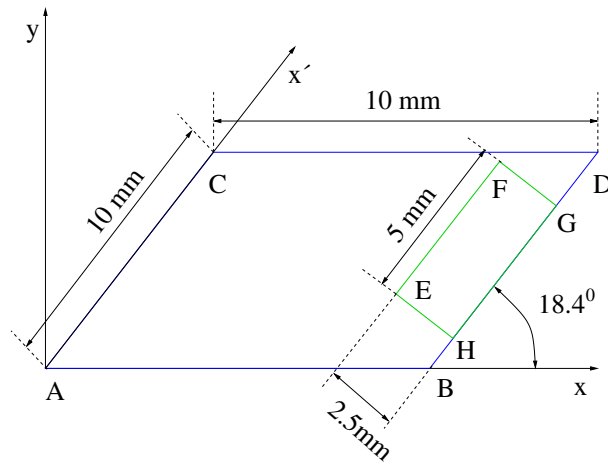
εφαρμοστεί πρώτα η  $\epsilon_1$  και μετά η  $\epsilon_2$ , η τελική μετατόπιση της ράβδου θα είναι

$$\begin{aligned}
 u &= u_1 + \epsilon_2(L + u_1) = u_1 + \epsilon_2(L + \epsilon_1 L) = u_1 + \epsilon_2 L + \epsilon_2 \epsilon_1 L \implies \\
 u &\simeq u_1 + u_2
 \end{aligned} \tag{2.70}$$

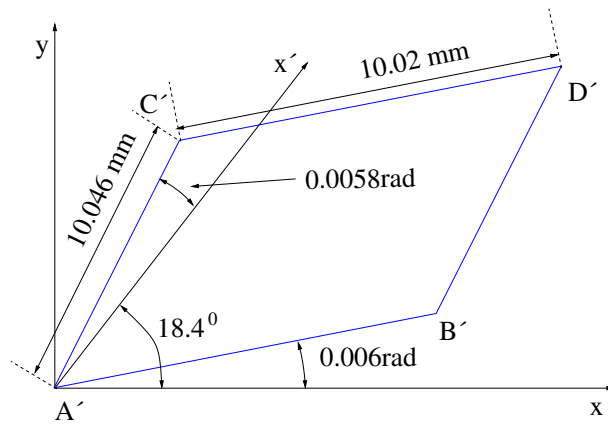
Το γινόμενο  $\epsilon_1 \epsilon_2$  είναι πολύ μικρό σε σχέση με τα  $\epsilon_1$  και  $\epsilon_2$ .

## 2.6 Άσκηση

Το παραλληλόγραμμο ABCD και το ορθογώνιο EFGH είναι χαραγμένα πάνω στην επιφάνεια επίπεδης πλάκας (Σχήμα 2.7). Όταν η πλάκα φορτίζεται το παραλληλόγραμμο ABCD παραμορφώνεται στο  $A'B'C'D'$  (Σχήμα 2.8). Βρείτε το παραμορφωμένο σχήμα του ορθογωνίου EFGH, υπολογίζοντας τις αλλαγές μηκών των πλευρών του και τη μεταβολή της ορθής γωνίας μεταξύ των πλευρών HE και HG. Επίσης να βρεθεί η διαμητική παραμόρφωση  $\gamma_{xy}$ . Υπόδειξη: Βρείτε πρώτα την  $\epsilon_{yy}$  από τη γεωμετρία του παραλληλογράμμου  $A'B'C'D'$ .



Σχήμα 2.7: Απαραμόρφωτη πλάκα.



Σχήμα 2.8: Παραμορφωμένη πλάκα.



## Κεφάλαιο 3

# Σχέσεις τάσεων - παραμορφώσεων

Ελαστικό λέγεται το υλικό που ανακτά το αρχικό του σχήμα, όταν παύουν να ενεργούν πάνω σ' αυτό οι δυνάμεις που το παραμόρφωσαν. Ισότροπο είναι το υλικό του οποίου η μηχανική συμπεριφορά υπό την επίδραση τάσεων, είναι ίδια προς κάθε κατεύθυνση, σ' ένα σημείο. Ομογενές είναι το υλικό που οι ιδιότητές του είναι ανεξάρτητες από τη θέση μέσα στο υλικό. Οι σχέσεις που συνδέουν τις τάσεις με τις παραμορφώσεις σ' ένα υλικό, λέγονται *καταστατικές εξισώσεις*. Στη συνέχεια θα εξετάσουμε ελαστικά, ομογενή και ισότροπα υλικά, που οι καταστατικές εξισώσεις τους εκφράζονται από το γενικευμένο νόμο του Hooke.

### 3.1 Γενικευμένος νόμος Hooke

Κάνουμε τις εξής παραδοχές που συμβαδίζουν με πειραματικά αποτελέσματα για ισότροπα υλικά:

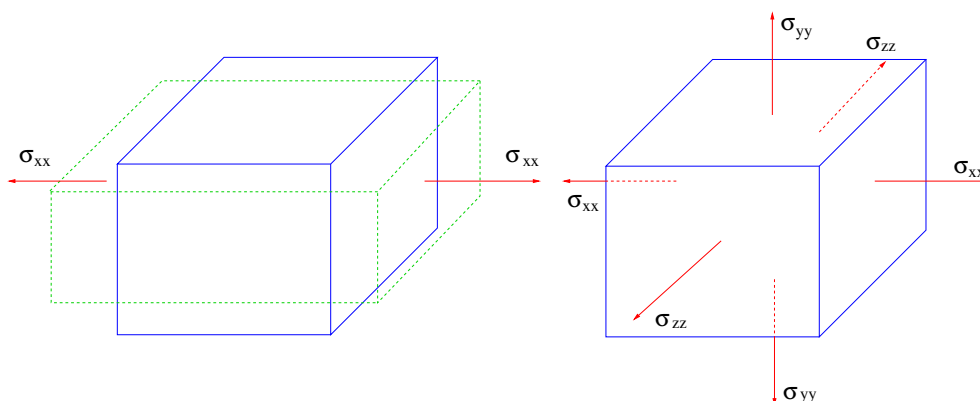
1. Μια ορθή τάση δε δημιουργεί διατμητικές παραμορφώσεις.
2. Μια διατμητική τάση δε δημιουργεί ορθές παραμορφώσεις.
3. Μια διατμητική τάση  $\tau_{xy}$  δημιουργεί μόνο μια διατμητική παραμόρφωση, τη  $\gamma_{xy}$ .

Έστω στοιχειώδες ορθογώνιο υπό μονοαξονική ένταση  $\sigma_{xx}$  (Σχήμα 3.1). Από το νόμο του Hooke ισχύει ότι

$$\epsilon_{xx} = \frac{\sigma_{xx}}{E} \quad (3.1)$$

όπου είναι το μέτρο ελαστικότητας του υλικού. Πλευρικές συστολές θα δημιουργηθούν κατά τις διευθύνσεις  $y$  και  $z$  και

$$\epsilon_{yy} = \epsilon_{zz} = -\nu \frac{\sigma_{xx}}{E} = -\nu \epsilon_{xx} \quad (3.2)$$



Σχήμα 3.1: Μονοαξονική και τριαξονική εντατική κατάσταση ορθογώνιου στοιχείου.

όπου  $\nu$  είναι ο λόγος του Poisson του υλικού.

Έστω τώρα ότι έχουμε τρισδιάστατη εντατική κατάσταση με  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$  και  $\sigma_{zz}$  (Σχήμα 3.1). Τότε ισχύουν οι σχέσεις

$$\epsilon_{xx} = \frac{1}{E} [\sigma_{xx} - \nu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})] \quad (3.3)$$

$$\epsilon_{yy} = \frac{1}{E} [\sigma_{yy} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{zz})] \quad (3.4)$$

$$\epsilon_{zz} = \frac{1}{E} [\sigma_{zz} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})] \quad (3.5)$$

Ο νόμος του Hooke για διδιάστατη κατάσταση καθαρής διάτμησης (Σχήμα 3.2 δίνει

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy} \quad (3.6)$$

και όμοια για τα επίπεδα  $yz$  και  $zx$  παίρνουμε

$$\gamma_{yz} = \frac{1}{G} \tau_{yz} \quad (3.7)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{1}{G} \tau_{xz} \quad (3.8)$$

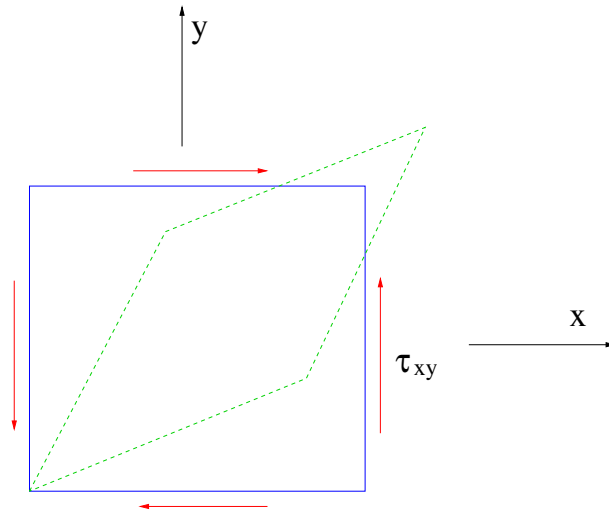
όπου  $G$  είναι το μέτρο διάτμησης.

Έστω κατάσταση επίπεδης έντασης (Σχήμα 3.3) που ορίζεται από τις σχέσεις

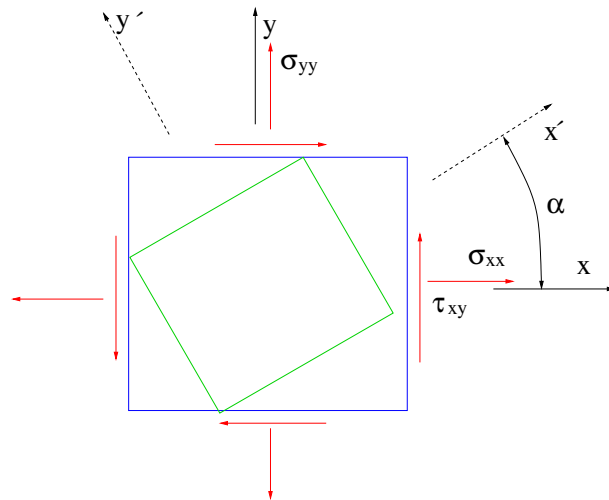
$$\sigma_{zz} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \quad (3.9)$$

Στο σύστημα  $xy$  έχουμε





Σχήμα 3.2: Διδιάστατη κατάσταση καθαρής διάτμησης.



Σχήμα 3.3: Διδιάστατη κατάσταση επίπεδης έντασης.

$$\epsilon_{xx} = \frac{1}{E} [\sigma_{xx} - \nu(\sigma_{yy})] \quad (3.10)$$

$$\epsilon_{yy} = \frac{1}{E} [\sigma_{yy} - \nu(\sigma_{xx})] \quad (3.11)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy} \quad (3.12)$$

Οι τάσεις και οι παραμορφώσεις στο νέο σύστημα  $x'y'$  γράφονται

$$\sigma'_{xx} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} + \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \cos 2\alpha + \tau_{xy} \sin 2\alpha \quad (3.13)$$

$$\sigma'_{yy} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} - \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \cos 2\alpha + \tau_{xy} \sin 2\alpha \quad (3.14)$$

$$\epsilon'_{xx} = \frac{\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy}}{2} + \frac{\epsilon_{xx} - \epsilon_{yy}}{2} \cos 2\alpha + \frac{\gamma_{xy}}{2} \sin 2\alpha \quad (3.15)$$

$$\epsilon'_{yy} = \frac{\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy}}{2} - \frac{\epsilon_{xx} - \epsilon_{yy}}{2} \cos 2\alpha - \frac{\gamma_{xy}}{2} \sin 2\alpha \quad (3.16)$$

Επειδή το υλικό είναι ισότροπο πρέπει

$$\epsilon'_{xx} = \frac{1}{E} [\sigma'_{xx} - \nu(\sigma'_{yy})] \quad (3.17)$$

$$\epsilon'_{yy} = \frac{1}{E} [\sigma'_{yy} - \nu(\sigma'_{xx})] \quad (3.18)$$

Από τις (3.13) - (3.18), μετά από πράξεις παίρνουμε

$$\gamma_{xy} = \frac{2(1 + \nu)}{E} \tau_{xy} \quad (3.19)$$

Από την (3.12) και από την (3.19) παίρνουμε τη σχέση

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (3.20)$$

που δείχνει ότι υπάρχουν μόνο δύο ανεξάρτητες ελαστικές σταθερές για ισότροπα υλικά.

Από τις σχέσεις (3.6) - (3.8), προκύπτει ότι αν

$$\tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0 \quad (3.21)$$

τότε και

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0 \quad (3.22)$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι τα επίπεδα των κυρίων τάσεων και των κυρίων παραμορφώσεων, συμπίπτουν για ισότροπα υλικά.

Οι καταστατικές σχέσεις (3.3) - (3.8) γράφονται και στη μορφή

$$\sigma_{xx} = 2G\epsilon_{xx} + \lambda(\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz}) \quad (3.23)$$

$$\sigma_{yy} = 2G\epsilon_{yy} + \lambda(\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz}) \quad (3.24)$$

$$\sigma_{zz} = 2G\epsilon_{zz} + \lambda(\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz}) \quad (3.25)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy} \quad (3.26)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{1}{G}\tau_{yz} \quad (3.27)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{1}{G}\tau_{xz} \quad (3.28)$$

όπου τα  $G$  και  $\lambda$  λέγονται σταθερές του *Lame* και

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad (3.29)$$

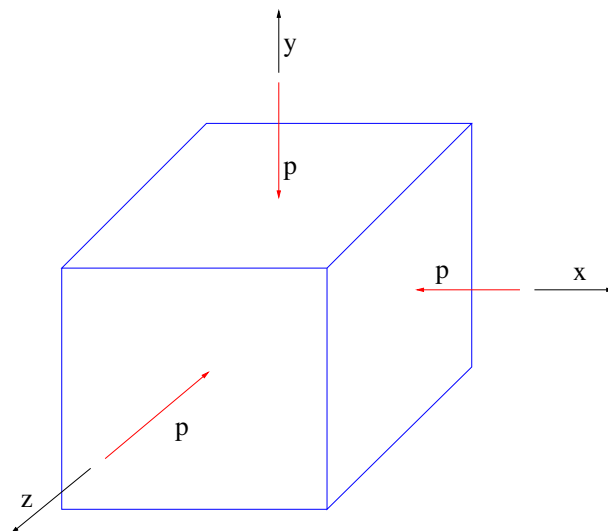
### 3.2 Μέτρο διόγκωσης

Έστω κατάσταση υδροστατικής πίεσης (Σχήμα 3.4) με

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = -p \quad (p > 0) \quad (3.30)$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0 \quad (3.31)$$

Λόγω των (3.30) και (3.31), οι (3.3) - (3.8) δίνουν



Σχήμα 3.4: Κατάσταση υδροστατικής πίεσης.

$$\epsilon_{xx} = \epsilon_{yy} = \epsilon_{zz} = -\frac{1-2\nu}{E}p \quad (3.32)$$

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0 \quad (3.33)$$

Η ανηγμένη διόγκωση (*dilatation*)  $\epsilon$  δίνεται από τη σχέση

$$\epsilon = \epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz} \quad (3.34)$$

και βρίσκεται αν υπολογίσουμε την αλλαγή του όγκου ενός πρίσματος με αρχικές διαστάσεις  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$ . Μετά την παραμόρφωση ο όγκος του πρίσματος γίνεται

$$[dx(1 + \epsilon_{xx})][dy(1 + \epsilon_{yy})][dz(1 + \epsilon_{zz})] = (1 + \epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz})dx dy dz \quad (3.35)$$

αγνοώντας όρους τάξης  $\geq 2$ . Λόγω της (3.35), η ανηγμένη διόγκωση δίνεται από τη σχέση (3.34). Εξ' αιτίας της (3.32), η (3.34) δίνει

$$\epsilon = -\frac{1}{K}p \quad (3.36)$$

όπου το

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)} \quad (3.37)$$

ονομάζεται *μέτρο διόγκωσης*. Η ανηγμένη διόγκωση δίνεται από την (3.34) για οποιαδήποτε εντατική κατάσταση, επειδή οι διατμητικές τάσεις δεν προκαλούν αλλαγή του όγκου.

Ορίζοντας την ποσότητα

$$\sigma_m = \frac{1}{3}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) \quad (3.38)$$

λόγω των (3.3) - (3.5) παίρνουμε

$$\epsilon = \epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz} = \frac{1-2\nu}{E}(3\sigma_m) \stackrel{(3.37)}{\implies} \epsilon = \frac{1}{K}\sigma_m \quad (3.39)$$

Η  $\sigma_m$  λέγεται *υδροστατική συνιστώσα της τάσης* ή *σφαιρική συνιστώσα της τάσης*. Τα  $\epsilon$  και  $\sigma_m$  είναι αναλλοίωτες ποσότητες ως προς οποιονδήποτε μετασχηματισμό ορθογώνιου συστήματος συντεταγμένων.

### 3.3 Άσκηση

Να βρεθεί η κλίση της  $\sigma_{xx}$  ως προς την  $\epsilon_{xx}$  στην ελαστική περιοχή, αν στο υλικό επιβάλλεται η ακόλουθη εντατική κατάσταση

$$\sigma_{xx} = 2\sigma_{yy} = 3\sigma_{zz} \quad (3.40)$$

## Κεφάλαιο 4

# Καρτεσιανοί τανυστές και η χρήση δεικτών

### 4.1 Γραφή με δείκτες

Θα αναφερθούμε μόνο σε καρτεσιανό (ορθογώνιο) σύστημα συντεταγμένων. Έστω διάνυσμα με συντεταγμένες  $x_1, x_2, x_3$ , που αντιστοιχούν στις  $x, y, z$  που χρησιμοποιήσαμε μέχρι τώρα. Σ' ένα άλλο σύστημα συντεταγμένων  $x'_1, x'_2, x'_3$  με την ίδια αρχή, οι συντεταγμένες του διανύσματος θα είναι

$$x'_1 = \alpha_{11}x_1 + \alpha_{21}x_2 + \alpha_{31}x_3 \quad (4.1)$$

$$x'_2 = \alpha_{12}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \alpha_{32}x_3 \quad (4.2)$$

$$x'_3 = \alpha_{13}x_1 + \alpha_{23}x_2 + \alpha_{33}x_3 \quad (4.3)$$

όπου  $\alpha_{11}, \alpha_{21} \dots$  είναι τα γνωστά συνημίτονα κατεύθυνσης του Πίνακα 1.1. Οι (4.1) - (4.3) γράφονται και ως

$$x'_1 = \sum_{i=1}^3 \alpha_{i1}x_i \quad (4.4)$$

$$x'_2 = \sum_{i=1}^3 \alpha_{i2}x_i \quad (4.5)$$

$$x'_3 = \sum_{i=1}^3 \alpha_{i3}x_i \quad (4.6)$$

ή σε περισσότερο συμπυκνωμένη μορφή ως

$$x'_j = \sum_{i=1}^3 \alpha_{ij}x_i \quad j = 1, 2, 3 \quad (4.7)$$

Κάνουμε τη σύμβαση ότι αν ένας αλφαβητικός (γράμμα και όχι αριθμός) δείκτης επαναλαμβάνεται σ' έναν όρο μιας εξίσωσης, τότε αυτόματα κάνουμε άθροιση για όλες τις τιμές που παίρνει ο επαναλαμβανόμενος δείκτης και μπορούμε να μη χρησιμοποιούμε το σύμβολο  $\sum$ . Ο επαναλαμβανόμενος δείκτης λέγεται άεργος, ενώ ο μη επαναλαμβανόμενος δείκτης λέγεται ενεργός. Έτσι η (4.7) γράφεται ως

$$x'_j = \alpha_{ij}x_i \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (4.8)$$

ή ως

$$x'_k = \alpha_{ik}x_i \quad i, k = 1, 2, 3 \quad (4.9)$$

ή ως

$$x'_j = \alpha_{ij}x_i = \alpha_{ij}x_i \quad (4.10)$$

Ισχύει ο περιορισμός ότι το ίδιο γράμμα - δείκτης δε μπορεί να εμφανίζεται περισσότερο από δύο φορές σ' έναν όρο, διότι δεν έχουμε ορίσει τέτοια πράξη.

#### 4.1.1 Παράδειγμα

Η σχέση

$$b_{ij}b_{jk} = 0 \quad i, j, k = 1, 2, 3 \quad (4.11)$$

γράφεται σε αναπτυγμένη μορφή ως

$$i = 1, \quad k = 1 : \quad b_{11}b_{11} + b_{12}b_{21} + b_{13}b_{31} = 0 \quad (4.12)$$

$$i = 1, \quad k = 2 : \quad b_{11}b_{12} + b_{12}b_{22} + b_{13}b_{32} = 0 \quad (4.13)$$

$$i = 1, \quad k = 3 : \quad b_{11}b_{13} + b_{12}b_{23} + b_{13}b_{33} = 0 \quad (4.14)$$

$$i = 2, \quad k = 1 : \quad b_{21}b_{11} + b_{22}b_{21} + b_{23}b_{31} = 0 \quad (4.15)$$

$$i = 2, \quad k = 2 : \quad b_{21}b_{12} + b_{22}b_{22} + b_{23}b_{32} = 0 \quad (4.16)$$

$$i = 2, \quad k = 3 : \quad b_{21}b_{13} + b_{22}b_{23} + b_{23}b_{33} = 0 \quad (4.17)$$

$$i = 3, \quad k = 1 : \quad b_{31}b_{11} + b_{32}b_{21} + b_{33}b_{31} = 0 \quad (4.18)$$

$$i = 3, \quad k = 2 : \quad b_{31}b_{12} + b_{32}b_{22} + b_{33}b_{32} = 0 \quad (4.19)$$

$$i = 3, \quad k = 3 : \quad b_{31}b_{13} + b_{32}b_{23} + b_{33}b_{33} = 0 \quad (4.20)$$

Οι παραπάνω σχέσεις μπορούν να γραφούν και ως

$$b_{i1}b_{1k} + b_{i2}b_{2k} + b_{i3}b_{3k} = 0 \quad (4.21)$$

Στα επόμενα θα εννοείται ότι οι δείκτες παίρνουν τις τιμές 1,2,3.

## 4.2 Τανυστές πρώτης τάξης

Ένα διάνυσμα  $\vec{u}$  με συντεταγμένες  $u_i$ , θα αναφέρεται σαν διάνυσμα  $u_i$ . Από τις σχέσεις (4.1) - (4.3), αν λύσουμε ως προς  $x_1, x_2, x_3$  παίρνουμε τις σχέσεις

$$x_1 = \alpha_{11}x'_1 + \alpha_{12}x'_2 + \alpha_{13}x'_3 \quad (4.22)$$

$$x_2 = \alpha_{21}x'_1 + \alpha_{22}x'_2 + \alpha_{23}x'_3 \quad (4.23)$$

$$x_3 = \alpha_{31}x'_1 + \alpha_{32}x'_2 + \alpha_{33}x'_3 \quad (4.24)$$

οι οποίες σε συμπυκνόμενη μορφή γράφονται ως

$$x_i = \alpha_{ij}x'_j \quad (4.25)$$

Αλλάζοντας τον άεργο δείκτη  $j$  σε  $k$ , για να μην έχουμε περισσότερες από μια επαναλήψεις και θέτοντας την (4.25) στην (4.8), παίρνουμε

$$x'_j = \alpha_{ij}\alpha_{ik}x'_k \quad (4.26)$$

Από την (4.26) προκύπτει ότι

$$\alpha_{ij}\alpha_{ik} = 1 \quad \text{όταν} \quad j = k \quad (4.27)$$

$$\alpha_{ij}\alpha_{ik} = 0 \quad \text{όταν} \quad j \neq k \quad (4.28)$$

Σε αναπτυγμένη μορφή οι (4.27) και (4.28), δίνουν τις σχέσεις (1.61) - (1.66).

Για το μετασχηματισμό των συντεταγμένων  $F_i$  ενός διανύσματος  $\vec{F}$ , σ' ένα νέο (τονούμενο) σύστημα συντεταγμένων, έχουμε

$$F'_j = \alpha_{ij}F_i \quad (4.29)$$

Η (4.29) μπορεί να θεωρηθεί ως ο ορισμός του διανύσματος ή του τανυστή πρώτης τάξης. Δηλαδή, ένα σύνολο τριών ποσοτήτων  $F_i$ , που αναφέρονται σ' ένα σύστημα συντεταγμένων  $x_i$  και μετασχηματίζονται σ' ένα άλλο σύστημα συντεταγμένων  $x'_j$  μέσα από την (4.29), ορίζονται ως διάνυσμα ή τανυστής πρώτης τάξης.

## 4.3 Τανυστές μεγαλύτερης τάξης

Έστω δύο διανύσματα  $u_i, v_k$ . Σ' ένα νέο σύστημα συντεταγμένων έχουμε

$$u'_j = \alpha_{ij}u_i \quad (4.30)$$

$$v'_l = \alpha_{kl}v_k \quad (4.31)$$

και μπορούμε να γράψουμε

$$u'_j v'_l = (\alpha_{ij} u_i)(\alpha_{kl} u_k) = \alpha_{ij} \alpha_{kl} u_i v_k \quad (4.32)$$

Οι ποσότητες  $u'_j v'_l$  μπορούν να θεωρηθούν σαν συναρτήσεις των εννέα ποσοτήτων  $u_i v_k$ , μέσα από τη σχέση (4.32), με χρήση του παράγοντα  $\alpha_{ij} \alpha_{kl}$ , που εξαρτάται αποκλειστικά από τον προσανατολισμό των δύο συστημάτων συντεταγμένων. Η (4.32) γράφεται και ως

$$A'_{jl} = \alpha_{ij} \alpha_{kl} A_{ik} \quad (4.33)$$

όπου τα

$$A'_{jl} = u'_j v'_l \quad (4.34)$$

$$A_{ik} = u_i v_k \quad (4.35)$$

είναι γινόμενα των συντεταγμένων δύο διανυσμάτων.

Κάθε σύνολο εννέα ποσοτήτων  $w_{ik}$  που αναφέρεται σε σύστημα  $x_i$  και μετασχηματίζεται σ' ένα νέο σύνολο εννέα ποσοτήτων  $w'_{jl}$ , που αναφέρεται σε άλλο σύστημα συντεταγμένων  $x'_i$ , μέσα από τη σχέση

$$w'_{jl} = \alpha_{ij} \alpha_{kl} w_{ik} \quad (4.36)$$

λέγεται *τανυστής δεύτερης τάξης*.

Όμοια μπορούμε να ορίσουμε τους τανυστές μεγαλύτερης τάξης, που καθένας περιέχει  $3^n$  στοιχεία, όπου  $n$  είναι η τάξη του τανυστή. Έτσι η σχέση

$$w'_{pqr} = \alpha_{ip} \alpha_{jq} \alpha_{kr} w_{ijk} \quad (4.37)$$

ορίζει τον τανυστή τρίτης τάξης με  $3^n = 27$  στοιχεία. Γενικά η σχέση

$$w'_{pqr\dots} = \alpha_{ip} \alpha_{jq} \dots w_{ij\dots} \quad (4.38)$$

ορίζει τον τανυστή τάξης  $n$  όπου οι  $w'$  και  $w$  έχουν  $n$  δείκτες. Οι  $n$  δείκτες του  $w'$  εμφανίζονται ως δεύτεροι δείκτες των  $\alpha$ , ενώ οι  $n$  δείκτες του  $w$  είναι ίδιοι με τους με τους πρώτους δείκτες των  $\alpha$ .

Τα βαθμωτά μεγέθη (π. χ. μάζα, θερμοκρασία, ενέργεια) είναι τανυστές μηδενικής τάξης.

Τα στοιχεία ενός τανυστή μπορούν να παρασταθούν σε μορφή πίνακα. Έτσι τα στοιχεία του τανυστή  $w_{ij}$  παριστάνονται από το μητρώο

$$\begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} & w_{13} \\ w_{21} & w_{22} & w_{23} \\ w_{31} & w_{32} & w_{33} \end{pmatrix} \quad (4.39)$$



### 4.3.1 Παράδειγμα

Να δειχθεί ότι αν ο πίνακας  $w_{ij}$  είναι τανυστής, τότε και ο ανάστροφός του  $w_{ji}$  είναι τανυστής.

Επειδή ο  $w_{ij}$  είναι τανυστής, ισχύει η σχέση

$$w'_{kl} = \alpha_{ik}\alpha_{jl}w_{ij} \quad (4.40)$$

Για ν' αποδειχθεί το ζητούμενο πρέπει να δείξουμε ότι

$$w'_{lk} = \alpha_{jl}\alpha_{ik}w_{ji} \quad (4.41)$$

Ορίζουμε και τα νέα μητρώα  $u_{ij}$  και  $u'_{kl}$  μέσα από τις σχέσεις

$$u_{ij} = w_{ji} \quad (4.42)$$

$$u'_{kl} = w'_{lk} \quad (4.43)$$

Λόγω των (4.40), (4.43) έχουμε

$$u'_{kl} = w'_{lk} = \alpha_{il}\alpha_{jk}w_{ij} = \alpha_{jk}\alpha_{il}w_{ij} \quad (4.44)$$

Πρέπει να δείξουμε τώρα ότι το δεύτερο μέλος της (4.41) είναι ίσο με το τέταρτο μέλος της (4.44), δηλαδή ότι

$$\alpha_{jk}\alpha_{il}w_{ij} = \alpha_{ik}\alpha_{jl}w_{ji} \quad (4.45)$$

Αναπτύσσοντας πλήρως το άθροισμα στο τέταρτο μέλος της (4.44) και στο δεύτερο μέλος της (4.41), αποδεικνύεται η σχέση (4.45). Επομένως ισχύει η (4.41).

Επειδή οι  $w_{ij}$  και  $w_{ji}$  είναι τανυστές, μπορεί ν' αποδειχθεί με διαδικασία παρόμοια με αυτή που ακολουθήθηκε στο Παράδειγμα (4.3.1), ότι και οι  $w_{ij} + w_{ji}$  και  $w_{ij} - w_{ji}$  είναι τανυστές δεύτερης τάξης. Ο πρώτος είναι συμμετρικός και ο δεύτερος είναι αντισυμμετρικός. Επειδή

$$w_{ij} = \frac{1}{2}(w_{ij} + w_{ji}) + \frac{1}{2}(w_{ij} - w_{ji}) \quad (4.46)$$

κάθε τανυστής δεύτερης τάξης μπορεί να γραφεί σαν άθροισμα ενός συμμετρικού και ενός αντισυμμετρικού τανυστή.

### 4.3.2 Παράδειγμα

Να δειχθεί ότι η βαθμίδα βαθμωτού μεγέθους είναι τανυστής πρώτης τάξης και ότι η βαθμίδα διανύσματος είναι τανυστής δεύτερης τάξης.

Για ένα βαθμωτό μέγεθος  $U(x_1, x_2, x_3)$ , οι βαθμίδες του  $\frac{\partial U}{\partial x_i}$  και  $\frac{\partial U}{\partial x'_j}$  ως προς δύο συστήματα συντεταγμένων  $x_i$  και  $x'_j$ , σχετίζονται μέσα από τη σχέση

$$\frac{\partial U}{\partial x'_j} = \frac{\partial U}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial x'_j} + \frac{\partial U}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial x'_j} + \frac{\partial U}{\partial x_3} \frac{\partial x_3}{\partial x'_j} \implies \quad (4.47)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x'_j} = \frac{\partial U}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial x'_j} \stackrel{(4.25)}{=} \alpha_{ij} \frac{\partial U}{\partial x_i} \quad (4.48)$$

Για ένα διάνυσμα με συνιστώσες  $u_i$  και  $u'_j$ , ως προς δύο συστήματα συντεταγμένων  $x_k$  και  $x'_l$  αντίστοιχα, η βαθμίδα του είναι  $\frac{\partial u_i}{\partial x_k}$  και  $\frac{\partial u'_j}{\partial x'_l}$ .

Έτσι

$$\frac{\partial u'_j}{\partial x'_l} = \frac{\partial u'_j}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial x'_l} = \alpha_{kl} \frac{\partial}{\partial x_k} (\alpha_{ij} u_i) = \alpha_{ij} \alpha_{kl} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \quad (4.49)$$

Η (4.49) δείχνει ότι η βαθμίδα διανύσματος είναι τανυστής δεύτερης τάξης.

## 4.4 Δέλτα του Kronecker

Το δέλτα του Kronecker ορίζεται από τις σχέσεις

$$\delta_{ik} = 1 \quad i = k \quad (4.50)$$

$$\delta_{ik} = 0 \quad i \neq k \quad (4.51)$$

Είναι τανυστής δεύτερης τάξης που μετασχηματίζεται στον εαυτό του (ισότροπος τανυστής).

### 4.4.1 Παραδείγματα

$$\delta_{ik} u_k = \delta_{i1} u_1 + \delta_{i2} u_2 + \delta_{i3} u_3 = u_i \quad (4.52)$$

$$\delta_{ik} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} = \frac{\partial u_j}{\partial x_i} = u_{j,i} \quad (4.53)$$

$$\delta_{ik} w_{ik} = w_{kk} = w_{ii} \quad (4.54)$$

$$\delta_{il} \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_l \partial x_k} = \delta_{il} u_{j,lk} = u_{j,ik} \quad (4.55)$$

Γενικά, ο άεργος δείκτης της ποσότητας που πολλαπλασιάζει το δέλτα του Kronecker, αντικαθίσταται από τον ενεργό δείκτη του δέλτα.

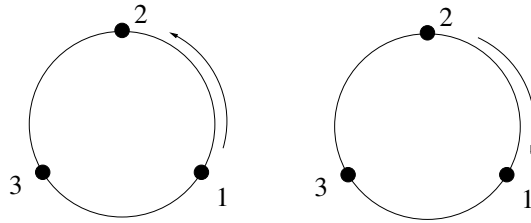
Η παράγωγος ως προς μια χωρική ανεξάρτητη μεταβλητή, συμβολίζεται με κόμμα ανάμεσα στους δείκτες. Δεξιά από το κόμμα βρίσκονται οι δείκτες των χωρικών μεταβλητών ως προς τις οποίες γίνεται διαδοχικά η παραγωγή.

## 4.5 Το σύμβολο της εναλλαγής

Το σύμβολο της εναλλαγής ορίζεται από τις σχέσεις

$$\epsilon_{ikm} = \begin{cases} 0 & \text{αν δύο από τους τρεις δείκτες είναι ίσοι} \\ 1 & \text{αν οι δείκτες είναι άνισοι με σειρά 123, 231, 312} \\ -1 & \text{αν οι δείκτες είναι άνισοι με σειρά 132, 213, 321} \end{cases} \quad (4.56)$$

Γενικά το σύμβολο της εναλλαγής παίρνει την τιμή 1 όταν οι δείκτες διατάσσονται με αντιωρολογιακή φορά και την τιμή -1 όταν διατάσσονται με ωρολογιακή φορά (Σχήμα 4.1). Γίνεται ίσο με το 0 αν τουλάχιστον δύο δείκτες είναι ίσοι. Το  $\epsilon_{ikm}$  είναι τανυστής τρίτης τάξης



Σχήμα 4.1: Το σύμβολο της εναλλαγής.

και μετασχηματίζεται στον εαυτό του (ισότροπος τανυστής). Για δύο διανύσματα  $u_i$  και  $v_k$ , το διάνυσμα

$$w_m = \epsilon_{mik} u_i v_k \quad (4.57)$$

δίνει το εξωτερικό γινόμενο

$$\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v} \quad (4.58)$$

## 4.6 Το θεώρημα Gauss

Έστω τανυστής  $A_{jkl\dots}$ ,  $n$  τάξης, που ορίζεται σε όγκο  $V$  ο οποίος περιβάλλεται από επιφάνεια  $S$ .  $\mu_i$  είναι το μοναδιαίο εξωτερικό κάθετο διάνυσμα στην  $S$ . Το Θεώρημα Gauss διατυπώνεται από τη σχέση

$$\int_V \frac{\partial}{\partial x_i} A_{jkl\dots} dV = \int_S \mu_i A_{jkl\dots} dS \quad (4.59)$$

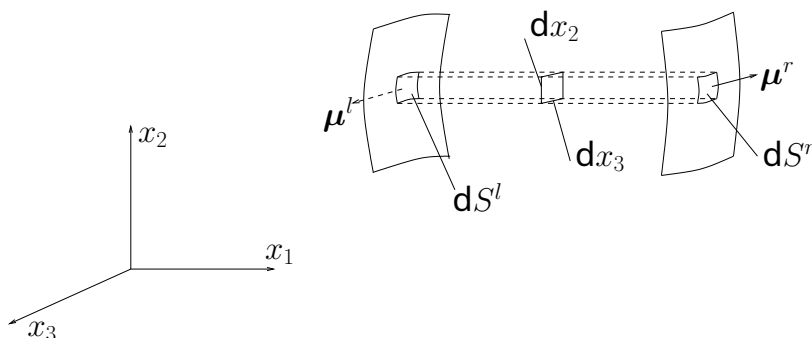
Για την απόδειξη του θεωρήματος, θέτουμε  $i = 1$  και ολοκληρώνουμε ως προς  $x_1$ , δηλαδή

$$\iiint_V \frac{\partial}{\partial x_1} A_{jkl\dots} dx_1 dx_2 dx_3 = \iint_{S^r} A_{jkl\dots}^r dx_2 dx_3 - \iint_{S^l} A_{jkl\dots}^l dx_2 dx_3 \quad (4.60)$$

όπου οι άνω δείκτες  $r$  και  $l$ , αναφέρονται στις δεξιά και αριστερά επιφάνειες  $S^r$  και  $S^l$  που συναποτελούν την επιφάνεια  $S$ . Παρατηρούμε ότι

$$dx_2 dx_3 = dS^r \cos(\boldsymbol{\mu}^r, x_1) = dS^r \mu_1^r \quad (4.61)$$

όπου  $\mu_1^r$  είναι η συνιστώσα του διανύσματος  $\boldsymbol{\mu}^r$  κατά τον άξονα  $x_1$  και  $dS^r$  και  $dS^l$  είναι οι δεξιά και αριστερά, ακραίες, επιφάνειες του στοιχείου που φαίνεται στο Σχήμα 4.2. Όμοια, ισχύει και η σχέση



Σχήμα 4.2: Ολοκλήρωση πάνω στον όγκο  $V$ .

$$dx_2 dx_3 = -dS^l \mu_1^l \quad (4.62)$$

Λόγω των (4.61) και (4.62), η (4.60) δίνει

$$\int_V \frac{\partial}{\partial x_i} A_{jkl\dots} dV = \int_{S^r} \mu_1^r A_{jkl\dots}^r dS^r + \int_{S^l} \mu_1^l A_{jkl\dots}^l dS^l = \int_S \mu_1 A_{jkl\dots} dS \quad (4.63)$$

Παρόμοιες σχέσεις με την (4.63) παίρνουμε για  $i = 2$  και  $i = 3$ , καταλήγοντας στο ζητούμενο αποτέλεσμα της σχέσης (4.59).

## 4.7 Ασκήσεις

### 4.7.1 Άσκηση

Δείξτε ότι αν  $A$  και  $B$  είναι βαθμωτές συναρτήσεις

$$(AB)_{,ii} = AB_{,ii} + 2A_{,i}B_{,i} + BA_{,ii} \quad (4.64)$$

**4.7.2 Άσκηση**

Δείξτε ότι

$$\delta_{ii} = 3 \quad (4.65)$$

$$\delta_{ik}\epsilon_{ikm} = 0 \quad (4.66)$$

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{ijk} = 6 \quad (4.67)$$

$$\epsilon_{ijp}\epsilon_{ijq} = 2\delta_{pq} \quad (4.68)$$

**4.7.3 Άσκηση**

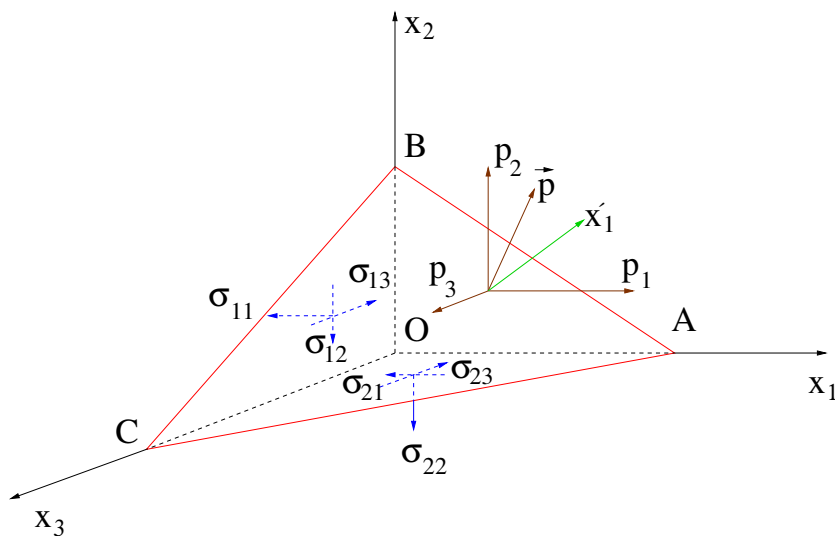
Να δείξετε ότι το δέλτα του Kronecker είναι ισότροπος τανυστής δεύτερης τάξης.



## Κεφάλαιο 5

# Ο τανυστής της τάσης

Έστω το τετράεδρο στοιχείο  $OABC$ , με αναφορά το σύστημα  $Ox_1x_2x_3$  (Σχήμα 5.1). Ο άξονας  $x'_1$  είναι κάθετος στο επίπεδο  $ABC$ , ενώ οι άξονες



Σχήμα 5.1: Τάσεις σε τετράεδρο στοιχείο.

$x'_2, x'_3$  ανήκουν πάνω στο επίπεδο  $ABC$ .  $p_1, p_2$  και  $p_3$  είναι οι συνιστώσες του διανύσματος τάσης  $\vec{p}$  (ή  $p_k$ ) ως προς το σύστημα  $Ox_1x_2x_3$ . Οι συνεισφορές λόγω μαζικών δυνάμεων και λόγω της ανομοιόμορφης κατανομής των τάσεων, περιέχονται σε όρους μεγαλύτερης τάξης, όταν οι διαστάσεις του στοιχείου τείνουν στο μηδέν. Γι αυτό έχουν παραληφθεί στο Σχήμα 5.1.

Από τις σχέσεις (1.53) - (1.55) βρίσκουμε ότι

$$p_1 = \sigma_{i1}\alpha_{i1} \quad (5.1)$$

$$p_2 = \sigma_{i2}\alpha_{i1} \quad (5.2)$$

$$p_3 = \sigma_{i3}\alpha_{i1} \quad (5.3)$$

ή συνοπτικά

$$p_k = \sigma_{ik}\alpha_{i1} \quad (5.4)$$

από τις ισορροπίες δυνάμεων κατά  $x_1, x_2, x_3$ . Προβάλλοντας τις συνιστώσες  $p_k$  πάνω στον άξονα  $x'_1$  και αθροίζοντας τις προβολές, παίρνουμε την ορθή τάση  $\sigma'_{11}$  πάνω στον άξονα  $x'_1$  ως

$$\sigma'_{11} = p_1\alpha_{11} + p_2\alpha_{21} + p_3\alpha_{31} = p_k\alpha_{k1} \quad (5.5)$$

λαμβάνοντας υπ' όψη και τις σχέσεις (1.50) - (1.52). Από τις (5.1) - (5.5) παίρνουμε

$$\sigma'_{11} = \sigma_{ik}\alpha_{i1}\alpha_{k1} \quad (5.6)$$

Όμοια με την (5.6) καταλήγουμε και στις σχέσεις

$$\sigma'_{12} = \sigma_{ik}\alpha_{i1}\alpha_{k2} \quad (5.7)$$

$$\sigma'_{13} = \sigma_{ik}\alpha_{i1}\alpha_{k3} \quad (5.8)$$

Από τις (5.6) - (5.8) προκύπτει ότι

$$\sigma'_{1n} = \sigma_{ik}\alpha_{i1}\alpha_{kn} \quad (5.9)$$

και γενικά βρίσκουμε ότι

$$\sigma'_{jn} = \alpha_{ij}\alpha_{kn}\sigma_{ik} \quad (5.10)$$

Από την (5.10) συμπεραίνουμε ότι οι εννιά συνιστώσες της τάσης

$$\sigma_{ik} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \quad (5.11)$$

αποτελούν τανυστή δεύτερης τάξης.

Έστω  $\vec{\mu}$  το μοναδιαίο εξωτερικό κάθετο διάνυσμα στην έδρα ABC. Οι συνιστώσες του είναι  $\mu_j$  ως προς τους άξονες  $x_j$ . Για να δείξω την έδρα πάνω στην οποία ασκείται το διάνυσμα τάσης, συμβολίζω το διάνυσμα τάσης στην ABC με  $\tau_i^\mu$ . Από την (5.4) έχουμε

$$\tau_i^\mu = \sigma_{ji}\mu_j \quad (5.12)$$



## 5.1 Κύριοι άξονες του τανυστή τάσης

Η διεύθυνση που ορίζεται από το μοναδιαίο εξωτερικό κάθετο διάνυσμα  $\vec{\mu}$  ονομάζεται *κύριος άξονας της τάσης*  $\sigma_{ik}$ , αν το διάνυσμα τάσης της  $\sigma_{ik}$  που ασκείται στην επιφάνεια που ορίζεται από το  $\vec{\mu}$  (η επιφάνεια αυτή ονομάζεται *κύριο επίπεδο*), είναι παράλληλο στο  $\vec{\mu}$ . Έτσι από την (5.12) έχουμε για το κύριο επίπεδο με εξωτερικό μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα  $\vec{\mu}$

$$\tau_j^\mu = \sigma_{ij}\mu_i = \sigma\mu_j \implies \sigma_{ij}\mu_i - \sigma\mu_j = 0 \implies \sigma_{ij}\mu_i - \sigma\delta_{ij}\mu_i = 0 \quad (5.13)$$

Για να έχουν οι εξισώσεις (5.13) μη τετριμμένη λύση ως προς  $\mu_i$  πρέπει η ορίζουσα των συντελεστών των αγνώστων να είναι ίση με μηδέν, δηλαδή πρέπει,

$$|\sigma_{ij} - \sigma\delta_{ij}| = 0 \quad (5.14)$$

Αναπτύσσοντας την ορίζουσα στο αριστερό μέλος της (5.14), παίρνουμε τη σχέση

$$\sigma^3 - I_1\sigma^2 - I_2\sigma - I_3 = 0 \quad (5.15)$$

όπου

$$I_1 = \sigma_{ii} \quad (5.16)$$

$$I_2 = \frac{1}{2}(\sigma_{ik}\sigma_{ki} - \sigma_{ii}\sigma_{kk}) \quad (5.17)$$

$$I_3 = \frac{1}{6}(\epsilon_{ijk}\epsilon_{pqr}\sigma_{ip}\sigma_{jq}\sigma_{kr}) \quad (5.18)$$

Η σχέση (5.15) είναι ίδια με τη σχέση (1.73).

Αποδεικνύεται ότι η (5.15) έχει τρεις πραγματικές ρίζες  $\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}$ . Έστω  $\vec{\mu}_{II}$  και  $\vec{\mu}_{III}$ , τα μοναδιαία διανύσματα στις διευθύνσεις των  $\sigma_{II}$  και  $\sigma_{III}$  αντίστοιχα. Από την (5.13) έχουμε

$$\sigma_{ij}\mu_i^{II} - \sigma_{II}\delta_{ij}\mu_i^{II} = 0 \quad (5.19)$$

$$\sigma_{ij}\mu_i^{III} - \sigma_{III}\delta_{ij}\mu_i^{III} = 0 \quad (5.20)$$

Πολλαπλασιάζοντας την (5.19) επί  $\mu_j^{III}$  και την (5.20) επί  $\mu_j^{II}$  και αφαιρώντας τις κατά μέλη, βρίσκουμε ότι

$$(\sigma_{II} - \sigma_{III})\delta_{ij}\mu_i^{II}\mu_j^{III} = 0 \implies (\sigma_{II} - \sigma_{III})\mu_i^{II}\mu_i^{III} = 0 \quad (5.21)$$

λαμβάνοντας υπ' όψη ότι οι άεργοι δείκτες μπορούν να αλλάξουν θέση αμοιβαία και ότι  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ . Από την (5.21) καταλήγουμε στη σχέση

$$\mu_i^{II}\mu_i^{III} = 0 \quad (5.22)$$

αν  $\sigma_{II} \neq \sigma_{III}$ . Δηλαδή τα κύρια επίπεδα των  $\sigma_{II}$  και  $\sigma_{III}$  είναι κάθετα μεταξύ τους, αν  $\sigma_{II} \neq \sigma_{III}$ . Όμοια δείχνουμε και ότι

$$\mu_i^I \mu_i^{II} = 0 \quad (5.23)$$

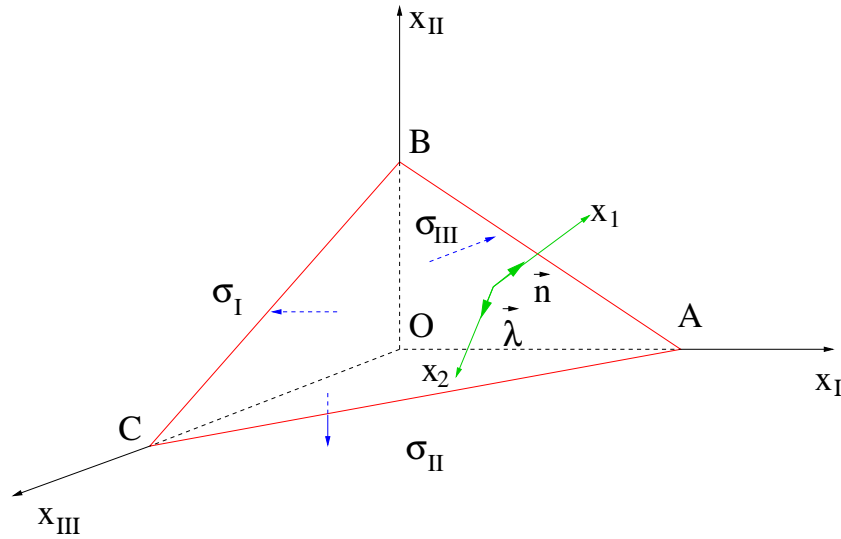
$$\mu_i^I \mu_i^{III} = 0 \quad (5.24)$$

Επομένως τα κύρια επίπεδα είναι κάθετα μεταξύ τους, αν  $\sigma_I \neq \sigma_{II} \neq \sigma_{III}$ . Αν  $\sigma_I \neq \sigma_{II} = \sigma_{III}$  αποδεικνύεται ότι όλες οι διευθύνσεις στο επίπεδο των  $\sigma_{II}$  και  $\sigma_{III}$  είναι κύριες διευθύνσεις. Οι τάσεις  $\sigma_{ij}$ , σε οποιοδήποτε σύστημα, δίνονται σαν συναρτήσεις των κυρίων τάσεων, από τη σχέση

$$\sigma_{ij} = \sigma_I \mu_i^I \mu_j^I + \sigma_{II} \mu_i^{II} \mu_j^{II} + \sigma_{III} \mu_i^{III} \mu_j^{III} \quad (5.25)$$

## 5.2 Ακρότατες διατμητικές τάσεις

Επιλέγω σαν αρχικό σύστημα το σύστημα των κυρίων τάσεων  $Ox_Ix_{II}x_{III}$ . Θα μελετήσουμε τα ακρότατα της διατμητικής τάσης  $\sigma_{12}$ , όπου οι κάθετοι μεταξύ τους άξονες  $x_1$  και  $x_2$ , με μοναδιαία διανύσματα  $\vec{n}$  και  $\vec{\lambda}$  αντίστοιχα, είναι αυθαίρετοι (Σχήμα 5.2). Από την (5.25) έχουμε



Σχήμα 5.2: Τετράεδρο σε σύστημα κύριων τάσεων.

$$\sigma_{12} = \sigma_I \mu_1^I \mu_2^I + \sigma_{II} \mu_1^{II} \mu_2^{II} + \sigma_{III} \mu_1^{III} \mu_2^{III} \quad (5.26)$$

Έστω

$$n_R : R = I, II, III \quad (5.27)$$

$$\lambda_R : R = I, II, III \quad (5.28)$$

οι συνιστώσες των μοναδιαίων διανυσμάτων  $\vec{n}$  και  $\vec{\lambda}$ , των αξόνων  $x_1$  και  $x_2$  αντίστοιχα, ως προς το κύριο σύστημα  $Ox_Ix_{II}x_{III}$ . Η (5.26), εξαιτίας των (5.27) και (5.28) γράφεται

$$\sigma_{12} = \sigma_I n_I \lambda_I + \sigma_{II} n_{II} \lambda_{II} + \sigma_{III} n_{III} \lambda_{III} \quad (5.29)$$

Ζητάμε τα ακρότατα της  $\sigma_{12}$ , δηλαδή θα βρούμε τα  $n_R, \lambda_R$  για τα οποία η  $\sigma_{12}$  παίρνει ακρότατες τιμές. Μεταξύ των  $n_R, \lambda_R$  ισχύουν οι περιορισμοί

$$C_1 = n_I \lambda_I + n_{II} \lambda_{II} + n_{III} \lambda_{III} = 0 \quad (5.30)$$

$$C_2 = n_I^2 + n_{II}^2 + n_{III}^2 - 1 = 0 \quad (5.31)$$

$$C_3 = \lambda_I^2 + \lambda_{II}^2 + \lambda_{III}^2 - 1 = 0 \quad (5.32)$$

Χρησιμοποιούμε τους πολλαπλασιαστές Lagrange  $\alpha, \beta$  και  $\gamma$ . Έτσι η (5.29), λόγω των (5.30) - (5.32) γράφεται

$$F = \sigma_{12} - \alpha C_1 - \beta C_2 - \gamma C_3 = \sigma_{12} \quad (5.33)$$

Στο ακρότατο της  $F$ , πρέπει να μηδενίζονται όλες οι μερικές παράγωγοί της, δηλαδή

$$\frac{\partial F}{\partial n_I} = \sigma_I \lambda_I - \alpha \lambda_I - 2\beta n_I = 0 \quad (5.34)$$

$$\frac{\partial F}{\partial n_{II}} = \sigma_{II} \lambda_{II} - \alpha \lambda_{II} - 2\beta n_{II} = 0 \quad (5.35)$$

$$\frac{\partial F}{\partial n_{III}} = \sigma_{III} \lambda_{III} - \alpha \lambda_{III} - 2\beta n_{III} = 0 \quad (5.36)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda_I} = \sigma_I n_I - \alpha n_I - 2\gamma \lambda_I = 0 \quad (5.37)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda_{II}} = \sigma_{II} n_{II} - \alpha n_{II} - 2\gamma \lambda_{II} = 0 \quad (5.38)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda_{III}} = \sigma_{III} n_{III} - \alpha n_{III} - 2\gamma \lambda_{III} = 0 \quad (5.39)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha} = -C_1 = 0 \quad (5.40)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \beta} = -C_2 = 0 \quad (5.41)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \gamma} = -C_3 = 0 \quad (5.42)$$

Πολλαπλασιάζοντας την (5.34) επί  $n_I$ , την (5.35) επί  $n_{II}$ , την (5.36) επί  $n_{III}$  και προσθέτοντάς τις, παίρνουμε

$$2\beta = \sigma_{12} \quad (5.43)$$

Όμοια μπορούμε να δείξουμε ότι

$$2\gamma = \sigma_{12} \quad (5.44)$$

$$\alpha = \sigma_I n_I^2 + \sigma_{II} n_{II}^2 + \sigma_{III} n_{III}^2 \quad (5.45)$$

Οι (5.34) - (5.39) είναι ομογενείς εξισώσεις ως προς  $n_I, n_{II}, n_{III}, \lambda_I, \lambda_{II}, \lambda_{III}$ . Μια τετριμμένη λύση τους δίνει

$$n_I = n_{II} = 0, \quad n_{III} = \pm 1 \quad (5.46)$$

$$n_I = n_{III} = 0, \quad n_{II} = \pm 1 \quad (5.47)$$

$$n_{II} = n_{III} = 0, \quad n_I = \pm 1 \quad (5.48)$$

$$(5.49)$$

που αντιστοιχούν στα κύρια επίπεδα πάνω στα οποία οι διατμητικές τάσεις είναι ίσες με μηδέν. Η αναγκαία συνθήκη για μη τετριμμένη λύση των (5.34) - (5.39) δίνει

$$\sigma_{12} = \pm(\sigma_I - \sigma_I n_I^2 - \sigma_{II} n_{II}^2 - \sigma_{III} n_{III}^2) \quad (5.50)$$

$$\sigma_{12} = \pm(\sigma_{II} - \sigma_I n_I^2 - \sigma_{II} n_{II}^2 - \sigma_{III} n_{III}^2) \quad (5.51)$$

$$\sigma_{12} = \pm(\sigma_{III} - \sigma_I n_I^2 - \sigma_{II} n_{II}^2 - \sigma_{III} n_{III}^2) \quad (5.52)$$

Τα  $n_R$  που ικανοποιούν τις (5.50) - (5.52) και τις (5.30) - (5.32) είναι

$$n_{II} = 0, \quad n_I = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad n_{III} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (5.53)$$

$$n_I = 0, \quad n_{II} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad n_{III} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (5.54)$$

$$n_{III} = 0, \quad n_I = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad n_{II} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (5.55)$$

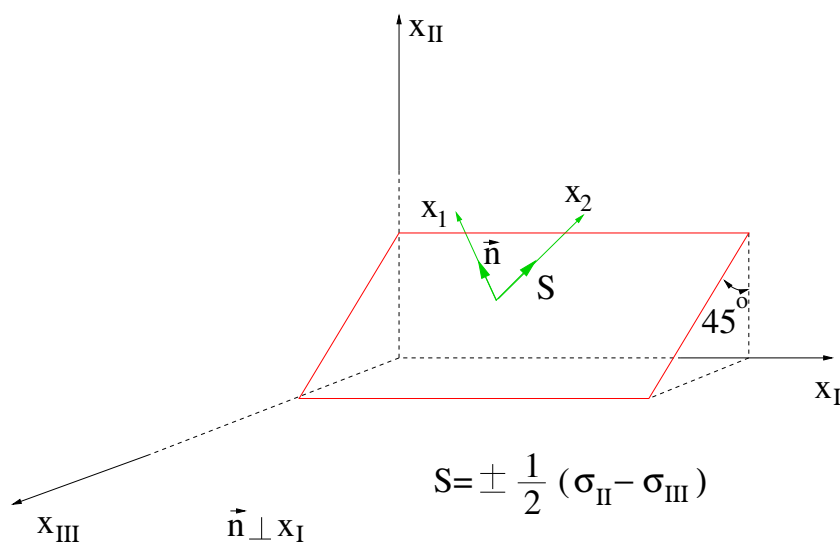
Επομένως τα επίπεδα των ακρότατων διατμητικών τάσεων, είναι παράλληλα προς έναν από τους κύριους άξονες και σχηματίζουν γωνία  $45^\circ$  με καθένα από τους άλλους δύο άξονες (Σχήμα 5.3). Θέτοντας τις (5.53) - (5.55) στις (5.50) - (5.52) παίρνουμε

$$\sigma_{12} = \tau_1 = \pm \frac{1}{2}(\sigma_I - \sigma_{III}) \quad (5.56)$$

$$\sigma_{12} = \tau_2 = \pm \frac{1}{2}(\sigma_{II} - \sigma_{III}) \quad (5.57)$$

$$\sigma_{12} = \tau_3 = \pm \frac{1}{2}(\sigma_I - \sigma_{II}) \quad (5.58)$$

Η μέγιστη κατ' απόλυτη τιμή διατμητική τάση, ασκείται πάνω σ' ένα επίπεδο, το εξωτερικό μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα του οποίου, διχοτομεί τη γωνία μεταξύ των κυρίων επιπέδων, της μέγιστης και της ελάχιστης κύριας τάσης (Σχήμα 5.3).

Σχήμα 5.3: Επίπεδο ακρότατης διατμητικής τάσης  $\sigma_{12}$ .

### 5.3 Εξισώσεις ισορροπίας

Έστω  $V$  ο όγκος ενός συνεχούς μέσου,  $S$  η επιφάνεια που τον περιβάλλει,  $F_k$  η κατανομή των μαζικών δυνάμεων ανά μονάδα όγκου,  $\tau_k^\mu$  το διάνυσμα τάσης στην επιφάνεια  $S$  και  $\mu_i$  το μοναδιαίο εξωτερικό κάθετο διάνυσμα στη στοιχειώδη επιφάνεια  $dS$ .

Από την ισορροπία δυνάμεων προκύπτει ότι

$$\int_V F_k dV + \int_S \tau_k^\mu dS = 0 \xrightarrow{(5.12)} \int_V F_k dV + \int_S \sigma_{ik} \mu_i dS = 0 \quad (5.59)$$

Από το θεώρημα Gauss, η (5.59) γράφεται

$$\int_V F_k dV + \int_V \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_i} dV = 0 \implies \int_V \left( F_k + \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_i} \right) dV = 0 \quad (5.60)$$

Η (5.60) πρέπει να ισχύει για κάθε όγκο  $V$  που εμπεριέχεται μέσα στο σώμα. Επομένως πρέπει

$$\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_i} + F_k = 0 \quad (5.61)$$

Οι διαφορικές εξισώσεις ισορροπίας (5.61) είναι ίδιες με τις (1.42) - (1.44).

Από την ισορροπία ροπών ως προς την αρχή του συστήματος συντεταγμένων έχουμε, λόγω της (4.57)

$$M_i = \int_V \epsilon_{ijk} x_j F_k dV + \int_S \epsilon_{ijk} x_j \tau_k^\mu dS = 0 \quad (5.62)$$

Λόγω του θεωρήματος Gauss έχουμε

$$\begin{aligned} \int_S \epsilon_{ijk} x_j T_k^\mu dS &= \int_S \epsilon_{ijk} x_j \mu_l \sigma_{lk} dS = \int_V \frac{\partial(\epsilon_{ijk} x_j \sigma_{lk})}{\partial x_l} dV = \\ &= \int_V \epsilon_{ijk} \left( \delta_{jl} \sigma_{lk} + x_j \frac{\partial \sigma_{lk}}{\partial x_l} \right) dV \stackrel{(5.61)}{=} \int_V \epsilon_{ijk} (\sigma_{jk} - x_j F_k) dV \end{aligned} \quad (5.63)$$

Από την (5.63), η (5.62) δίνει

$$\int_V \epsilon_{ijk} \sigma_{jk} dV = 0 \implies \epsilon_{ijk} \sigma_{jk} = 0 \quad (5.64)$$

επειδή πρέπει να ισχύει για κάθε όγκο  $V$  που εμπεριέχεται μέσα στο σώμα. Το ανάπτυγμα της (5.64) δίνει

$$\sigma_{12} = \sigma_{21} \quad (5.65)$$

$$\sigma_{23} = \sigma_{32} \quad (5.66)$$

$$\sigma_{13} = \sigma_{31} \quad (5.67)$$

ή γράφοντας με δείκτες

$$\sigma_{ik} = \sigma_{ki} \quad (5.68)$$

## 5.4 Ασκήσεις

### 5.4.1 Άσκηση

Η μέση τάση  $\sigma_m$  ορίζεται ως

$$\sigma_m = \frac{1}{3} \sigma_{ii} \quad (5.69)$$

και ο αποκλίνων τανυστής τάσης  $\sigma_{ij}^*$  ορίζεται ως

$$\sigma_{ij}^* = \sigma_{ij} - \sigma_m \delta_{ij} \quad (5.70)$$

Δείξτε ότι

$$I_2^* = \frac{2}{3} (\tau_1^2 + \tau_2^2 + \tau_3^2) \quad (5.71)$$

όπου  $I_2^*$  είναι η δεύτερη αναλλοίωτη του αποκλίνοντα τανυστή τάσης  $\sigma_{ij}^*$  και  $\tau_1$ ,  $\tau_2$  και  $\tau_3$  είναι οι ακρότατες διατμητικές τάσεις.

### 5.4.2 Άσκηση

Δείξτε ότι η σχέση μετασχηματισμού των τάσεων

$$\sigma'_{kl} = \alpha_{ik} \alpha_{jl} \sigma_{ij} \quad (5.72)$$

μπορεί να εξαχθεί από τη σχέση

$$\tau_i^\mu \nu_i = \sigma_{ij} \mu_j \nu_i \quad (5.73)$$

όπου τα  $\mu_j$  και  $\nu_i$  είναι μοναδιαία διανύσματα σε δύο οποιοσδήποτε διευθύνσεις.



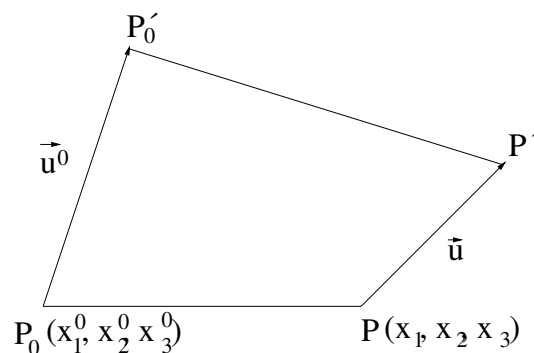


## Κεφάλαιο 6

# Παραμορφώσεις, μετατοπίσεις και ο νόμος Hooke

### 6.1 Παραμόρφωση και μετατόπιση

Έστω  $P_0$  και  $P$  οι αρχικές θέσεις δύο γειτονικών υλικών σημείων ενός σώματος (Σχήμα 6.1). Οι συντεταγμένες τους είναι  $(x_1^0, x_2^0, x_3^0)$  και



Σχήμα 6.1: Μετατοπίσεις και παραμορφώσεις στη γειτονιά του σημείου  $P_0$ .

$(x_1, x_2, x_3)$  αντίστοιχα. Όταν το σώμα φορτίζεται και παραμορφώνεται, το  $P_0$  μετακινείται στο  $P'_0(x_1^0 + u_1^0, x_2^0 + u_2^0, x_3^0 + u_3^0)$  και το διάνυσμα της μετατόπισης είναι  $u_i^0$ . Όμοια το  $P$  μετατοπίζεται στο  $P'(x_1 + u_1, x_2 + u_2, x_3 + u_3)$ . Θεωρούμε ότι οι συντεταγμένες  $x_j - x_j^0$  είναι απειροστές, δηλαδή επικεντρώνουμε την προσοχή μας στη γειτονιά του  $P^0$ . Θεωρούμε επίσης τις μετατοπίσεις συνεχείς, που σημαίνει ότι η σχετική μετακίνηση του  $P$  ως προς το  $P_0$  είναι απειροστή.

Η μετατόπιση είναι συνάρτηση της θέσης, δηλαδή

$$u_i = u_i(x_1, x_2, x_3) \quad (6.1)$$

Αναπτύσσουμε την  $u_i$  σε σειρά Taylor στη γειτονιά του  $P_0$  και παίρνουμε

$$u_i = u_i^0 + \frac{\partial u_i}{\partial x_j}(x_j - x_j^0) + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_k}(x_j - x_j^0)(x_k - x_k^0) + \dots \quad (6.2)$$

Επειδή η ποσότητα  $x_j - x_j^0$  είναι απειροστή, αγνοούμε τους όρους της (6.2) που περιέχουν το  $x_j - x_j^0$  υψωμένο σε δυνάμεις μεγαλύτερες ή ίσες του 2. Έτσι η (6.2) δίνει

$$u_i = u_i^0 + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_j \quad (6.3)$$

όπου

$$dx_j = x_j - x_j^0 \quad (6.4)$$

Επειδή το  $u_i$  είναι διάνυσμα, η βαθμίδα του είναι τανυστής δεύτερης τάξης, όπως είδαμε στο Παράδειγμα (4.3.2) και μπορεί να γραφεί σαν άθροισμα ενός συμμετρικού και ενός αντισυμμετρικού τανυστή (Ενότητα 4.3). Έτσι η (6.3) δίνει

$$u_i = u_i^0 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) dx_j + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) dx_j \quad (6.5)$$

ή

$$u_i = u_i^0 + \epsilon_{ij} dx_j + \omega_{ij} dx_j \quad (6.6)$$

όπου

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (6.7)$$

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (6.8)$$

Οι (6.7) και (6.8) εκφράζουν τις παραμορφώσεις και τις στροφές και

είναι ίδιες με τις (2.16) - (2.21) και τις (2.63) - (2.65). Έτσι

$$\epsilon_{11} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \epsilon_{xx} \quad (6.9)$$

$$\epsilon_{22} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = \epsilon_{yy} \quad (6.10)$$

$$\epsilon_{33} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) = \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = \epsilon_{zz} \quad (6.11)$$

$$\epsilon_{12} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) = \frac{1}{2} \gamma_{xy} \quad (6.12)$$

$$\epsilon_{23} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) = \frac{1}{2} \gamma_{yz} \quad (6.13)$$

$$\epsilon_{13} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right) = \frac{1}{2} \gamma_{xz} \quad (6.14)$$

$$\omega_{32} = -\omega_{23} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right) = \omega_x \quad (6.15)$$

$$\omega_{13} = -\omega_{31} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) = \omega_y \quad (6.16)$$

$$\omega_{21} = -\omega_{12} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) = \omega_z \quad (6.17)$$

Τα στοιχεία του τανυστή  $\omega_{ij}$  εκφράζουν μικρές γωνίες στροφής, γύρω από άξονες παράλληλους ως προς τους  $x$ ,  $y$  και  $z$ , στο σημείο  $P_0$ . Το μητρώο  $\omega_{ij}$  παριστάνει το στροβιλισμό (curl) του πεδίου των μετατοπίσεων  $u_i$ . Από τις (6.7) και (6.8) φαίνεται ότι τα μητρώα  $\epsilon_{ij}$  και  $\omega_{ij}$  είναι τανυστές δεύτερης τάξης.

Στο δεύτερο μέλος της σχέσης (6.6), ο πρώτος όρος εκφράζει τη μετατόπιση του σημείου  $P_0$ , ο δεύτερος όρος εκφράζει τη σχετική μετακίνηση του σημείου  $P$  ως προς το  $P_0$  λόγω παραμόρφωσης και ο τρίτος όρος εκφράζει τη σχετική μετακίνηση του  $P$ , λόγω στροφής γύρω από το  $P_0$ .

## 6.2 Γενικευμένος νόμος του Hooke

Σε τρεις διαστάσεις, η γραμμική σχέση τάσεων - παραμορφώσεων μπορεί να γραφεί ως

$$\sigma_{11} = K_{11}\epsilon_{xx} + K_{12}\epsilon_{yy} + K_{13}\epsilon_{zz} + K_{14}\gamma_{yz} + K_{15}\gamma_{zx} + K_{16}\gamma_{xy} \quad (6.18)$$

$$\sigma_{22} = K_{21}\epsilon_{xx} + K_{22}\epsilon_{yy} + K_{23}\epsilon_{zz} + K_{24}\gamma_{yz} + K_{25}\gamma_{zx} + K_{26}\gamma_{xy} \quad (6.19)$$

$$\sigma_{33} = K_{31}\epsilon_{xx} + K_{32}\epsilon_{yy} + K_{33}\epsilon_{zz} + K_{34}\gamma_{yz} + K_{35}\gamma_{zx} + K_{36}\gamma_{xy} \quad (6.20)$$

$$\sigma_{23} = K_{41}\epsilon_{xx} + K_{42}\epsilon_{yy} + K_{43}\epsilon_{zz} + K_{44}\gamma_{yz} + K_{45}\gamma_{zx} + K_{46}\gamma_{xy} \quad (6.21)$$

$$\sigma_{31} = K_{51}\epsilon_{xx} + K_{52}\epsilon_{yy} + K_{53}\epsilon_{zz} + K_{54}\gamma_{yz} + K_{55}\gamma_{zx} + K_{56}\gamma_{xy} \quad (6.22)$$

$$\sigma_{12} = K_{61}\epsilon_{xx} + K_{62}\epsilon_{yy} + K_{63}\epsilon_{zz} + K_{64}\gamma_{yz} + K_{65}\gamma_{zx} + K_{66}\gamma_{xy} \quad (6.23)$$

Στις (6.18) - (6.23) έχουμε 36 ελαστικές σταθερές  $K_{MN}$  όπου  $M = 1, 2, \dots, 6$  και  $N = 1, 2, \dots, 6$ , διότι οι σχέσεις συμμετρίας των  $\sigma_{ij}$  και  $\epsilon_{ij}$  έχουν ήδη χρησιμοποιηθεί.

Χρησιμοποιώντας ένα άλλο σύνολο ελαστικών σταθερών  $C_{ijkl}$ , οι (6.18) - (6.23) γράφονται ως

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} = C_{ijkl}\epsilon_{kl} = & C_{ij11}\epsilon_{11} + C_{ij12}\epsilon_{12} + C_{ij13}\epsilon_{13} + \\ & C_{ij21}\epsilon_{21} + C_{ij22}\epsilon_{22} + C_{ij23}\epsilon_{23} + \\ & C_{ij31}\epsilon_{31} + C_{ij32}\epsilon_{32} + C_{ij33}\epsilon_{33} \end{aligned} \quad (6.24)$$

Τα  $C_{ijkl}$  αποτελούν ένα σύνολο με 81 σταθερές.

Εξ' αιτίας της συμμετρίας του τανυστή των παραμορφώσεων  $\epsilon_{ij}$ , θεωρούμε ότι

$$C_{ijkl} = C_{ijlk} \quad (6.25)$$

και ο αριθμός των ανεξάρτητων ελαστικών σταθερών περιορίζεται στις 54. Δε χάνεται όμως η γενικότητα των (6.18) - (6.23), διότι π. χ.

$$C_{ij21}\epsilon_{21} + C_{ij12}\epsilon_{12} = (C_{ij21} + C_{ij12})\epsilon_{12} = C_{ij12}\gamma_{xy} \quad (6.26)$$

Επίσης οι συντελεστές των ορθών παραμορφώσεων, στις (6.18) - (6.23), δεν επηρεάζονται από τη θεώρηση αυτή.

Παραπέρα, επειδή

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad (6.27)$$

πρέπει να ισχύει και η σχέση

$$C_{ijkl} = C_{jikl} \quad (6.28)$$

και έτσι ο αριθμός των ανεξάρτητων ελαστικών σταθερών μειώνεται στις 36. Με βάση τις σχέσεις συμμετρίας, (6.25) και (6.28), οι καταστατικές εξισώσεις (6.18) - (6.23) και οι (6.24) γίνονται ισοδύναμες. Θεωρήσεις σχετικά με την ανάγκη για θετική ενέργεια παραμόρφωσης, οδηγούν σε παραπέρα μείωση των ελαστικών σταθερών σε 21.

### 6.2.1 Παράδειγμα

Ν' αποδειχτεί ότι οι ελαστικές σταθερές  $C_{ijkl}$  αποτελούν τανυστή τέταρτης τάξης.

Γνωρίζουμε ότι

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\epsilon_{kl} \quad (6.29)$$

$$\sigma_{ij} = \alpha_{im}\alpha_{jp}\sigma'_{mp} \quad (6.30)$$

Από τις (6.29) και (6.30) έχουμε ότι

$$C_{ijkl}\epsilon_{kl} = \alpha_{im}\alpha_{jp}\sigma'_{mp} \quad (6.31)$$

Έστω ότι οι ελαστικές σταθερές στο τονούμενο σύστημα είναι  $C'_{mpqr}$ . Τότε

$$\sigma'_{mp} = C'_{mpqr}\epsilon'_{qr} \quad (6.32)$$

Αλλά

$$\epsilon'_{qr} = \alpha_{kq}\alpha_{lr}\epsilon_{kl} \quad (6.33)$$

Η (6.31), λόγω των (6.32) και (6.33) γράφεται ως

$$\begin{aligned} C_{ijkl}\epsilon_{kl} &= \alpha_{im}\alpha_{jp}C'_{mpqr}\alpha_{kq}\alpha_{lr}\epsilon_{kl} \implies \\ (C_{ijkl} - \alpha_{im}\alpha_{jp}\alpha_{kq}\alpha_{lr}C'_{mpqr})\epsilon_{kl} &= 0 \end{aligned} \quad (6.34)$$

Η (6.34) πρέπει να ισχύει για οποιοδήποτε πεδίο παραμόρφωσης  $\epsilon_{kl}$ , δηλαδή πρέπει

$$C_{ijkl} = \alpha_{im}\alpha_{jp}\alpha_{kq}\alpha_{lr}C'_{mpqr} \quad (6.35)$$

Η (6.35) είναι η σχέση μετασχηματισμού ενός τανυστή τέταρτης τάξης, από το τελικό (τονούμενο) σύστημα στο αρχικό. Επομένως οι ελαστικές σταθερές  $C_{ijkl}$  αποτελούν τανυστή τέταρτης τάξης.

## 6.3 Ισότροπα υλικά

Στα ισότροπα υλικά, επειδή οι μηχανικές ιδιότητες είναι ίδιες προς οποιαδήποτε διεύθυνση, ισχύει ότι

$$C_{ijkl} = C'_{ijkl} \quad (6.36)$$

ή

$$\sigma'_{ij} = C_{ijkl}\epsilon'_{kl} \quad (6.37)$$

επειδή και οι ελαστικές σταθερές είναι ίδιες προς οποιαδήποτε κατεύθυνση.

### 6.3.1 Παράδειγμα

Ν' αποδειχθεί ότι στα ισότροπα υλικά, οι κύριοι άξονες των παραμορφώσεων συμπίπτουν με τους κύριους άξονες των τάσεων.

Θεωρούμε ως αρχικό σύστημα, το κύριο σύστημα παραμορφώσεων όπου

$$\epsilon_{12} = \epsilon_{13} = \epsilon_{23} = 0 \quad (6.38)$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση (6.24) στο αρχικό (κύριο) σύστημα  $Ox_1x_2x_3$ , γράφουμε για την τάση  $\sigma_{23}$

$$\sigma_{23} = C_{2311}\epsilon_{11} + C_{2322}\epsilon_{22} + C_{2333}\epsilon_{33} \quad (6.39)$$

Στρέφουμε το κύριο σύστημα  $Ox_1x_2x_3$  γύρω από τον άξονα  $x_3$  κατά  $180^\circ$ . Τα συνημίτονα κατεύθυνσης του νέου συστήματος (τονούμενου) ως προς το αρχικό, είναι

$$\alpha_{ij} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (6.40)$$

Στο νέο σύστημα έχουμε

$$\sigma'_{23} = \alpha_{k2}\alpha_{l3}\sigma_{kl} \stackrel{(6.40)}{=} -\sigma_{23} \quad (6.41)$$

Επειδή όμως

$$\epsilon'_{ij} = \alpha_{ki}\alpha_{lj}\epsilon_{kl} \quad (6.42)$$

και εξ αιτίας των σχέσεων (6.38) και (6.40), η (6.42) δίνει

$$\epsilon'_{ij} = \begin{pmatrix} \epsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{33} \end{pmatrix} \quad (6.43)$$

που σημαίνει ότι τα στοιχεία του τανυστή της παραμόρφωσης στα δύο συστήματα είναι ίδια.

Από τις (6.41) και (6.43), η (6.37) δίνει

$$-\sigma_{23} = C_{2311}\epsilon_{11} + C_{2322}\epsilon_{22} + C_{2333}\epsilon_{33} \quad (6.44)$$

Από τις (6.39) και (6.44) συμπεραίνουμε ότι

$$\sigma_{23} = 0 \quad (6.45)$$

Όμοια δείχνουμε και ότι  $\sigma_{13} = \sigma_{12} = 0$ , δηλαδή ότι το κύριο σύστημα παραμορφώσεων είναι και κύριο σύστημα τάσεων, σε ισότροπα υλικά.

### 6.3.2 Παράδειγμα

Ν' αποδειχθεί ότι για ισότροπα υλικά, οι ανεξάρτητες ελαστικές σταθερές είναι μόνο δύο.

Ως προς το κύριο σύστημα  $Ox_1x_2x_3$ , οι σχέσεις τάσεων - παραμορφώσεων δίνονται λόγω της (6.24), από τις σχέσεις

$$\sigma_{11} = C_{1111}\epsilon_{11} + C_{1122}\epsilon_{22} + C_{1133}\epsilon_{33} \quad (6.46)$$

$$\sigma_{22} = C_{2211}\epsilon_{11} + C_{2222}\epsilon_{22} + C_{2233}\epsilon_{33} \quad (6.47)$$

$$\sigma_{33} = C_{3311}\epsilon_{11} + C_{3322}\epsilon_{22} + C_{3333}\epsilon_{33} \quad (6.48)$$

Επειδή ο  $C_{ijkl}$  είναι τανυστής τέταρτης τάξης και παίρνοντας υπ' όψη και την (6.36), γράφουμε

$$C_{mpqr} = \alpha_{mi}\alpha_{pj}\alpha_{qk}\alpha_{rl}C'_{ijkl} = \alpha_{mi}\alpha_{pj}\alpha_{qk}\alpha_{rl}C_{ijkl} \quad (6.49)$$

Σ' ένα νέο σύστημα  $x'_i$ , που προκύπτει με στροφή  $90^\circ$  σε σχέση με το αρχικό, γύρω από τον άξονα  $x_1$ , τα συνημίτονα κατεύθυνσης είναι

$$\alpha_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (6.50)$$

Λόγω της (6.50), η (6.49) δίνει

$$C_{11qr} = \alpha_{qk}\alpha_{rl}C_{11kl} \quad (6.51)$$

$$C_{22qr} = \alpha_{qk}\alpha_{rl}C_{33kl} \quad (6.52)$$

$$C_{33qr} = \alpha_{qk}\alpha_{rl}C_{22kl} \quad (6.53)$$

Οι (6.51) - (6.53), εξ αιτίας της (6.50), δίνουν

$$C_{1133} = C_{1122} \quad (6.54)$$

$$C_{2211} = C_{3311} \quad (6.55)$$

$$C_{2222} = C_{3333} \quad (6.56)$$

$$C_{2233} = C_{3322} \quad (6.57)$$

Όμοια με στροφή  $90^\circ$  γύρω από τον άξονα  $x_2$ , για την οποία τα συνημίτονα κατεύθυνσης είναι

$$\alpha_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (6.58)$$

παίρνουμε

$$C_{2211} = C_{2233} \quad (6.59)$$

$$C_{3322} = C_{1122} \quad (6.60)$$

$$C_{1111} = C_{3333} \quad (6.61)$$

$$C_{1133} = C_{3311} \quad (6.62)$$

Από τις (6.54) - (6.57) και (6.59) - (6.62) προκύπτει ότι

$$C_{1111} = C_{2222} = C_{3333} = C \quad (6.63)$$

$$C_{1122} = C_{1133} = C_{2211} = C_{2233} = C_{3311} = C_{3322} = \lambda \quad (6.64)$$

όπου  $\lambda$  είναι μια από τις σταθερές του Lamé. Οι (6.46) - (6.48) γράφονται ως

$$\sigma_{11} = \lambda\epsilon + 2G\epsilon_{11} \quad (6.65)$$

$$\sigma_{22} = \lambda\epsilon + 2G\epsilon_{22} \quad (6.66)$$

$$\sigma_{33} = \lambda\epsilon + 2G\epsilon_{33} \quad (6.67)$$

όπου

$$\epsilon = \epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33} = \epsilon_{ii} = \epsilon'_{ii} \quad (6.68)$$

και

$$2G = C - \lambda \quad (6.69)$$

όπου  $G$  είναι το μέτρο διάτμησης.

Μετασχηματίζοντας τις τάσεις σε τυχαίο σύστημα  $x'_i$ , θεωρώντας το κύριο σύστημα ως αρχικό, παίρνουμε

$$\begin{aligned} \sigma'_{ij} &= \alpha_{ki}\alpha_{lj}\sigma_{kl} = \\ \alpha_{1i}\alpha_{1j}(\lambda\epsilon + 2G\epsilon_{11}) + \alpha_{2i}\alpha_{2j}(\lambda\epsilon + 2G\epsilon_{22}) + \alpha_{3i}\alpha_{3j}(\lambda\epsilon + 2G\epsilon_{33}) &= \\ \alpha_{mi}\alpha_{mj}\lambda\epsilon + 2G\epsilon'_{ij} & \quad (6.70) \end{aligned}$$

Ο δεύτερος όρος στο δεξί μέλος της (6.70) προκύπτει από το μετασχηματισμό των παραμορφώσεων. Τελικά λόγω των (4.27) και (4.28), η (6.70) δίνει

$$\sigma'_{ij} = \lambda\epsilon\delta_{ij} + 2G\epsilon'_{ij} \quad (6.71)$$

Επειδή το  $\epsilon$  είναι αναλλοίωτη ποσότητα ως προς οποιοδήποτε σύστημα συντεταγμένων και επειδή ο  $\delta_{ij}$  είναι ισότροπος τανυστής (δεν μεταβάλλονται τα στοιχεία του με αλλαγή του συστήματος συντεταγμένων στο οποίο αυτός αναφέρεται), η (6.71) γράφεται

$$\sigma'_{ij} = \lambda\epsilon'\delta'_{ij} + 2G\epsilon'_{ij} \quad (6.72)$$

ή

$$\sigma_{ij} = \lambda\epsilon\delta_{ij} + 2G\epsilon_{ij} \quad (6.73)$$



Η (6.73) είναι ίδια με τις (3.23) - (3.28). Τα  $G$  και  $\lambda$  είναι οι σταθερές του Lamé.

Οι παραμορφώσεις μπορούν να βρεθούν σαν συναρτήσεις των τάσεων. Από την (6.73) βρίσκουμε ότι

$$\sigma_{kk} = 3\lambda\epsilon + 2G\epsilon_{kk} = (3\lambda + 2G)\epsilon \quad (6.74)$$

Θέτοντας την τιμή του  $\epsilon$  που προκύπτει από την (6.74), στην (6.73) και λύνοντας την τελευταία ως προς  $\epsilon_{ij}$ , καταλήγουμε στη σχέση

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2G} \left( \sigma_{ij} - \lambda \delta_{ij} \frac{\sigma_{kk}}{3\lambda + 2G} \right) \quad (6.75)$$

ή ισοδύναμα στη σχέση

$$\epsilon_{ij} = \frac{1 + \nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \delta_{ij} \Theta \quad (6.76)$$

όπου

$$\Theta = \sigma_{kk} \quad (6.77)$$

$$E = \frac{G(3\lambda + 2G)}{\lambda + G} \quad (6.78)$$

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + G)} \quad (6.79)$$

όπου  $E$  και  $\nu$  είναι το μέτρο ελαστικότητας και ο λόγος του Poisson του υλικού αντίστοιχα. Οι εξισώσεις (6.75) είναι ίδιες με τις εξισώσεις (3.23) - (3.28)

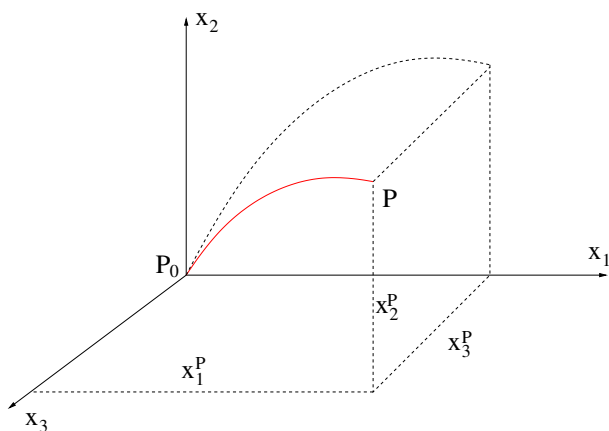
## 6.4 Εξισώσεις συμβιβαστού των παραμορφώσεων

Θα δείξουμε ότι η ικανοποίηση των εξισώσεων συμβιβαστού αποτελεί αναγκαία συνθήκη για να έχουμε μονότιμες, συνεχείς συναρτήσεις μετατοπίσεων σε απλά συνεκτικές περιοχές. Έστω ότι μέσα σ' ένα σώμα, ένα σημείο  $P_0$  βρίσκεται στην αρχή των αξόνων και ένα άλλο σημείο  $P$  έχει συντεταγμένες  $(x_1^P, x_2^P, x_3^P)$  (Σχήμα 6.2). Οι μετατοπίσεις των δύο σημείων είναι  $u_i^0$  και  $u_i^P$  αντίστοιχα. Οι μετατοπίσεις του σημείου  $P$ , σαν συνάρτηση των μετατοπίσεων του σημείου  $P_0$ , δίνονται από τη σχέση

$$u_i^P = u_i^0 + \int_C \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_j \quad (6.80)$$

όπου  $C$  είναι οποιαδήποτε συνεχής καμπύλη που συνδέει το  $P_0$  με το  $P$ . Εξ' αιτίας της (6.6), η (6.80) γράφεται

$$u_i^P = u_i^0 + \int_C \epsilon_{ij} dx_j + \int_C \omega_{ij} dx_j \quad (6.81)$$

Σχήμα 6.2: Μετατοπίσεις στα σημεία  $P_0$  και  $P$ .

Θα εκφράσουμε το δεύτερο ολοκλήρωμα, στο δεξί μέλος της (6.81), σαν συνάρτηση των παραμορφώσεων. Γράφουμε λοιπόν

$$\begin{aligned}\omega_{ij} &= \frac{1}{2}(u_{i,j} - u_{j,i}) \implies \omega_{ij,k} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_k} (u_{i,j} - u_{j,i}) = \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_k} (u_{i,j} - u_{j,i}) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_i} (u_{k,j} - u_{k,j}) = \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_j} (u_{i,k} + u_{k,i}) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_i} (u_{j,k} + u_{k,j}) \implies \\ &\omega_{ij,k} = \epsilon_{ik,j} - \epsilon_{jk,i}\end{aligned}\quad (6.82)$$

Επίσης

$$\int_C \omega_{ij} dx_j = \omega_{ij}^P x_j^P - \int_C x_j \omega_{ij,k} dx_k \quad (6.83)$$

όπου  $\omega_{ij}^P$  είναι οι συνιστώσες της στροφής στο σημείο  $P$ . Λόγω των (6.82), (6.83) η (6.81) δίνει

$$u_i^P = u_i^0 + \omega_{ij}^P x_j^P + \int_C [\epsilon_{ik} - x_j (\epsilon_{ik,j} - \epsilon_{jk,i})] dx_k \quad (6.84)$$

Επειδή η  $u_i^P$  πρέπει να είναι ίδια για κάθε συνεχή καμπύλη  $C$  που ενώνει τα σημεία  $P_0$  και  $P$ , η ολοκληρωτέα ποσότητα μέσα στην αγκύλη στο δεξί μέλος της εξίσωσης (6.84), πρέπει να είναι ακριβές διαφορικό (exact differential). Έτσι αν

$$Q_{ik} = \epsilon_{ik} - x_j (\epsilon_{ik,j} - \epsilon_{jk,i}) \quad (6.85)$$

πρέπει να ισχύει

$$Q_{ik} dx_k = dV_i = \frac{\partial V_i}{\partial x_k} dx_k \quad (6.86)$$

Παραπέρα

$$Q_{ik} = \frac{\partial V_i}{\partial x_k} \implies Q_{ik,l} = V_{i,kl} \implies Q_{il,k} = V_{i,lk} \quad (6.87)$$

Από την (6.87) συμπεραίνουμε ότι

$$Q_{ik,l} = Q_{il,k} \quad (6.88)$$

Λαμβάνοντας υπ' όψη την (6.85), η (6.88) δίνει

$$\begin{aligned} \epsilon_{ik,l} - \delta_{jl}(\epsilon_{ik,j} - \epsilon_{jk,i}) - x_j(\epsilon_{ik,jl} - \epsilon_{jk,il}) = \\ \epsilon_{il,k} - \delta_{jk}(\epsilon_{il,j} - \epsilon_{jl,i}) - x_j(\epsilon_{il,jk} - \epsilon_{jl,ik}) \implies \\ x_j [\epsilon_{ik,jl} - \epsilon_{jk,il} - \epsilon_{il,jk} + \epsilon_{jl,ik}] = 0 \end{aligned} \quad (6.89)$$

Η (6.89) πρέπει να ικανοποιείται για όλες τις τιμές του  $x_j$  και επομένως πρέπει

$$\epsilon_{il,jk} - \epsilon_{jl,ik} + \epsilon_{jk,il} - \epsilon_{ik,jl} = 0 \quad (6.90)$$

Οι 81 εξισώσεις (6.90) δεν είναι μεταξύ τους ανεξάρτητες. Όταν όλοι οι δείκτες είναι ίσοι πολλές από τις εξισώσεις ικανοποιούνται λόγω ταυτότητας. Επίσης αρκετές από τις εξισώσεις (6.90) αποτελούν επαναλήψεις άλλων. Έτσι τελικά οι 81 εξισώσεις μειώνονται σε 6 ανεξάρτητες εξισώσεις. Οι 6 αυτές ανεξάρτητες εξισώσεις είναι ίδιες με τις (2.27) - (2.32).

Κάνοντας συστολή ως προς τους δείκτες  $j$  και  $k$ , οι (6.90) γράφονται ως

$$\epsilon_{il,jj} - \epsilon_{jl,ij} + \epsilon_{jj,il} - \epsilon_{ij,jl} = 0 \quad (6.91)$$

που είναι ισοδύναμες, αλλά όχι ίδιες, με τις (6.90).

Οι (6.90) γράφονται και ως

$$\sigma_{ik,ll} + \frac{1}{1+\nu} \Theta_{,ik} = -\frac{\nu}{1-\nu} \delta_{ik} F_{j,j} - (F_{i,k} + F_{k,i}) \quad (6.92)$$

αν χρησιμοποιηθούν οι σχέσεις παραμορφώσεων - τάσεων (6.76) και οι εξισώσεις ισορροπίας (5.61). Οι (6.92) είναι οι εξισώσεις *Beltrami - Michell*.

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις τάσεων - παραμορφώσεων

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} + 2G \epsilon_{ij} \quad (6.93)$$

όπου

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (6.94)$$

$$\epsilon = u_{k,k} \quad (6.95)$$

στις εξισώσεις ισορροπίας (5.61), βρίσκουμε τελικά τις σχέσεις

$$G \nabla^2 u_i + (\lambda + G) \epsilon_{,i} + F_i = 0 \quad (6.96)$$

Οι (6.95) είναι οι εξισώσεις *Navier* που εκφράζουν την ισορροπία με χρήση των μετατοπίσεων.



## Κεφάλαιο 7

# Διέπουσες εξισώσεις της ελαστικότητας

Στο κεφάλαιο αυτό παραθέτουμε όλες τις διέπουσες εξισώσεις της ελαστικότητας, ανακεφαλαιώνοντας όσα αναφέραμε μέχρι τώρα. Η παρουσίαση όλων των διεπουσών εξισώσεων σ' ένα κεφάλαιο, παρ' ότι αποτελεί επανάληψή τους, κρίνεται αναγκαία για λόγους εύκολης εύρεσης και αναφοράς σ' αυτές. Στην πρώτη ενότητα οι εξισώσεις παρουσιάζονται με χρήση δεικτών ενώ στη δεύτερη ενότητα αυτές γράφονται σε αναπτυγμένη μορφή.

### 7.1 Διέπουσες εξισώσεις με χρήση δεικτών

1. Εξισώσεις ισορροπίας με χρήση των τάσεων

$$\sigma_{ij,j} + F_i = 0 \quad (7.1)$$

2. Σχέσεις μεταξύ παραμορφώσεων και μετατοπίσεων

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (7.2)$$

3. Καταστατικές σχέσεις μεταξύ τάσεων και παραμορφώσεων για ισότροπα, γραμμικά ελαστικά υλικά

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \epsilon_{kk} + 2G \epsilon_{ij} \quad (7.3)$$

$$\epsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \delta_{ij} \sigma_{kk} \quad (7.4)$$

4. Εξισώσεις συμβιβαστού των παραμορφώσεων

$$\epsilon_{il,jj} - \epsilon_{jl,ij} + \epsilon_{jj,il} - \epsilon_{ij,jl} = 0 \quad (7.5)$$

5. Εξισώσεις συμβιβαστού των παραμορφώσεων με χρήση των τάσεων (Beltrami - Michell)

$$\sigma_{ik,jj} + \frac{1}{1+\nu}\sigma_{jj,ik} = -\frac{\nu}{1-\nu}\delta_{ik}F_{j,j} - (F_{i,k} + F_{k,i}) \quad (7.6)$$

Προκύπτουν αν οι (7.4) εισαχθούν στις (7.5), με χρήση και των (7.1).

6. Σχέσεις μεταξύ τάσεων και μετατοπίσεων

$$\sigma_{ij} = \lambda\delta_{ij}u_{k,k} + G(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (7.7)$$

Προκύπτουν αν οι (7.2) εισαχθούν στις (7.3).

7. Εξισώσεις ισορροπίας με χρήση των μετατοπίσεων (Navier)

$$Gu_{i,jj} + (\lambda + G)u_{j,ji} + F_i = 0 \quad (7.8)$$

Προκύπτουν αν οι (7.7) εισαχθούν στις (7.1).

Οι σταθερές του Lamé,  $G$  και  $\lambda$  δίνονται από τις σχέσεις

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (7.9)$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (7.10)$$

σαν συναρτήσεις του μέτρου ελαστικότητας  $E$  και του λόγου Poisson  $\nu$ .

Εκτός από τις εξισώσεις (7.1) - (7.8), που πρέπει να ισχύουν σε κάθε υλικό σημείο στο εσωτερικό του σώματος, πρέπει να ικανοποιούνται και οι συνοριακές συνθήκες στο σύνορο του σώματος. Οι τελευταίες δίνονται είτε με το διάνυσμα τάσης  $T_i^\mu$  στο σύνορο, είτε με τις μετατοπίσεις  $u_i^b$  στο σύνορο, είτε με συνδυασμό και των δύο. Αν δίνεται το  $T_i^\mu$  στο σύνορο, πρέπει οι τάσεις στο σύνορο να ικανοποιούν τη σχέση

$$\sigma_{ij}\mu_i = T_j^\mu \quad (7.11)$$

## 7.2 Διέπουσες εξισώσεις σε αναπτυγμένη μορφή

Οι εξισώσεις (7.1) - (7.8) γράφονται ως:

1. Εξισώσεις ισορροπίας

$$\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z} + F_x = 0 \quad (7.12)$$

$$\frac{\partial\sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z} + F_y = 0 \quad (7.13)$$

$$\frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y} + F_z = 0 \quad (7.14)$$

## 2. Σχέσεις μεταξύ παραμορφώσεων και μετατοπίσεων

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (7.15)$$

$$\epsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (7.16)$$

$$\epsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (7.17)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (7.18)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \quad (7.19)$$

$$\gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \quad (7.20)$$

## 3. Καταστατικές σχέσεις μεταξύ τάσεων και παραμορφώσεων για ισότροπα, γραμμικά ελαστικά υλικά

$$\sigma_{xx} = 2G\epsilon_{xx} + \lambda(\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz}) \quad (7.21)$$

$$\sigma_{yy} = 2G\epsilon_{yy} + \lambda(\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz}) \quad (7.22)$$

$$\sigma_{zz} = 2G\epsilon_{zz} + \lambda(\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz}) \quad (7.23)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy} \quad (7.24)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{1}{G}\tau_{yz} \quad (7.25)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{1}{G}\tau_{xz} \quad (7.26)$$

ή

$$\epsilon_{xx} = \frac{1}{E} [\sigma_{xx} - \nu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})] \quad (7.27)$$

$$\epsilon_{yy} = \frac{1}{E} [\sigma_{yy} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{zz})] \quad (7.28)$$

$$\epsilon_{zz} = \frac{1}{E} [\sigma_{zz} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})] \quad (7.29)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy} \quad (7.30)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{1}{G}\tau_{yz} \quad (7.31)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{1}{G}\tau_{xz} \quad (7.32)$$

## 4. Εξισώσεις συμβιβαστού των παραμορφώσεων

$$\frac{\partial^2 \epsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{yy}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (7.33)$$

$$\frac{\partial^2 \epsilon_{yy}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{zz}}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} \quad (7.34)$$

$$\frac{\partial^2 \epsilon_{zz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{xx}}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x} \quad (7.35)$$

$$2 \frac{\partial^2 \epsilon_{xx}}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) \quad (7.36)$$

$$2 \frac{\partial^2 \epsilon_{yy}}{\partial z \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) \quad (7.37)$$

$$2 \frac{\partial^2 \epsilon_{zz}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) \quad (7.38)$$

## 5. Σχέσεις μεταξύ τάσεων και μετατοπίσεων

$$\sigma_{xx} = \lambda \epsilon + 2G \frac{\partial u}{\partial x} \quad (7.39)$$

$$\sigma_{yy} = \lambda \epsilon + 2G \frac{\partial v}{\partial y} \quad (7.40)$$

$$\sigma_{zz} = \lambda \epsilon + 2G \frac{\partial w}{\partial z} \quad (7.41)$$

$$\tau_{xy} = G \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (7.42)$$

$$\tau_{yz} = G \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \quad (7.43)$$

$$\tau_{zx} = G \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \quad (7.44)$$

## 6. Εξισώσεις συμβιβαστού των παραμορφώσεων με χρήση των τά-



σεων (Beltrami - Michell)

$$\nabla^2 \sigma_{xx} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} = -\frac{\nu}{1-\nu} \left[ \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \right] - 2 \frac{\partial F_x}{\partial x} \quad (7.45)$$

$$\nabla^2 \sigma_{yy} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^2} = -\frac{\nu}{1-\nu} \left[ \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \right] - 2 \frac{\partial F_y}{\partial y} \quad (7.46)$$

$$\nabla^2 \sigma_{zz} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} = -\frac{\nu}{1-\nu} \left[ \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \right] - 2 \frac{\partial F_z}{\partial z} \quad (7.47)$$

$$\nabla^2 \tau_{yz} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y \partial z} = - \left( \frac{\partial F_z}{\partial y} + \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) \quad (7.48)$$

$$\nabla^2 \tau_{zx} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z \partial x} = - \left( \frac{\partial F_x}{\partial z} + \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) \quad (7.49)$$

$$\nabla^2 \tau_{xy} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x \partial y} = - \left( \frac{\partial F_y}{\partial x} + \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \quad (7.50)$$

όπου

$$\Theta = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz} \quad (7.51)$$

7. Εξισώσεις ισορροπίας με χρήση των μετατοπίσεων (Navier)

$$(\lambda + G) \frac{\partial \epsilon}{\partial x} + G \nabla^2 u + F_x = 0 \quad (7.52)$$

$$(\lambda + G) \frac{\partial \epsilon}{\partial y} + G \nabla^2 v + F_y = 0 \quad (7.53)$$

$$(\lambda + G) \frac{\partial \epsilon}{\partial z} + G \nabla^2 w + F_z = 0 \quad (7.54)$$

όπου

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (7.55)$$

### 7.3 Άσκηση

Δείξτε ότι οι διέπουσες εξισώσεις της ελαστικότητας ανάγονται στη σχέση

$$\nabla^4 V_i + \frac{F_i}{1-\nu} = 0$$

αν

$$2Gu_i = 2(1-\nu)\nabla^2 V_i - V_{j,ij}$$

Η διανυσματική συνάρτηση  $V_i$  ονομάζεται διάνυσμα Galerkin.



## Κεφάλαιο 8

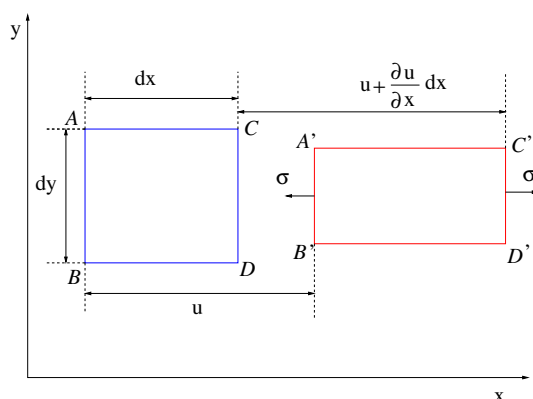
# Ενεργειακές μέθοδοι

Για τη επίλυση ενός προβλήματος της ελαστικότητας απαιτείται η επίλυση διαφορικών εξισώσεων, με δεδομένες συνοριακές συνθήκες. Εξ' αιτίας της δυσκολίας εύρεσης αναλυτικής λύσης για τις εξισώσεις αυτές, συχνά χρησιμοποιούμε προσεγγιστικές μεθόδους για την επίλυσή τους. Μια κατηγορία τέτοιων μεθόδων βασίζεται στο γεγονός ότι οι διέπουσες διαφορικές εξισώσεις της ελαστικότητας, προκύπτουν από την ελαχιστοποίηση μιας συγκεκριμένης ενεργειακής έκφρασης.

### 8.1 Ενέργεια παραμόρφωσης

Όταν ένα σώμα παραμορφώνεται λόγω της δράσης εξωτερικών δυνάμεων πάνω σ' αυτό, παράγεται έργο. Η ενέργεια που αποταμιεύεται στο σώμα, λόγω του έργου των εξωτερικών δυνάμεων, ονομάζεται *ενέργεια παραμόρφωσης*. Αν το σώμα αποτελείται από ελαστικό υλικό και αν αγνοήσουμε το μικρό ποσό της ενέργειας που χάνεται με τη μορφή θερμότητας, όλη η ενέργεια παραμόρφωσης αποβάλλεται στο περιβάλλον όταν παύουν να ενεργούν τα φορτία και το σώμα επανέρχεται στην απαραμόρφωτη κατάσταση. Θα εξετάσουμε πρώτα την ενέργεια παραμόρφωσης λόγω μονοαξονικής εντατικής κατάστασης (Σχήμα 8.1). Έστω ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο  $ABCD$ , διαστάσεων  $dx$ ,  $dy$  και  $dz$ . Εξ αιτίας της τάσης  $\sigma$  που δρα κατά τη διεύθυνση  $x$ , το ορθογώνιο στοιχείο μετακινείται στη θέση  $A'B'C'D'$ . Η τάση αυξάνεται από μια αρχική μηδενική τιμή μέχρι μια τελική τιμή  $\sigma_{xx}$ . Θεωρούμε ότι οι μαζικές δυνάμεις ισούνται με μηδέν και ότι η τάση  $\sigma$  εφαρμόζεται αργά έτσι ώστε τα αδρανειακά φαινόμενα να αγνοούνται. Θεωρούμε ακόμη ότι το σώμα βρίσκεται σε ισορροπία κάθε στιγμή κατά τη διαδικασία της φόρτισης.

Το έργο που παράγεται από την τάση  $\sigma$  μετατρέπεται σε ενέργεια



Σχήμα 8.1: Παραμόρφωση εφελκόμενου στοιχειώδους ορθογώνιου.

παραμόρφωσης που αποταμιεύεται μέσα στο σώμα και είναι ίση με

$$dU = \int_{\sigma=0}^{\sigma=\sigma_{xx}} \sigma d \left( u + \frac{\partial u}{\partial x} dx \right) dy dz - \int_{\sigma=0}^{\sigma=\sigma_{xx}} \sigma du dy dz = \int_{\sigma=0}^{\sigma=\sigma_{xx}} \sigma d \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) dx dy dz \quad (8.1)$$

Οι ποσότητες  $\sigma$ ,  $u$  και  $\frac{\partial u}{\partial x}$  είναι μεταβλητές και η ολοκλήρωση γίνεται ως προς  $\frac{\partial u}{\partial x}$ . Τα  $dx$ ,  $dy$  και  $dz$  είναι σταθερά για αυτή την ολοκλήρωση. Όμως

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \epsilon_{xx} = \frac{\sigma}{E} \quad (8.2)$$

και επομένως

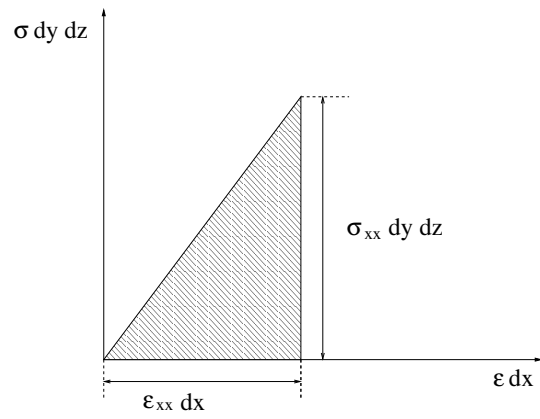
$$dU = \int_{\sigma=0}^{\sigma=\sigma_{xx}} \sigma \frac{d\sigma}{E} dx dy dz = \frac{\sigma_{xx}^2}{2E} dx dy dz \quad (8.3)$$

Η πυκνότητα ενέργειας παραμόρφωσης ανά μονάδα όγκου είναι συνεπώς

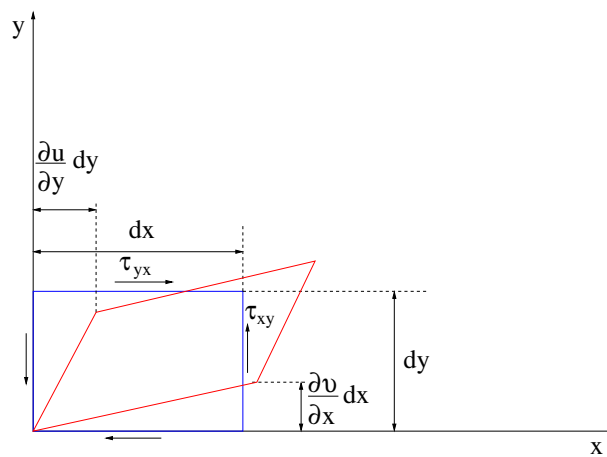
$$U_0 = \frac{\sigma_{xx}^2}{2E} = \frac{1}{2} \sigma_{xx} \epsilon_{xx} = \frac{1}{2} E \epsilon_{xx}^2 \quad (8.4)$$

Η τελική σχετική μετατόπιση των φορτιζόμενων εδρών είναι  $\epsilon_{xx} dx$  και η μέγιστη εφαρμοζόμενη δύναμη είναι  $\sigma_{xx} dy dz$ . Για γραμμικά ελαστικό υλικό η σχέση δύναμης - μετατόπισης είναι γραμμική και το έργο ισούται με τη σκιασμένη επιφάνεια του τριγώνου, όπως φαίνεται στο Σχήμα 8.2.

Στην περίπτωση καθαρής διάτμησης (Σχήμα 8.3), η ενέργεια παραμόρφωσης είναι



Σχήμα 8.2: Ενέργεια παραμόρφωσης σε γραμμικά ελαστικό υλικό



Σχήμα 8.3: Καθαρή διάτμηση.

$$\begin{aligned}
dU &= \frac{1}{2} \left[ (\tau_{xy} dy dz) \left( \frac{\partial v}{\partial x} dx \right) + (\tau_{yx} dx dz) \left( \frac{\partial u}{\partial y} dy \right) \right] = \\
&= \frac{1}{2} \tau_{xy} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy dz \implies \\
U_0 &= \frac{1}{2} \tau_{xy} \gamma_{xy} = \frac{1}{2} \frac{\tau_{xy}^2}{G} = \frac{1}{2} G \gamma_{xy}^2 \quad (8.5)
\end{aligned}$$

Έστω τώρα ότι το ορθογώνιο στοιχείο υποβάλλεται σε καθαρό διαξονικό εφελκυσμό ή θλίψη, με την ταυτόχρονη δράση των τάσεων  $\sigma_{xx}$  και  $\sigma_{yy}$ . Η πυκνότητα ενέργειας παραμόρφωσης τότε θα είναι

$$U_0 = \frac{1}{2} \sigma_{xx} \epsilon_{xx} + \frac{1}{2} \sigma_{yy} \epsilon_{yy} \quad (8.6)$$

Σημειώνουμε ότι η  $\epsilon_{xx}$  είναι η ορθή παραμόρφωση στη διεύθυνση  $x$  εξ αιτίας της ταυτόχρονης δράσης των  $\sigma_{xx}$  και  $\sigma_{yy}$ . Η ενέργεια παραμόρφωσης είναι ανεξάρτητη από τη χρονική σειρά με την οποία εφαρμόζονται τα φορτία. Αν δεν ίσχυε αυτό θα μπορούσαμε να φορτίζαμε με μια σειρά και να αποφορτίζαμε με μια άλλη σειρά, που θα αντιστοιχούσε σε διαφορετικό έργο από αυτό της φόρτισης. Δηλαδή θα παραγόταν έργο στον κύκλο φόρτισης - αποφόρτισης, πράγμα που είναι αντίθετο με την αρχή διατήρησης της ενέργειας.

Σε μια τρισδιάστατη εντατική κατάσταση θα έχουμε

$$\begin{aligned}
U_0 &= \frac{1}{2} (\sigma_{xx} \epsilon_{xx} + \sigma_{yy} \epsilon_{yy} + \sigma_{zz} \epsilon_{zz} + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx}) = \\
&= \frac{1}{2} \sigma_{ij} \epsilon_{ij} \quad (8.7)
\end{aligned}$$

και η συνολική ενέργεια ενός τρισδιάστατου σώματος είναι

$$U = \int \int \int_V U_0 dx dy dz \quad (8.8)$$

Η πυκνότητα ενέργειας παραμόρφωσης, εκφρασμένη σαν συνάρτηση των τάσεων μόνο, γράφεται ως

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \left[ \frac{1}{E} (\sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 + \sigma_{zz}^2) - \frac{2\nu}{E} (\sigma_{xx} \sigma_{yy} + \sigma_{yy} \sigma_{zz} + \sigma_{zz} \sigma_{xx}) + \right. \\
\left. \frac{1}{G} (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) \right] = -\frac{\nu}{2E} \sigma_{kk}^2 + \frac{1}{4G} \sigma_{ij} \sigma_{ij} \quad (8.9)
\end{aligned}$$

ενώ εκφρασμένη μόνο σαν συνάρτηση των παραμορφώσεων γράφεται ως

$$\begin{aligned}
U_0 &= \frac{1}{2} [\lambda \epsilon^2 + 2G (\epsilon_{xx}^2 + \epsilon_{yy}^2 + \epsilon_{zz}^2) + G (\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2)] = \\
&= \frac{\lambda}{2} \epsilon_{kk}^2 + G \epsilon_{ij} \epsilon_{ij} \quad (8.10)
\end{aligned}$$

Εξ αιτίας των σχέσεων (8.9) και (8.10), ισχύουν και οι σχέσεις

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial U_0(\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \dots, \tau_{zx})}{\partial \sigma_{xx}} \quad (8.11)$$

και

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial U_0(\epsilon_{xx}, \epsilon_{yy}, \dots, \gamma_{zx})}{\partial \epsilon_{xx}} \quad (8.12)$$

Παρόμοιες σχέσεις με τις (8.11) και (8.12) ισχύουν και για τις υπόλοιπες τάσεις και έτσι μπορούμε γενικά να γράψουμε ότι

$$\epsilon_{ij} = \frac{\partial U_0}{\partial \sigma_{ij}} \quad (8.13)$$

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial U_0}{\partial \epsilon_{ij}} \quad (8.14)$$

Η πυκνότητα ενέργειας παραμόρφωσης μπορεί να χωριστεί σε δύο τμήματα, ένα που προκαλεί τις αλλαγές στον όγκο και ένα που προκαλεί τις αλλαγές στο σχήμα. Η ιδέα αυτή χρησιμοποιείται για τον προσδιορισμό του κριτηρίου διαρροής των όλκιμων μετάλλων υπό οποιαδήποτε εντατική κατάσταση. Θεωρούμε λοιπόν ότι το τασικό πεδίο είναι άθροισμα δύο εντατικών καταστάσεων. Μιας υδροστατικής εντατικής κατάστασης ( $'$ ), η οποία ορίζεται από τις σχέσεις

$$\sigma'_{xx} = \sigma'_{yy} = \sigma'_{zz} = \sigma_m = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}}{3} \quad (8.15)$$

$$\tau'_{xy} = \tau'_{yz} = \tau'_{zx} = 0 \quad (8.16)$$

και μιας αποκλίνουσας εντατικής κατάστασης ( $''$ ) που αντίστοιχα ορίζεται από τις σχέσεις

$$\sigma''_{xx} = \sigma_{xx} - \sigma_m \quad (8.17)$$

$$\sigma''_{yy} = \sigma_{yy} - \sigma_m \quad (8.18)$$

$$\sigma''_{zz} = \sigma_{zz} - \sigma_m \quad (8.19)$$

$$\tau''_{xy} = \tau_{xy} \quad (8.20)$$

$$\tau''_{yz} = \tau_{yz} \quad (8.21)$$

$$\tau''_{zx} = \tau_{zx} \quad (8.22)$$

Η υδροστατική εντατική κατάσταση ( $'$ ) προκαλεί τη συνολική αλλαγή στον όγκο, ενώ η αποκλίνουσα εντατική κατάσταση ( $''$ ) προκαλεί την αλλαγή στο σχήμα και ισοδυναμεί με τρισδιάστατη καθαρή διάτμηση. Η ενέργεια ανά μονάδα όγκου, εξ αιτίας της υδροστατικής εντατικής κατάστασης είναι

$$U'_0 = \frac{1}{2} \sigma_m \epsilon = \frac{1}{2} \frac{\sigma_m^2}{K} = \frac{1}{18K} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})^2 \quad (8.23)$$

όπου  $K$  είναι το μέτρο διόγκωσης του υλικού (δες τη σχέση (3.37)). Η ενέργεια εξ αιτίας της αλλαγής σχήματος, που οφείλεται στα αποκλί- νοντα εντατικά στοιχεία των σχέσεων (8.17) - (8.22) είναι

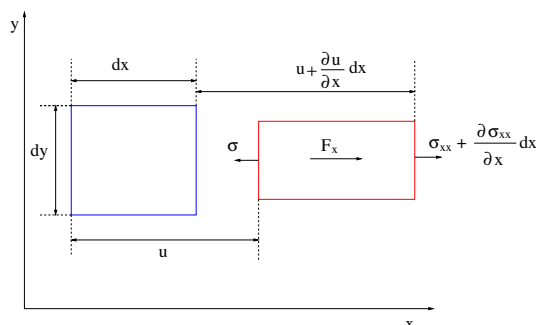
$$U_0'' = \frac{3}{4} \frac{\tau_{oct}^2}{G} \quad (8.24)$$

όπου  $\tau_{oct}$  είναι η λεγόμενη οκταεδρική διατμητική τάση

$$\tau_{oct} = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)} \quad (8.25)$$

## 8.2 Μεταβαλλόμενη εντατική κατάσταση και μα- ζικές δυνάμεις

Θα εξετάσουμε στη συνέχεια την ενέργεια παραμόρφωσης,  $\sigma'$  ένα σώμα όπου οι τάσεις δεν είναι ομοιόμορφα κατανομημένες, όπως ήταν στο Ενότητα 8.1. Στην περίπτωση χωρικά μεταβαλλόμενων τάσεων, υπάρχουν και μαζικές δυνάμεις με συνιστώσες  $F_x$ ,  $F_y$  και  $F_z$ . Έστω κα- τάσταση μονοαξονικού εφελκυσμού, με χωρικά μεταβαλλόμενη ορθή τάση κατά  $x$  και με παρουσία μαζικής δύναμης  $F_x$  (Σχήμα 8.4). Το έργο



Σχήμα 8.4: Χωρικά μεταβαλλόμενες τάσεις σε εφελκυσμένο στοιχειώ- δες ορθογώνιο.

εξ αιτίας της τάσης  $\sigma_{xx}$  στην που ασκείται στην αριστερή έδρα είναι ίσο με

$$-\frac{1}{2} \sigma_{xx} u dy dz \quad (8.26)$$

ενώ το έργο εξ αιτίας της τάσης  $\sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx$  που ασκείται στη δεξιά έδρα του ορθογωνίου είναι

$$\frac{1}{2} \left( \sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx \right) \left( u + \frac{\partial u}{\partial x} dx \right) dy dz \quad (8.27)$$



Το συνολικό έργο που παράγεται, εξ αιτίας των τάσεων που ασκούνται στις δύο έδρες τις κάθετες στον άξονα των  $x$ , προκύπτει από το αλγεβρικό άθροισμα των (8.26) και (8.27) και είναι ίσο με

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left( \sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx \right) \left( u + \frac{\partial u}{\partial x} dx \right) dydz - \\ \frac{1}{2} \sigma_{xx} u dydz = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (\sigma_{xx} u) dx dydz \end{aligned} \quad (8.28)$$

αγνοώντας τον όρο με το γινόμενο των τεσσάρων διαφορικών. Αν στις δύο έδρες τις κάθετες στον άξονα των  $x$  ασκούνται και οι διατμητικές τάσεις  $\tau_{xy}$  και  $\tau_{xz}$ , τότε το έργο των τάσεων αυτών στις δύο έδρες, είναι

$$\frac{1}{2} \frac{\partial (\tau_{xy} v)}{\partial x} dx dydz + \frac{1}{2} \frac{\partial (\tau_{xz} w)}{\partial x} dx dydz \quad (8.29)$$

Παραπέρα, αν έχουμε μια γενική τρισδιάστατη εντατική κατάσταση, όπου ασκούνται όλες οι ορθές και διατμητικές τάσεις σ' όλες τις έδρες του στοιχείου, η συνολική ενέργεια ανά μονάδα όγκου στο στοιχείο, προκύπτει ότι είναι

$$\begin{aligned} U_0 = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial}{\partial x} (\sigma_{xx} u + \tau_{xy} v + \tau_{xz} w) + \frac{\partial}{\partial y} (\sigma_{yy} v + \tau_{yx} u + \tau_{yz} w) + \right. \\ \left. \frac{\partial}{\partial z} (\sigma_{zz} w + \tau_{zx} u + \tau_{zy} v) + F_x u + F_y v + F_z w \right] = \\ \frac{1}{2} \left[ \left( \sigma_{xx} \frac{\partial u}{\partial x} + \sigma_{yy} \frac{\partial v}{\partial y} + \sigma_{zz} \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \tau_{xy} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \right. \\ \left. \tau_{yz} \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \tau_{zx} \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \right. \\ \left. u \left( \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + F_x \right) + \right. \\ \left. v \left( \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + F_y \right) + \right. \\ \left. w \left( \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + F_z \right) \right] \quad (8.30) \end{aligned}$$

Εξ αιτίας των εξισώσεων ισορροπίας, οι ποσότητες στις τρεις τελευταίες παρενθέσεις στη σχέση (8.30) μηδενίζονται. Έτσι, η (8.30) τελικά γίνεται

$$U_0 = \frac{1}{2} (\sigma_{xx} \epsilon_{xx} + \sigma_{yy} \epsilon_{yy} + \sigma_{zz} \epsilon_{zz} + \sigma_{xy} \gamma_{xy} + \sigma_{yz} \gamma_{yz} + \sigma_{zx} \gamma_{zx}) = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \epsilon_{ij} \quad (8.31)$$

που είναι ίδια με την (8.7).

### 8.3 Η Αρχή Δυνατών Έργων

Έστω अपαραμόρφωτο υλικό σωματίδιο που βρίσκεται σε ισορροπία, με συνέπεια η συνισταμένη όλων των δυνάμεων που ασκούνται στο σωματίδιο, να είναι ίση με μηδέν. Αν θέλουμε να μετακινήσουμε το σωματίδιο σε μια νέα θέση, πρέπει να ασκήσουμε επί πλέον δυνάμεις, δηλαδή το αρχικό σύστημα δυνάμεων πρέπει ν' αλλάξει.

Ως *δυνατή μετατόπιση* ορίζουμε μια αυθαίρετη μετατόπιση που δεν επηρεάζει (αλλάζει) το σύστημα δυνάμεων που ασκούνται στο σωματίδιο. Η δυνατή μετατόπιση είναι μια φανταστική μετατόπιση, κατά την οποία οι δυνάμεις που ασκούνται στο σωματίδιο δε μεταβάλλονται. Μερικές φορές θεωρούμε μια μικρή πραγματική μετατόπιση ως δυνατή μετατόπιση, διότι οι αλλαγές που προκαλούνται στο σύστημα δυνάμεων είναι αμελητέες σε σχέση με τις δυνάμεις αυτές καθ' αυτές. Βέβαια, σύμφωνα με τον ορισμό που δώσαμε, η δυνατή μετατόπιση δεν είναι ανάγκη να είναι απείρως μικρή.

Το έργο που παράγεται από τις δυνάμεις που ασκούνται στο σωματίδιο, κατά τη διάρκεια μιας δυνατής μετατόπισης, λέγεται *δυνατό έργο*. Το δυνατό έργο είναι μηδενικό αν το σωματίδιο ισορροπεί, διότι η συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται σ' αυτό είναι ίση με μηδέν. Ισχύει και το αντίστροφο, δηλαδή αν το δυνατό έργο είναι ίσο με το μηδέν τότε και οι δυνάμεις που ασκούνται στο σωματίδιο έχουν συνισταμένη ίση με το μηδέν.

Για ένα παραμορφώσιμο ελαστικό σώμα, εισάγουμε τις δυνατές μετατοπίσεις

$$\delta u = \delta u(x, y, z) \quad (8.32)$$

$$\delta v = \delta v(x, y, z) \quad (8.33)$$

$$\delta w = \delta w(x, y, z) \quad (8.34)$$

και το πεδίο των δυνατών παραμορφώσεων

$$\delta \epsilon_{xx} = \delta \epsilon_{xx}(x, y, z) \quad (8.35)$$

$$\delta \epsilon_{yy} = \delta \epsilon_{yy}(x, y, z) \quad (8.36)$$

$$\delta \epsilon_{zz} = \delta \epsilon_{zz}(x, y, z) \quad (8.37)$$

$$\delta \gamma_{xy} = \delta \gamma_{xy}(x, y, z) \quad (8.38)$$

$$\delta \gamma_{yz} = \delta \gamma_{yz}(x, y, z) \quad (8.39)$$

$$\delta \gamma_{zx} = \delta \gamma_{zx}(x, y, z) \quad (8.40)$$

Οι δυνατές παραμορφώσεις και μετατοπίσεις πραγματοποιούνται αφού το σώμα έχει ισορροπήσει. Οι δυνατές μετατοπίσεις υπόκεινται στους παρακάτω περιορισμούς:

1. Οι δυνατές μετατοπίσεις  $\delta u$ ,  $\delta v$  και  $\delta w$  είναι μονότιμες και συνεχείς συναρτήσεις. Η τάξη μεγέθους τους είναι μέσα στα όρια της γραμμικής ελαστικότητας.
2. Κατά τη διάρκεια πραγματοποίησης μιας δυνατής μετατόπισης, όλες οι εξωτερικές δυνάμεις (επιφανειακές και μαζικές) καθώς και οι εσωτερικές τάσεις παραμένουν σταθερές σε μέγεθος και διεύθυνση
3. Σε σημεία του συνόρου του σώματος όπου οι μετατοπίσεις είναι δεδομένες, οι δυνατές μετατοπίσεις πρέπει να μηδενίζονται.

Οι δυνατές παραμορφώσεις ορίζονται ως

$$\delta \epsilon_{xx} = \delta \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (\delta u) \quad \text{κ. λ. π} \quad (8.41)$$

$$\delta \gamma_{xy} = \delta \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \delta u + \frac{\partial}{\partial x} \delta v \quad (8.42)$$

Πέρα από τους τρεις περιορισμούς που αναφέραμε παραπάνω, οι δυνατές μετατοπίσεις είναι εντελώς αυθαίρετες. Δεν είναι βέβαια αναγκαίο να είναι φυσικά πραγματοποιήσιμες διότι όπως αναφέραμε παραπάνω είναι φανταστικές.

Έστω  $\delta W$  το δυνατό έργο που παράγεται από τις εξωτερικές (επιφανειακές και μαζικές) δυνάμεις και  $\delta U$  η δυνατή ενέργεια παραμόρφωσης που αποταμιεύεται στο σώμα κατά τη διάρκεια μιας δυνατής μετατόπισης. Έστω  $u$ ,  $v$  και  $w$  οι μετατοπίσεις που προκαλεί στο σώμα, ένα σύστημα δυνάμεων. Μετά, έστω ότι εφαρμόζεται το πεδίο των δυνατών μετατοπίσεων  $\delta u$ ,  $\delta v$  και  $\delta w$ . Η ενέργεια που παράγεται από την τάση  $\sigma_{xx}$  κατά τη διάρκεια των δυνατών μετατοπίσεων, στο στοιχείο του Σχήματος 8.1, είναι

$$\sigma_{xx} \left( \delta u + \frac{\partial \delta u}{\partial x} dx \right) dydz - \sigma_{xx} (\delta u) dydz \quad (8.43)$$

και το δυνατό έργο ανά μονάδα όγκου  $\delta U_0$  είναι

$$\delta U_0 = \sigma_{xx} \frac{\partial \delta u}{\partial x} = \sigma_{xx} \delta \epsilon_{xx} = E \epsilon_{xx} \delta \epsilon_{xx} \quad (8.44)$$

Επειδή όμως

$$U_0 = \frac{1}{2} E \epsilon_{xx}^2 \quad (8.45)$$

και εξ αιτίας της (8.44), παρατηρούμε ότι το σύμβολο  $\delta$  μπορεί να θεωρηθεί ως τελεστής όμοιος με το διαφορικό τελεστή  $d$  διότι μπορούμε να γράψουμε

$$\delta U_0 = \frac{dU_0}{d\epsilon_{xx}} \delta \epsilon_{xx} \quad (8.46)$$

Η συνάρτηση  $\delta U_0$  ονομάζεται *1<sup>η</sup> μεταβολή* της ενέργειας  $U_0$  ή απλά *μεταβολή* της  $U_0$ .

Έστω τώρα μια πραγματική μεταβολή  $\Delta \epsilon_{xx}$  της παραμόρφωσης και έστω  $\Delta U_0$  η αντίστοιχη αύξηση της πυκνότητας ενέργειας παραμόρφωσης. Από το ανάπτυγμα Taylor της πυκνότητας ενέργειας παραμόρφωσης  $U_0$  έχουμε

$$U_0(\epsilon_{xx} + \Delta \epsilon_{xx}) = U_0(\epsilon_{xx}) + \frac{dU_0}{d\epsilon_{xx}} \Delta \epsilon_{xx} + \frac{1}{2} \frac{d^2 U_0}{d\epsilon_{xx}^2} (\Delta \epsilon_{xx})^2 + \dots \quad (8.47)$$

ή

$$\Delta U_0 = U_0(\epsilon_{xx} + \Delta \epsilon_{xx}) - U_0(\epsilon_{xx}) = \frac{dU}{d\epsilon_{xx}} \Delta \epsilon_{xx} + \frac{1}{2} \frac{d^2 U_0}{d\epsilon_{xx}^2} (\Delta \epsilon_{xx})^2 \quad (8.48)$$

Στην (8.47) οι παράγωγοι τάξης  $> 2$  μηδενίζονται, διότι η  $U_0$  περιέχει όρους με τα στοιχεία της παραμόρφωσης υψωμένα στο τετράγωνο. Αν  $\Delta \epsilon_{xx} \rightarrow 0$ , ο δεύτερος όρος στο δεύτερο μέλος της (8.48) θεωρείται αμελητέος και η (8.48) γίνεται ίδια με την (8.46). Να σημειώσουμε εδώ ότι για να φθάσουμε στην (8.46) δεν υποθέσαμε ότι η  $\delta \epsilon_{xx}$  είναι απειροστή ποσότητα και δεν αγνοήσαμε όρους δεύτερης τάξης. Το γεγονός ότι όροι δεύτερης τάξης δεν παρουσιάζονται στην (8.46), οφείλεται στο ότι η  $\delta \epsilon_{xx}$  είναι μια δυνατή παραμόρφωση. Συνεπώς κατά τη διάρκεια της εφαρμογής της, η τάση παραμένει σταθερή και ίση με  $E \epsilon_{xx}$ , όπως φαίνεται και στην (8.44).

Λαμβάνοντας υπ' όψη την (8.44) μπορούμε να δείξουμε ότι η δυνατή πυκνότητα ενέργειας παραμόρφωσης είναι

$$\delta U_0 = \sigma_{xx} \delta \epsilon_{xx} + \sigma_{yy} \delta \epsilon_{yy} + \sigma_{zz} \delta \epsilon_{zz} + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \tau_{zx} \delta \gamma_{zx} \quad (8.49)$$

Η (8.49) είναι όμοια με την (8.7), εκτός από τον παράγοντα  $\frac{1}{2}$  που δεν υπάρχει στην (8.49) διότι οι τάσεις παραμένουν σταθερές κατά τη διάρκεια επιβολής της δυνατής μετατόπισης. Η συνολική δυνατή ενέργεια παραμόρφωσης είναι επομένως

$$\delta U = \int \int \int_V \delta U_0 dx dy dz \quad (8.50)$$

Ας δούμε τώρα το δυνατό έργο των εξωτερικών δυνάμεων. Οι επιφανειακές δυνάμεις παράγουν έργο ίσο με

$$\int_A (T_x^\mu \delta u + T_y^\mu \delta v + T_z^\mu \delta w) dA \quad (8.51)$$

ενώ οι μαζικές δυνάμεις παράγουν έργο ίσο με

$$\int_V (F_x \delta u + F_y \delta v + F_z \delta w) dV \quad (8.52)$$

όπου  $A$  είναι η εξωτερική συνοριακή επιφάνεια του σώματος και  $V$  είναι ο όγκος του σώματος. Το συνολικό δυνατό έργο των εξωτερικών δυνάμεων είναι επομένως

$$\delta W = \int_A (T_x^\mu \delta u + T_y^\mu \delta v + T_z^\mu \delta w) dA + \int_V (F_x \delta u + F_y \delta v + F_z \delta w) dV \quad (8.53)$$

Στη συνέχεια θα βρεθεί η διέπουσα εξίσωση στη μέθοδο των δυνατών έργων. Εξ αιτίας της (8.49), η (8.50) δίνει

$$\delta U = \int_V (\sigma_{xx} \delta \epsilon_{xx} + \sigma_{yy} \delta \epsilon_{yy} + \sigma_{zz} \delta \epsilon_{zz} + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \tau_{zx} \delta \gamma_{zx}) dV \quad (8.54)$$

Η (8.54), εξ αιτίας των (8.41) - (8.42), δίνει

$$\begin{aligned} \delta U = \int_V \left\{ \sigma_{xx} \frac{\partial}{\partial x} (\delta u) + \sigma_{yy} \frac{\partial}{\partial y} (\delta v) + \sigma_{zz} \frac{\partial}{\partial z} (\delta w) + \right. \\ \left. \tau_{xy} \left[ \frac{\partial}{\partial y} (\delta u) + \frac{\partial}{\partial x} (\delta v) \right] + \tau_{yz} \left[ \frac{\partial}{\partial z} (\delta v) + \frac{\partial}{\partial y} (\delta w) \right] + \right. \\ \left. \tau_{zx} \left[ \frac{\partial}{\partial z} (\delta u) + \frac{\partial}{\partial x} (\delta w) \right] \right\} dV \quad (8.55) \end{aligned}$$

Το ολοκλήρωμα του πρώτου όρου στην (8.55) είναι

$$I = \int_V \sigma_{xx} \frac{\partial}{\partial x} (\delta u) dV = \int \int \int \sigma_{xx} \frac{\partial}{\partial x} (\delta u) dx dy dz \quad (8.56)$$

και με ολοκλήρωση κατά παράγοντες ως προς  $x$  παίρνουμε

$$I = \int_A \int [\sigma_{xx} \delta u]_{x_1(y,z)}^{x_2(y,z)} dy dz - \int_V \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} \delta u dV \quad (8.57)$$

όπου  $x_1(y, z)$  και  $x_2(y, z)$  είναι οι εξισώσεις της αριστερά και δεξιά επιφάνειας της  $A$  που περικλείουν τον όγκο  $V$ . Αλλά στην επιφάνεια  $x_2(y, z)$  έχουμε

$$dy dz = dA \mu_x \quad (8.58)$$

ενώ στην επιφάνεια  $x_1(y, z)$  έχουμε

$$dy dz = -dA \mu_x \quad (8.59)$$

εξ αιτίας των (1.50) - (1.52). Έτσι η (8.57), εξ αιτίας των (8.58) και (8.59) δίνει

$$I = \int_A \sigma_{xx} \delta u \mu_x dA - \int_V \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} \delta u dV \quad (8.60)$$

Υπολογίζοντας με παρόμοιο τρόπο και τα ολοκληρώματα των υπόλοιπων όρων της (8.55), βρίσκουμε τελικά ότι

$$\begin{aligned} \delta U = & \int_A [(\sigma_{xx}\mu_x + \tau_{xy}\mu_y + \tau_{zx}\mu_z)\delta u + (\sigma_{yy}\mu_y + \tau_{xy}\mu_x + \tau_{yz}\mu_z)\delta v + \\ & (\sigma_{zz}\mu_z + \tau_{yz}\mu_y + \tau_{zx}\mu_x)\delta w] dA - \\ & \int_V \left[ \left( \frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z} \right) \delta u + \left( \frac{\partial\sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yz}}{\partial z} \right) \delta v + \right. \\ & \left. \left( \frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{zx}}{\partial x} \right) \delta w \right] dV = \\ & \int_A \sigma_{ij}\mu_j \delta u_i dA - \int_V \frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j} \delta u_i dV = \int_A T_i^\mu \delta u_i dA + \int_V F_i \delta u_i dV \end{aligned} \quad (8.61)$$

Το δεύτερο μέλος της (8.61) είναι ίσο με το δεύτερο μέλος της (8.53) και συνεπώς το δυνατό έργο των εξωτερικών δυνάμεων ισούται με τη δυνατή ενέργεια παραμόρφωσης, δηλαδή

$$\delta W = \delta U \quad (8.62)$$

αν οι συνιστώσες της μετατόπισης ικανοποιούν τις εξισώσεις ισορροπίας. Η σχέση (8.62) αποτελεί και τη διέπουσα εξίσωση της Αρχής Δυνατών Έργων.

## 8.4 Το Θεώρημα Ελαχίστου της Δυναμικής Ενέργειας

Επειδή οι εξωτερικές δυνάμεις παραμένουν σταθερές κατά την πραγματοποίηση των δυνατών μετατοπίσεων και επειδή τα όρια ολοκλήρωσης παραμένουν σταθερά στις (8.53) και (8.61), ο τελεστής  $\delta$  μπορεί να βγει έξω από τα ολοκληρώματα στις εξισώσεις αυτές. Έτσι εξ αιτίας της (8.62), γράφουμε τη σχέση

$$\delta U - \delta W = \delta(U - W) = 0 \quad (8.63)$$

Ορίζουμε τώρα τη συνάρτηση

$$\Pi = U - W \quad (8.64)$$

η οποία ονομάζεται *δυναμική ενέργεια του σώματος*, όπου

$$W = \int_A T_i^\mu u_i dA + \int_V F_i u_i dV \quad (8.65)$$

Έτσι, από τις (8.63) και (8.64) βρίσκουμε ότι

$$\delta \Pi = 0 \quad (8.66)$$

Παρατηρούμε ότι το έργο των εξωτερικών δυνάμεων δεν είναι ίσο με  $W$  αλλά ίσο με  $\frac{1}{2}W$ . Έτσι

$$\Pi = U - W = \frac{1}{2}W - W = -\frac{1}{2}W \quad (8.67)$$

επειδή εξ αιτίας της αρχής διατήρησης της ενέργειας

$$\frac{1}{2}W = U \quad (8.68)$$

Η (8.66) δείχνει ότι η δυναμική ενέργεια παίρνει μια ακρότατη τιμή στην κατάσταση ισορροπίας. Έτσι το Θεώρημα του Ελαχίστου Δυναμικής Ενέργειας διατυπώνεται ως εξής: «Απ' όλες τις κατανομές μετατοπίσεων που ικανοποιούν τις συνθήκες συνέχειας και τις συνοριακές συνθήκες, η πραγματική κατανομή των μετατοπίσεων, δηλαδή αυτή που ικανοποιεί και τις εξισώσεις ισορροπίας, είναι αυτή που δίνει στη δυναμική ενέργεια μια ακρότατη τιμή». Αποδεικνύεται ότι η ακρότατη αυτή τιμή είναι ένα ελάχιστο, αν το σώμα βρίσκεται σε ευσταθή ισορροπία. Για την εφαρμογή της αρχής της δυναμικής ενέργειας, πρέπει η ενέργεια παραμόρφωσης  $U$  να γραφεί σαν συνάρτηση των παραμορφώσεων μόνο και να μην περιέχει συνιστώσες των τάσεων.

Από τις (8.12) και (8.49) έχουμε

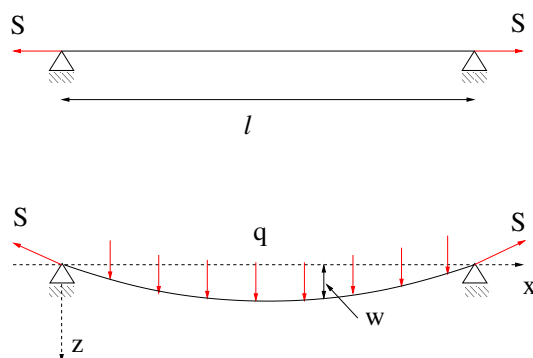
$$\delta U_0 = \frac{\partial U_0}{\partial \epsilon_{xx}} \delta \epsilon_{xx} + \frac{\partial U_0}{\partial \epsilon_{yy}} \delta \epsilon_{yy} + \dots + \frac{\partial U_0}{\partial \gamma_{xz}} \delta \gamma_{xz} \quad (8.69)$$

Σε αρκετές περιπτώσεις μπορούμε να γράψουμε τις παραμορφώσεις σαν συνάρτηση μιας παραμέτρου π. χ. του βέλους κάμψης  $w$  μιας δοκού. Τότε

$$\delta U_0 = \left[ \frac{\partial U_0}{\partial \epsilon_{xx}} \frac{d\epsilon_{xx}}{dw} + \frac{\partial U_0}{\partial \epsilon_{yy}} \frac{d\epsilon_{yy}}{dw} + \dots + \frac{\partial U_0}{\partial \gamma_{xz}} \frac{d\gamma_{xz}}{dw} \right] \delta w \implies \delta U_0 = \frac{dU_0}{dw} \delta w \quad (8.70)$$

### 8.4.1 Παράδειγμα

Χορδή εφελκείται αρχικά με δύναμη  $S$  μεγάλου μεγέθους (Σχήμα 8.5). Μετά η χορδή δέχεται εγκάρσιο κατανεμημένο φορτίο  $q$ . Υποθέτουμε ότι η εφαρμογή του  $q$  δε μεταβάλλει την  $S$ . Θεωρούμε ότι η χορδή δεν προβάλλει αντίσταση στην κάμψη και επομένως η εσωτερική αξονική δύναμη παραμένει ίση με  $S$ . Το βέλος κάμψης  $w$  παραμένει μικρό. Να βρεθεί η εξίσωση ισορροπίας της χορδής χρησιμοποιώντας το Θεώρημα του Ελαχίστου Δυναμικής Ενέργειας.



Σχήμα 8.5: Εφελκυσμένη χορδή με εγκάρσιο καταναμημένο φορτίο.

Για τη δυναμική ενέργεια  $\Pi$  έχουμε

$$\Pi = U - W \quad (8.71)$$

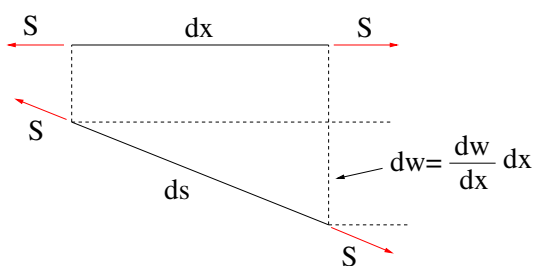
όπου  $U$  είναι η ενέργεια παραμόρφωσης και  $W$  είναι το διπλάσιο του έργου των εξωτερικών δυνάμεων. Εδώ μοναδική εξωτερική δύναμη είναι το καταναμημένο φορτίο  $q$ , ενώ η εφελκυστική δύναμη  $S$  θεωρείται ως εσωτερική δύναμη και προϋπάρχει της  $q$  μιας και αναπτύχθηκε στην κατάσταση αναφοράς. Επειδή δεν υπάρχουν μαζικές δυνάμεις στο πρόβλημα, το διπλάσιο έργο των εξωτερικών δυνάμεων είναι ίσο με

$$W = \int_A T_i^\mu u_i dA = \int_0^l q w dx \quad (8.72)$$

Η εσωτερική ενέργεια παραμόρφωσης  $dU$  που παράγεται από την  $S$  στο τμήμα μήκους  $dx$  της χορδής (Σχήμα 8.6) είναι

$$dU = S(ds - dx) \quad (8.73)$$

Αλλά σύμφωνα με το Σχήμα 8.6, έχουμε ότι



Σχήμα 8.6: Επιμήκυνση στοιχειώδους τμήματος χορδής.

$$ds = \sqrt{dx^2 + dw^2} = dx \sqrt{1 + \left(\frac{dw}{dx}\right)^2} \simeq dx \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dx}\right)^2\right] \quad (8.74)$$



και έτσι η ενέργεια παραμόρφωσης  $U$  σ' ολόκληρη τη χορδή, εξ αιτίας της (8.73), δίνεται από τη σχέση

$$U = \int_0^l S(ds - dx) \stackrel{(8.74)}{=} \frac{S}{2} \int_0^l \left(\frac{dw}{dx}\right)^2 dx \quad (8.75)$$

Από τις (8.72) και (8.75), η δυναμική ενέργεια γίνεται

$$\Pi = U - W = \frac{S}{2} \int_0^l \left(\frac{dw}{dx}\right)^2 dx - \int_0^l qwdx \quad (8.76)$$

Παίρνοντας την πρώτη μεταβολή της δυναμικής ενέργειας, από την (8.76) έχουμε

$$\delta\Pi = S \int_0^l \frac{dw}{dx} \delta\left(\frac{dw}{dx}\right) dx - q \int_0^l \delta w dx \quad (8.77)$$

Όμως το πρώτο ολοκλήρωμα στο δεξί μέλος της (8.77) γράφεται ως

$$S \int_0^l \frac{dw}{dx} \frac{d(\delta w)}{dx} dx = S \frac{dw}{dx} \delta w \Big|_0^l - S \int_0^l \delta w \frac{d^2 w}{dx^2} dx = -S \int_0^l \delta w \frac{d^2 w}{dx^2} dx \quad (8.78)$$

Η (8.77) εξ αιτίας της (8.78) γράφεται

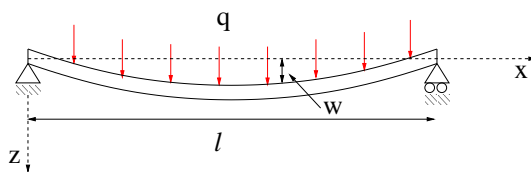
$$\begin{aligned} \delta\Pi = -S \int_0^l \delta w \frac{d^2 w}{dx^2} dx - q \int_0^l \delta w dx = 0 \implies \\ \int_0^l \left( S \frac{d^2 w}{dx^2} + q \right) \delta w dx = 0 \end{aligned} \quad (8.79)$$

Επειδή το  $\delta w$  είναι αυθαίρετο πρέπει να ισχύει ότι

$$S \frac{d^2 w}{dx^2} + q = 0 \quad (8.80)$$

που είναι η εξίσωση ισορροπίας της χορδής σαν συνάρτηση της μετατόπισης  $w$ .

Για τη λύση του παραπάνω προβλήματος μπορούμε να αρχίσουμε είτε από την (8.80) είτε από τη σχέση  $\delta\Pi = 0$ . Εδώ η διαφορική εξίσωση ισορροπίας είναι απλή και προκύπτει εύκολα από την ισορροπία και από τη γεωμετρία. Παραπέρα, είναι συνήθης διαφορική εξίσωση και μπορεί να ολοκληρωθεί εύκολα. Για πιο πολύπλοκα προβλήματα είναι προτιμότερο να βρούμε πρώτα την έκφραση της δυναμικής ενέργειας  $\Pi$  και μετά ν' αναζητήσουμε τις εξισώσεις ισορροπίας μέσα από τη σχέση  $\delta\Pi = 0$ . Αν είναι δύσκολο να βρεθεί λύση των εξισώσεων ισορροπίας, μπορεί να αναζητηθεί μια προσεγγιστική λύση που ικανοποιεί την εξίσωση  $\delta\Pi = 0$ .



Σχήμα 8.7: Αμφιέρειστη δοκός με ομοιόμορφο φορτίο.

### 8.4.2 Παράδειγμα

Να βρεθεί η διαφορική εξίσωση ισορροπίας αμφιέρειστης δοκού, που φορτίζεται με ομοιόμορφο φορτίο  $q$  (Σχήμα 8.7).

Από την Αντοχή των Υλικών, η ροπή κάμψης  $M$  δίνεται από τη σχέση

$$M = \frac{EI}{R} \simeq EI \frac{d^2 w}{dx^2} \quad (8.81)$$

όπου  $R$  είναι η ακτίνα καμπυλότητας της δοκού και  $I$  είναι η ροπή αδράνειας της διατομής της δοκού. Επειδή

$$\sigma_{xx} = \frac{M}{I} z \quad (8.82)$$

η πυκνότητα ενέργειας παραμόρφωσης της δοκού είναι

$$U_0 = \frac{\sigma_{xx}^2}{2E} = \frac{M^2 z^2}{2EI^2} \stackrel{(8.81)}{=} \frac{E}{2} \left( \frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 z^2 \quad (8.83)$$

και η ενέργεια παραμόρφωσης είναι

$$U = \int \int_V \int \frac{E}{2} \left( \frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 z^2 dx dy dz = \int_0^l \frac{EI}{2} \left( \frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 dx \quad (8.84)$$

διότι

$$I = \int \int_A z^2 dy dz \quad (8.85)$$

Επίσης ισχύει ότι

$$W = \int_0^l q w dx \quad (8.86)$$

Από τις (8.84) και (8.86) βρίσκουμε τη δυναμική ενέργεια ως

$$\Pi = U - W = \int_0^l \left[ \frac{EI}{2} \left( \frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 - q w \right] dx \quad (8.87)$$

Οι συνοριακές συνθήκες του προβλήματος είναι

$$w = \frac{d^2 w}{dx^2} = 0 \quad \text{για} \quad x = 0 \quad \text{και} \quad x = l \quad (8.88)$$

Η πρώτη μεταβολή της  $\Pi$ , ή η αλλαγή της  $\Pi$  εξ αιτίας μιας δυνατής μετατόπισης, είναι

$$\delta\Pi = \frac{EI}{2} \int_0^l 2 \frac{d^2w}{dx^2} \frac{d^2\delta w}{dx^2} dx - \int_0^l q\delta w dx \quad (8.89)$$

Μετά από ολοκλήρωσή κατά παράγοντες δύο φορές, της (8.89) και εξ αιτίας των (8.88) παίρνουμε τελικά

$$\delta\Pi = \int_0^l EI \frac{d^4w}{dx^4} \delta w dx - \int_0^l q\delta w dx \quad (8.90)$$

Από την (8.90) παίρνουμε

$$\delta\Pi = 0 \implies \int_0^l \left[ EI \frac{d^4w}{dx^4} - q \right] \delta w dx = 0 \implies EI \frac{d^4w}{dx^4} - q = 0 \quad (8.91)$$

διότι το  $\delta w$  είναι αυθαίρετο.

Η (8.91), που είναι η διαφορική εξίσωση ισορροπίας της δοκού με ομοιόμορφο εγκάρσιο φορτίο  $q$ , μπορεί να προκύψει και χρησιμοποιώντας τη θεωρία Euler - Bernoulli και εξετάζοντας την ισορροπία ενός στοιχειώδους τμήματος της δοκού. Το παράδειγμα αυτό δείχνει ότι η σχέση  $\delta\Pi = 0$ , οδηγεί απευθείας στις διέπουσες εξισώσεις ισορροπίας, γραμμένες με χρήση των μετατοπίσεων.

## 8.5 Η μέθοδος Rayleigh - Ritz

Η μέθοδος Rayleigh - Ritz, είναι προσεγγιστική μέθοδος επίλυσης συνοριακών προβλημάτων, που βασίζεται στην αρχή του ελαχίστου της δυναμικής ενέργειας. Για ένα μονοδιάστατο πρόβλημα όπως αυτό της χορδής ή της δοκού που εξετάσαμε προηγουμένως, η δυναμική ενέργεια έχει τη μορφή

$$\Pi = \int_{x_0}^{x_1} f(x, w, w', w'' \dots) dx \quad (8.92)$$

όπου

$$w' = \frac{dw}{dx}, \quad w'' = \frac{d^2w}{dx^2} \quad \text{κ. λ. π} \quad (8.93)$$

Μπορούμε να βρούμε μια συνάρτηση  $w(x)$ , τέτοια ώστε να ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες του προβλήματος και να ελαχιστοποιεί την  $\Pi$ . Τότε η  $w(x)$  θα ικανοποιεί και τις εξισώσεις ισορροπίας και θα είναι η λύση του προβλήματος.

Επειδή κάθε συνεχής συνάρτηση μπορεί να γραφεί υπό μορφή σειράς (δυναμοσειράς, σειράς Fourier κ. λ. π), θεωρούμε ότι

$$w = a_0 w_0 + a_1 w_1 + a_2 w_2 + \dots = \sum_{i=0}^n a_i w_i \quad (8.94)$$

όπου οι  $w_0, w_1, \dots$  είναι συναρτήσεις του  $x$  που κάθε μια απ' αυτές ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες και  $a_0, a_1, a_2, \dots$  είναι παράμετροι που θα προσδιοριστούν. Θέτοντας την (8.94) στην (8.92) παίρνουμε

$$\Pi = \Pi(a_0, a_1, a_2, \dots) \quad (8.95)$$

Η συνθήκη ελαχιστοποίησης γράφεται επομένως ως

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_0} = 0, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial a_1} = 0, \dots \quad (8.96)$$

Οι (8.96) αποτελούν ένα σύστημα αλγεβρικών εξισώσεων, με αγνώστους τις παραμέτρους  $a_0, a_1, a_2, \dots$ . Για μια προσεγγιστική λύση μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε μόνο μερικούς όρους της σειράς, ενώ για την ακριβή λύση πρέπει γενικά να χρησιμοποιήσουμε όλους τους όρους της σειράς.

### 8.5.1 Παράδειγμα

Να βρεθεί το βέλος κάμψης  $w(x)$  της αμφιέριστης δοκού του Σχήματος (8.7), που δέχεται ομοιόμορφο κατακόρυφο φορτίο  $q$ . Ως λύση να χρησιμοποιηθεί η σειρά

$$w(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (8.97)$$

όπου τα  $a_n$  είναι άγνωστοι συντελεστές.

Επειδή

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = - \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left( \frac{n\pi}{l} \right)^2 \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (8.98)$$

παρατηρούμε ότι κάθε όρος της σειράς ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες (8.88). Από τις (8.97) και (8.98), η (8.87) δίνει την παρακάτω έκφραση για τη δυναμική ενέργεια

$$\Pi = \int_0^l \left\{ \frac{EI}{2} \left[ \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left( \frac{n\pi}{l} \right)^2 \sin \frac{n\pi x}{l} \right]^2 - q \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right\} dx \quad (8.99)$$

Αλλά

$$\begin{aligned}
 & \left[ \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left( \frac{n\pi}{l} \right)^2 \sin \frac{n\pi x}{l} \right]^2 = \\
 & a_1 \left( \frac{1\pi}{l} \right)^2 \sin \frac{1\pi x}{l} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left( \frac{n\pi}{l} \right)^2 \sin \frac{n\pi x}{l} + \\
 & a_2 \left( \frac{2\pi}{l} \right)^2 \sin \frac{2\pi x}{l} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left( \frac{n\pi}{l} \right)^2 \sin \frac{n\pi x}{l} + \dots = \\
 & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_m a_n \left( \frac{m\pi}{l} \right)^2 \left( \frac{n\pi}{l} \right)^2 \sin \frac{m\pi x}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (8.100)
 \end{aligned}$$

Όμως, εξ αιτίας της ορθογωνιότητας της ημιτονοειδούς συνάρτησης

$$\int_0^l \sin \frac{m\pi x}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} dx = 0 \quad \text{για } m \neq n \quad (8.101)$$

$$\int_0^l \sin \frac{m\pi x}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{l}{2} \quad \text{για } m = n \quad (8.102)$$

Λαμβάνοντας υπ' όψη τις (8.100) - (8.102), η (8.99) γράφεται

$$\begin{aligned}
 \Pi &= \int_0^l \left[ \frac{EI}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \left( \frac{n\pi}{l} \right)^4 \sin^2 \frac{n\pi x}{l} - q \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right] dx \Rightarrow \\
 \Pi &= \frac{EI}{2} \left( \frac{l}{2} \right) \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \left( \frac{n\pi}{l} \right)^4 + q \left( \frac{l}{\pi} \right) \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{1}{n} \cos \frac{n\pi x}{l} \Big|_0^l \quad (8.103)
 \end{aligned}$$

Αν το  $n$  είναι άρτιος, ο δεύτερος όρος στο δεξί μέλος της (8.103) μηδενίζεται. Έτσι παίρνουμε

$$\Pi(a_n) = \frac{\pi^4 EI}{4l^3} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 n^4 - \frac{2ql}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{a_n}{n} \quad (8.104)$$

Η συνθήκη ελαχιστοποίησης της δυναμικής ενέργειας είναι

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_m} = 0 \quad (8.105)$$

Από την (8.105), εξ' αιτίας της (8.104) παίρνουμε

$$\frac{2\pi^4 EI}{4l^3} m^4 a_m = 0 \Rightarrow a_m = 0 \quad (8.106)$$

για άρτιο  $m$  και

$$\frac{2\pi^4 EI m^4 a_m}{4l^3} - \frac{2ql}{\pi} \frac{1}{m} = 0 \Rightarrow a_m = \frac{4ql^4}{EI(m\pi)^5} \quad (8.107)$$

για περιττό  $m$ . Εξ' αιτίας των (8.106) και (8.107), η (8.97) δίνει

$$w(x) = \frac{4ql^4}{EI\pi^5} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^5} \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (8.108)$$

Για έλεγχο της ακρίβειας της λύσης, υπολογίζουμε το μέγιστο βέλος κάμψης, για  $x = \frac{l}{2}$ , από τη σχέση

$$w_{max} = \frac{4ql^4}{EI\pi^5} \left( 1 - \frac{1}{3^5} + \frac{1}{5^5} - \dots \right) \quad (8.109)$$

Παίρνοντας υπ' όψη μόνο τον πρώτο όρο της σειράς στο δεξί μέλος της (8.109) βρίσκουμε

$$w_{max} = \frac{ql^4}{76.6EI} \quad (8.110)$$

ενώ η ακριβής λύση είναι

$$w_{max} = \frac{ql^4}{76.8EI} \quad (8.111)$$

Στο παράδειγμα αυτό, η χρησιμοποίηση μόνο του πρώτου όρου της σειράς στο δεξί μέλος της (8.109) έδωσε πολύ ακριβή αποτελέσματα. Αυτό δε συμβαίνει πάντα με τις λύσεις της μεθόδου Rayleigh - Ritz. Επίσης δεν είναι πάντα δυνατό να υπολογιστούν όλοι οι συντελεστές της σειράς, γι αυτό χρησιμοποιούμε μόνο ένα πεπερασμένο πλήθος όρων.

## 8.6 Ασκήσεις

### 8.6.1 Άσκηση

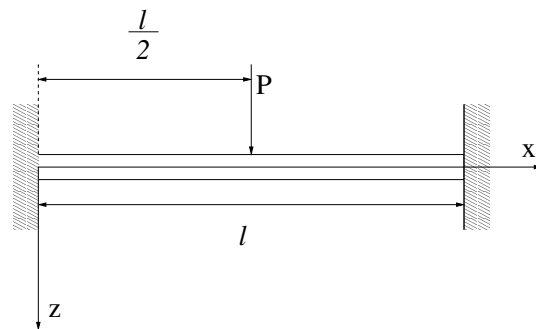
Αμφίπακτη δοκός φορτίζεται με συγκεντρωμένο φορτίο  $P$  στο μέσο της (Σχήμα 8.8).

1. Να γραφούν οι συνοριακές συνθήκες του προβλήματος.
2. Δείξτε ότι η σειρά

$$w = \sum_{n=2}^{\infty} A_n \left( \cos \frac{n\pi x}{l} - 1 \right) \quad \text{για } n = 2, 4, 6, \dots \quad (8.112)$$

για το βέλος κάμψης  $w$ , ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες.

3. Θεωρήστε ως λύση τον πρώτο όρο της σειράς στην (8.112), δηλαδή τον όρο για  $n = 2$  και βρείτε την παράμετρο  $A_2$ .



Σχήμα 8.8: Αμφίπακτη δοκός με συγκεντρωμένο φορτίο στο μέσο της.

### 8.6.2 Άσκηση

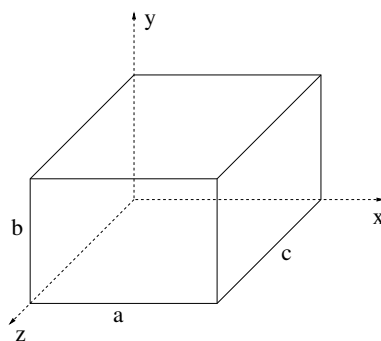
Το ορθογωνικό πρίσμα του Σχήματος 8.9, διαστάσεων  $a$ ,  $b$  και  $c$ , φορτίζεται και ισορροπεί υπό την επίδραση ομοιόμορφης πίεσης  $p$  σ' όλες τις έδρες του. Στο πρίσμα εφαρμόζονται δυνατές μετατοπίσεις για τις οποίες ισχύει

$$\delta v = \delta w = \frac{\partial \delta u}{\partial y} = \frac{\partial \delta u}{\partial z} = 0 \quad (8.113)$$

Δηλαδή όλα τα σημεία του πρίσματος κινούνται ομοιόμορφα κατά τη διεύθυνση  $x$  μόνο. Δείξτε ότι η έκφραση για την πρώτη μεταβολή της δυναμικής ενέργειας  $\delta \Pi$  του πρίσματος είναι

$$\delta \Pi = - \int_0^a \int_0^b \int_0^c \delta u \left[ \lambda \frac{\partial \epsilon}{\partial x} + 2G \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right] dx dy dz + \quad (8.114)$$

$$\int_0^b \int_0^c \left[ \delta u \left( \lambda \epsilon + 2G \frac{\partial u}{\partial x} - p \right) \right]_0^a dy dz \quad (8.115)$$



Σχήμα 8.9: Ορθογωνικό πρίσμα υπό ομοιόμορφη πίεση.





## Κεφάλαιο 9

# Διατύπωση των προβλημάτων της ελαστικότητας

### 9.1 Εισαγωγή

Υπενθυμίζουμε τις αναγκαίες εξισώσεις που πρέπει να ικανοποιούν οι τάσεις, οι παραμορφώσεις και οι μετατοπίσεις. Οι εξισώσεις ισορροπίας είναι

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + F_x = 0 \quad (x, y, z) \quad (9.1)$$

όπου το  $(x, y, z)$  δείχνει ότι υπάρχουν άλλες δυο εξισώσεις που προκύπτουν με κυκλική εναλλαγή των  $x, y, z$ . Οι εξισώσεις παραμορφώσεων - μετατοπίσεων είναι

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned} \right\} (x, y, z; u, v, w) \quad (9.2)$$

και οι σχέσεις τάσεων και παραμορφώσεων για γραμμικά ελαστικά και ισότροπα υλικά είναι

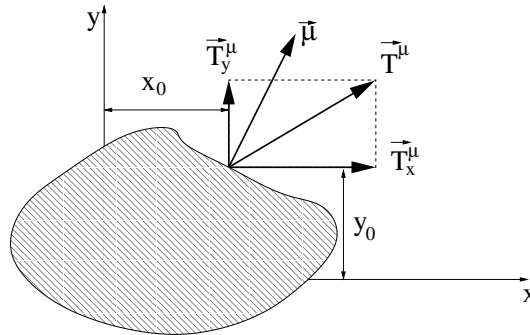
$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xx} &= 2G\epsilon_{xx} + \lambda\epsilon \\ \tau_{xy} &= G\gamma_{xy} \end{aligned} \right\} (x, y, z) \quad (9.3)$$

Οι (9.1) - (9.3) είναι οι 15 διέπουσες εξισώσεις εκφρασμένες σαν συναρτήσεις των 15 μεταβλητών τάσης, παραμόρφωσης και μετατόπισης  $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz}, \epsilon_{xx}, \epsilon_{yy}, \epsilon_{zz}, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}, u, v$  και  $w$ . Οι διέπουσες εξισώσεις πρέπει να ικανοποιούνται σε κάθε σημείο στο εσωτερικό

ενός ελαστικού σώματος και λέγονται και *εξισώσεις πεδίου*. Επίσης, στο σύνορο του σώματος, οι τάσεις και οι μετατοπίσεις που ικανοποιούν τις εξισώσεις πεδίου πρέπει να ικανοποιούν και τις προκαθορισμένες συνοριακές συνθήκες.

## 9.2 Συνοριακές συνθήκες

Στο Σχήμα 9.1 φαίνεται η επιφανειακή δύναμη  $\vec{T}^\mu$  που ασκείται στο σημείο με συντεταγμένες  $(x_0, y_0, z_0)$ , το οποίο βρίσκεται πάνω στο σύνορο ενός σώματος. Αν  $\sigma_{xx_0}, \tau_{xy_0}$  κ. λ. π είναι οι τάσεις στο σύνορο του



Σχήμα 9.1: Επιφανειακή δύναμη στο σύνορο ενός σώματος.

σώματος, τότε ισχύουν οι σχέσεις

$$T_x^\mu = \sigma_{xx_0}\mu_x + \tau_{xy_0}\mu_y + \tau_{xz_0}\mu_z \quad (9.4)$$

$$T_y^\mu = \tau_{xy_0}\mu_x + \sigma_{yy_0}\mu_y + \tau_{yz_0}\mu_z \quad (9.5)$$

$$T_z^\mu = \tau_{xz_0}\mu_x + \tau_{yz_0}\mu_y + \sigma_{zz_0}\mu_z \quad (9.6)$$

Σε άλλη περίπτωση μπορεί να δίνονται οι μετατοπίσεις σ' ένα τμήμα του συνόρου ή σ' ολόκληρο το σύνορο. Τότε θα έχουμε

$$u(x_0, y_0, z_0) = u_b \quad (9.7)$$

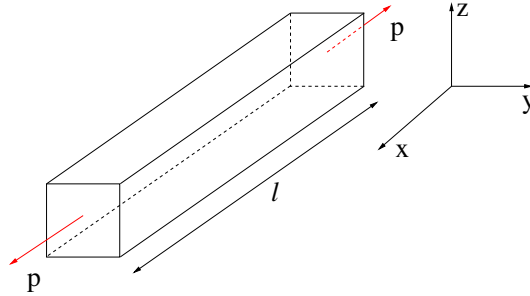
$$v(x_0, y_0, z_0) = v_b \quad (9.8)$$

$$w(x_0, y_0, z_0) = w_b \quad (9.9)$$

όπου  $u_b, v_b$  και  $w_b$  είναι οι προκαθορισμένες μετατοπίσεις στο σύνορο και  $u(x_0, y_0, z_0), v(x_0, y_0, z_0)$  και  $w(x_0, y_0, z_0)$  είναι οι τιμές των συναρτήσεων των μετατοπίσεων στο σώμα, υπολογισμένες όμως πάνω στο σύνορο. Εννοείται ότι και οι τάσεις  $\sigma_{xx_0}, \tau_{xy_0} \dots$  είναι συναρτήσεις των  $x, y$  και  $z$ , που προκύπτουν από τις εξισώσεις πεδίου και υπολογίζονται στο σύνορο, όπου το  $x$  αντικαθίσταται από το  $x_0$  κ. λ. π.

Ένα πρόβλημα όπου είναι προκαθορισμένο το διάνυσμα τάσης σ' ολόκληρο το σύνορο, λέγεται *συνοριακό πρόβλημα πρώτου είδους* της

ελαστικότητας. Παράδειγμα, ο μονοαξονικός εφελκυσμός κατά  $x$  ενός πρίσματος με έδρες παράλληλες προς τους άξονες  $x$ ,  $y$  και  $z$  (Σχήμα 9.2). Έστω  $p$  η εφελκυστική τάση που εφαρμόζεται στις ακραίες, κατά  $x$ ,



Σχήμα 9.2: Μονοαξονικός εφελκυσμός πρίσματος.

έδρες του πρίσματος. Οι προκαθορισμένες συνοριακές συνθήκες ανά μονάδα επιφάνειας στις έδρες αυτές είναι

$$T_x^\mu = \pm p, \quad T_y^\mu = T_z^\mu = 0 \quad (9.10)$$

όπου το  $+p$  αναφέρεται στο θετικό κατά  $x$  επίπεδο και το  $-p$  αναφέρεται στο αρνητικό κατά  $x$  επίπεδο. Επειδή στις κάθετες στον άξονα  $x$  ακραίες έδρες ισχύει ότι

$$\mu_x = \pm 1, \quad \mu_y = \mu_z = 0 \quad (9.11)$$

οι (9.4) - (9.6) δίνουν στις έδρες αυτές

$$\sigma_{xx0} = p, \quad \tau_{xy0} = \tau_{xz0} = 0 \quad (9.12)$$

Έτσι στο θετικό κατά  $x$  επίπεδο, στη θέση  $x = l$ , θα έχουμε

$$\sigma_{xx}(l, y, z) = p, \quad \tau_{xy}(l, y, z) = \tau_{xz}(l, y, z) = 0 \quad (9.13)$$

Στις παράπλευρες έδρες του πρίσματος έχουμε

$$T_x^\mu = T_y^\mu = T_z^\mu = 0 \quad (9.14)$$

Έτσι στις κατά  $y$  έδρες έχουμε

$$\mu_x = 0, \quad \mu_y = \pm 1, \quad \mu_z = 0 \quad (9.15)$$

και οι (9.4) - (9.6) δίνουν

$$\sigma_{yy0} = \tau_{xy0} = \tau_{yz0} = 0 \quad (9.16)$$

Όμοια στις κατά  $z$  έδρες προκύπτει ότι

$$\sigma_{zz0} = \tau_{yz0} = \tau_{xz0} = 0 \quad (9.17)$$

Στην περίπτωση που οι μετατοπίσεις ορίζονται σ' ολόκληρο το σύνορο ενός σώματος, έχουμε το *συνοριακό πρόβλημα δεύτερου είδους* της ελαστικότητας. Παράδειγμα είναι ένα μεταλλικό ορθογώνιο εγκιβωτισμένο μέσα σ' ένα απαραμόρφωτο κουτί. Όταν θερμανθεί το ορθογώνιο, οι έδρες του δε μπορούν να μετακινηθούν. Έτσι αν οι έδρες του ορθογωνίου είναι παράλληλες προς τους άξονες  $x$ ,  $y$  και  $z$ , τότε οι συνοριακές συνθήκες είναι

$$u_b = v_b = w_b = 0 \quad (9.18)$$

σ' όλες τις έδρες.

Τέλος, στο *μικτό συνοριακό πρόβλημα* της ελαστικότητας, οι μετατοπίσεις ορίζονται σ' ένα τμήμα του συνόρου του σώματος και το διάνυσμα τάσης ορίζεται στο υπόλοιπο τμήμα του συνόρου.

### 9.3 Διέπουσες εξισώσεις σε προβλήματα επίπεδης παραμόρφωσης

Κατάσταση επίπεδης παραμόρφωσης έχουμε σ' ένα σώμα όπου το πεδίο των μετατοπίσεων δίνεται από τις σχέσεις

$$u = u(x, y) \quad (9.19)$$

$$v = v(x, y) \quad (9.20)$$

$$w = 0 \quad (9.21)$$

Οι μόνες μη μηδενιζόμενες συνιστώσες της μετατόπισης  $u$  και  $v$ , είναι συναρτήσεις των  $x$  και  $y$  μόνο. Σε πρακτικά προβλήματα, το σώμα είναι πρισματικό με το διαμήκη άξονά του κατά τη διεύθυνση  $z$ .

Θέτοντας τις (9.19) - (9.21) στις (9.2) παίρνουμε

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (9.22)$$

$$\epsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (9.23)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (9.24)$$

ενώ

$$\epsilon_{zz} = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0 \quad (9.25)$$

Από το γενικευμένο νόμο Hooke (9.3) καταλήγουμε στις σχέσεις

$$\sigma_{xx} = 2G\epsilon_{xx} + \lambda(\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy}) \quad (9.26)$$

$$\sigma_{yy} = 2G\epsilon_{yy} + \lambda(\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy}) \quad (9.27)$$

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} \quad (9.28)$$

ενώ

$$\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \quad (9.29)$$

$$\sigma_{zz} = \lambda(\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy}) = \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \quad (9.30)$$

Η τάση  $\sigma_{zz}$  δε θα εμφανιστεί σε άλλες διέπουσες εξισώσεις και δε θα θεωρηθεί ως άγνωστη ποσότητα, μιας και όπως φαίνεται από τη σχέση (9.30) εξαρτάται από τις  $\sigma_{xx}$  και  $\sigma_{yy}$ . Στην κατάσταση επίπεδης παραμόρφωσης ισχύει ότι  $\epsilon_{zz} = 0$  αλλά  $\sigma_{zz} \neq 0$ .

Οι εξισώσεις ισορροπίας (9.1), στην κατάσταση επίπεδης παραμόρφωσης, παίρνουν τη μορφή

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + F_x = 0 \quad (9.31)$$

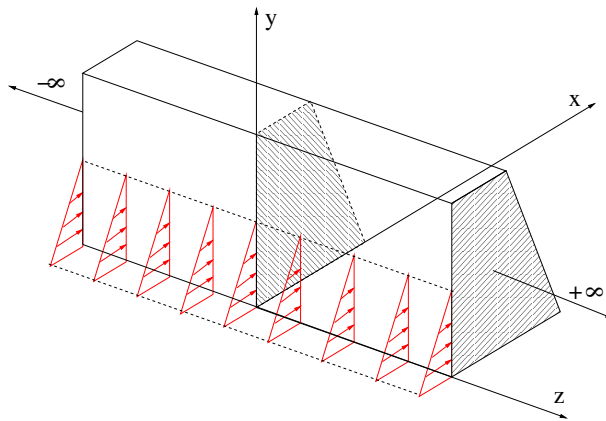
$$\frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + F_y = 0 \quad (9.32)$$

ενώ η εξίσωση ισορροπίας κατά  $z$  δίνει

$$F_z = 0 \quad (9.33)$$

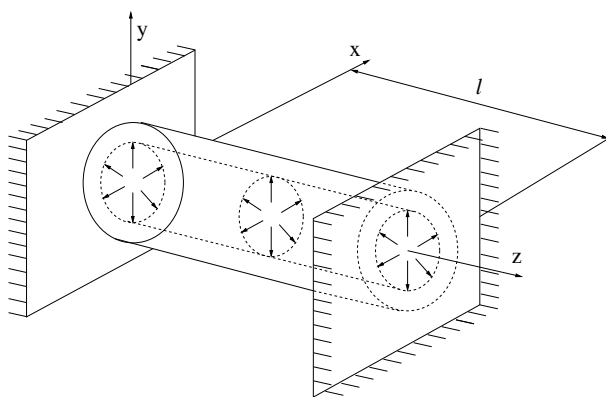
Η συνιστώσα της μαζικής δύναμης κατά τη διεύθυνση  $z$ , είναι ίση με μηδέν στην επίπεδη παραμόρφωση.

Επί πλέον, στην επίπεδη παραμόρφωση το σώμα πρέπει να είναι κυλινδρικό (πρισματικό), δηλαδή με αμετάβλητη διατομή κατά τη διεύθυνση  $z$ . Οι επιφανειακές δυνάμεις πρέπει να είναι ανεξάρτητες του  $z$  και να μην έχουν συνιστώσα κατά  $z$ . Τα κυλινδρικά σώματα μπορούν να είναι είτε απείρου μήκους (Σχήμα 9.3), είτε πεπερασμένου μήκους



Σχήμα 9.3: Πρίσμα άπειρου μήκους σε κατάσταση επίπεδης παραμόρφωσης.

σε εξαναγκασμένη επαφή στα άκρα τους, με λεία, αμετακίνητα τοιχώματα, που είναι κάθετα στον  $z$  (Σχήμα 9.4). Αν το σώμα έχει άπειρο



Σχήμα 9.4: Πρίσμα πεπερασμένου μήκους σε κατάσταση επίπεδης παραμόρφωσης.

μήκος και φορτίζεται με δυνάμεις που ικανοποιούν τους παραπάνω περιορισμούς, όλες οι διατομές είναι επίπεδα συμμετρίας. Για το λόγο αυτό η συνιστώσα  $w$  της μετατόπισης είναι ίση με μηδέν. Αν το σώμα είναι πεπερασμένου μήκους με λεία αμετακίνητα άκρα, οι συνοριακές συνθήκες είναι

$$w_b = w(x, y, 0) = w(x, y, l) = \tau_{xz_0} = \tau_{yz_0} = 0 \quad (9.34)$$

Έτσι οι μόνες απαιτούμενες συνοριακές συνθήκες, για προβλήματα επίπεδης παραμόρφωσης, είναι αυτές που ορίζονται πάνω στην παράπλευρη επιφάνεια. Οι επιφανειακές δυνάμεις στην παράπλευρη επιφάνεια εκφράζονται ως

$$T_x^\mu = T_x^\mu(x_0, y_0) \quad (9.35)$$

$$T_y^\mu = T_y^\mu(x_0, y_0) \quad (9.36)$$

$$T_z^\mu = 0 \quad (9.37)$$

Επειδή  $\mu_z = 0$  στην παράπλευρη επιφάνεια

$$T_x^\mu(x_0, y_0) = \sigma_{xx_0}\mu_x + \tau_{xy_0}\mu_y \quad (9.38)$$

$$T_y^\mu(x_0, y_0) = \tau_{xy_0}\mu_x + \sigma_{yy_0}\mu_y \quad (9.39)$$

και η  $T_z^\mu = 0$  ικανοποιείται αυτόματα εξ αιτίας της (9.6).

Αν δίνονται οι μετατοπίσεις στην παράπλευρη επιφάνεια έχουμε τις συνοριακές συνθήκες

$$u(x_0, y_0) = u_b \quad (9.40)$$

$$v(x_0, y_0) = v_b \quad (9.41)$$

Έτσι έχουμε να βρούμε τους 8 αγνώστους  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$ ,  $\tau_{xy}$ ,  $\epsilon_{xx}$ ,  $\epsilon_{yy}$ ,  $\gamma_{xy}$ ,  $u$  και  $v$ , από τις 8 εξισώσεις (9.22) - (9.24), (9.26) - (9.28), (9.31), (9.32) και

βέβαια με χρήση των συνοριακών συνθηκών (9.38) - (9.39) ή (9.40) - (9.41).

Επειδή στην επίπεδη παραμόρφωση, γενικά έχουμε ότι  $\sigma_{zz} \neq 0$ , η δύναμη που αναπτύσσεται στα ακραία επίπεδα στην περίπτωση του πρίσματος πεπερασμένου μήκους είναι

$$P_z = \iint \sigma_{zz} \, dx \, dy \quad (9.42)$$

Οι 8 διέπουσες εξισώσεις της επίπεδης παραμόρφωσης, μπορούν να μειωθούν σε 2 εξισώσεις εκφρασμένες σαν συναρτήσεις των μετατοπίσεων  $u$  και  $v$  μόνο. Αυτές είναι οι εξισώσεις *Navier* και δίνονται από τις σχέσεις

$$G\nabla^2 u + (\lambda + G) \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + F_x = 0 \quad (9.43)$$

$$G\nabla^2 v + (\lambda + G) \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + F_y = 0 \quad (9.44)$$

όπου

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (9.45)$$

Οι (9.43) - (9.44) είναι χρήσιμες στα συνοριακά προβλήματα δεύτερου είδους.

Εναλλακτικά οι 8 εξισώσεις μπορούν να μειωθούν σε 3 εξισώσεις, εκφρασμένες σαν συναρτήσεις των τάσεων. Αυτές είναι οι εξισώσεις *Beltrami - Michell* και περιλαμβάνουν τις εξισώσεις ισορροπίας (9.31), (9.32) και την εξίσωση

$$\nabla^2(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = -\frac{1}{1-\nu} \left( \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} \right) \quad (9.46)$$

Οι (9.31), (9.32) και η (9.46) είναι χρήσιμες στα συνοριακά προβλήματα πρώτου είδους.

## 9.4 Η Αρχή της Επαλληλίας

Η Αρχή της Επαλληλίας διατυπώνεται ως εξής: *Οι εξαρτημένες μεταβλητές, τάση, παραμόρφωση και μετατόπιση, που προκαλούνται από την ξεχωριστή δράση κάθε μιας ομάδας εξωτερικών «φορτίων», (που μπορεί να περιέχει μαζικές δυνάμεις, επιφανειακές δυνάμεις και δεδομένες συνοριακές μετατοπίσεις) μπορούν να προστεθούν και να δώσουν τις συνολικές τιμές από την ταυτόχρονη δράση των ομάδων αυτών.*

Έστω  $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \dots, \tau_{xz}$  μια κατανομή τάσεων που ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες με επιφανειακές δυνάμεις  $T_x^\mu, T_y^\mu$  και  $T_z^\mu$  και μαζικές

δυνάμεις  $F_x, F_y$  και  $F_z$ . Παραπέρα έστω μια νέα κατανομή τάσεων  $\sigma'_{xx}, \sigma'_{yy}, \dots, \tau'_{xz}$  στο ίδιο σώμα με μαζικές δυνάμεις  $F'_x, F'_y$  και  $F'_z$  και επιφανειακές συνοριακές δυνάμεις  $T'^\mu_x, T'^\mu_y$  και  $T'^\mu_z$ . Οι εξισώσεις ισορροπίας για τις δύο καταστάσεις είναι

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + F_i &= 0 \\ \frac{\partial \sigma'_{ij}}{\partial x_j} + F'_i &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (9.47)$$

Οι εξισώσεις συμβιβαστού για τα δύο συστήματα δυνάμεων είναι

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \sigma_{ik} + \frac{1}{1+\nu} \sigma_{jj,ik} &= -\frac{\nu}{1-\nu} \delta_{ik} F_{j,j} - (F_{i,k} + F_{k,i}) \\ \nabla^2 \sigma'_{ik} + \frac{1}{1+\nu} \sigma'_{jj,ik} &= -\frac{\nu}{1-\nu} \delta_{ik} F'_{j,j} - (F'_{i,k} + F'_{k,i}) \end{aligned} \right\} \quad (9.48)$$

και οι συνοριακές συνθήκες είναι

$$\left. \begin{aligned} T_i^\mu &= \sigma_{ji} \mu_j \\ T'^\mu_i &= \sigma'_{ji} \mu_j \end{aligned} \right\} \quad (9.49)$$

Προσθέτοντας χωριστά κατά μέλη τις (9.47), (9.48) και (9.49) παίρνουμε

$$(\sigma_{ij} + \sigma'_{ij})_{,j} + (F_i + F'_i) = 0 \quad (9.50)$$

$$\begin{aligned} \nabla^2 (\sigma_{ik} + \sigma'_{ik}) + \frac{1}{1+\nu} (\sigma_{jj} + \sigma'_{jj})_{,ik} = \\ -\frac{\nu}{1-\nu} \delta_{ik} (F_j + F'_j)_{,j} - [(F_i + F'_i)_{,k} + (F_k + F'_k)_{,i}] \end{aligned} \quad (9.51)$$

$$T_i^\mu + T'^\mu_i = (\sigma_{ij} + \sigma'_{ij}) \mu_j \quad (9.52)$$

που είναι οι διέπουσες εξισώσεις και οι συνοριακές συνθήκες για τη συνολική (ταυτόχρονη) δράση των δύο συστημάτων δυνάμεων. Η επαλληλία ισχύει διότι οι διέπουσες εξισώσεις και οι συνοριακές συνθήκες είναι γραμμικές ως προς τις εξαρτημένες μεταβλητές και τις παραγώγους τους. Το τελευταίο ισχύει διότι θεωρούμε ότι οι παραμορφώσεις είναι μικρές και ότι οι σχέσεις τάσεων - παραμορφώσεων είναι γραμμικές.

## 9.5 Μοναδικότητα των λύσεων της γραμμικής ελαστικότητας

Έστω ένα ελαστικό σώμα που υπόκειται σε συνοριακές δυνάμεις  $T_x^\mu, T_y^\mu$  και  $T_z^\mu$  και σε μαζικές δυνάμεις  $F_x, F_y$  και  $F_z$ . Έστω ότι υπάρχουν



δύο κατανομές τάσεων  $\sigma'_{ij}$  και  $\sigma''_{ij}$ , που ικανοποιούν τις διέπουσες εξισώσεις και τις συνοριακές συνθήκες. Οι εξισώσεις αυτές προκύπτουν από τις (9.47), (9.48) και (9.49), αν θέσω στη θέση των άτονων μεταβλητών τις τονούμενες και στη θέση των τονούμενων μεταβλητών τις δις-τονούμενες. Αφαιρώντας τώρα κατά μέλη τις (9.47), (9.48) και (9.49) παίρνουμε τις εξισώσεις

$$\sigma_{ij,j} = 0 \quad (9.53)$$

$$\nabla^2 \sigma_{ik} + \frac{1}{1+\nu} \sigma_{jj,ik} = 0 \quad (9.54)$$

$$\sigma_{ij} \mu_j = 0 \quad (9.55)$$

όπου

$$\sigma_{ij} = \sigma'_{ij} - \sigma''_{ij} \quad (9.56)$$

Οι (9.53) - (9.55) είναι οι διέπουσες εξισώσεις και οι συνοριακές συνθήκες, για το πεδίο των τάσεων  $\sigma_{ij}$  που δίνεται από τη σχέση (9.56), με μηδενικές συνοριακές και μαζικές δυνάμεις να ασκούνται στο σώμα. Ένα σώμα με μηδενικές εξωτερικές δυνάμεις έχει και μηδενικές τάσεις. Επομένως

$$\sigma_{ij} = 0 \implies \sigma'_{ij} - \sigma''_{ij} = 0 \implies \sigma'_{ij} = \sigma''_{ij} \quad (9.57)$$

δηλαδή η λύση είναι μοναδική.

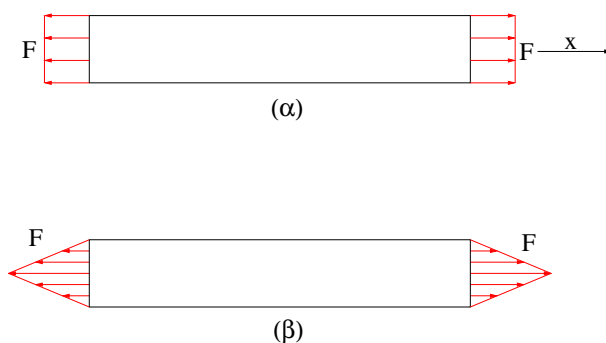
Εδώ αποδείχθηκε η μοναδικότητα των λύσεων για συνοριακά προβλήματα πρώτου είδους. Με όμοιο τρόπο αποδεικνύεται η μοναδικότητα των λύσεων για συνοριακά προβλήματα δεύτερου είδους ή και για μικτά προβλήματα.

## 9.6 Η Αρχή του Saint - Venant

Η Αρχή του Saint - Venant διατυπώνεται ως εξής: *Οι τάσεις εξ αιτίας δυο διαφορετικών αλλά στατικά ισοδύναμων φορτίσεων που εφαρμόζονται σε μια μικρή περιοχή, είναι σημαντικά διαφορετικές μόνο στη γειτονιά των εφαρμοζόμενων φορτίων. Σε αποστάσεις μεγάλες, σε σχέση με τις διαστάσεις της περιοχής όπου εφαρμόζονται τα φορτία, τα αποτελέσματα των δύο φορτίσεων είναι ίδια.* Στη ράβδο του σχήματος (9.5), η δύναμη  $F$  εφαρμόζεται με δυο διαφορετικούς τρόπους. Στην περίπτωση (α) έχουμε ομοιόμορφη κατανομή της  $F$  στα άκρα της ράβδου, ενώ στην περίπτωση (β) η  $F$  κατανέμεται ανομοιόμορφα στα άκρα αυτά. Στην περίπτωση (α), η τάση παντού στη ράβδο είναι

$$\sigma_{xx} = \frac{F}{A} = p \quad (9.58)$$

$$\tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = 0 \quad (9.59)$$



Σχήμα 9.5: Ράβδος υπό στατικά ισοδύναμες εφελκυστικές φορτίσεις.

Η λύση που δίνεται από τις εξισώσεις (9.58) και (9.59) είναι μοναδική για το πρόβλημα (α), αλλά δεν είναι λύση για το πρόβλημα (β) διότι δεν ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες. Εξ αιτίας όμως της αρχής του Saint - Venant, η κατανομή των τάσεων που δίνεται από τις σχέσεις (9.58) και (9.59), προσεγγίζει την πραγματική κατανομή των τάσεων της περίπτωσης (β), εκτός από τα σημεία κοντά στα άκρα της ράβδου.

## 9.7 Άσκηση

Ράβδος ορθογωνικής διατομής, μήκους  $l$ , αποτελούμενη από υλικό πυκνότητας μάζας  $\rho$ , αναρτάται από οροφή, υπό την επίδραση του ίδιου βάρους της (Σχήμα 9.6). Υποθέστε ότι στη ράβδο ισχύουν οι σχέσεις

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0 \quad (9.60)$$

και ότι στην επιφάνεια επαφής μεταξύ οροφής και ράβδου, η ορθή τάση είναι ομοιόμορφη.

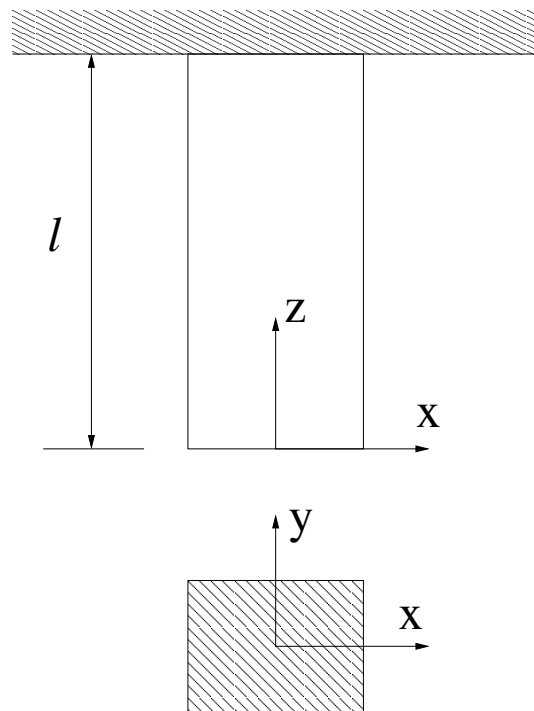
1. Με βάση τις παραπάνω υποθέσεις, μειώστε τον αριθμό των διεπαιμένων εξισώσεων του προβλήματος από 15 σε 7. Γράψτε τις 7 διεπαιμένες εξισώσεις με χρήση των  $\sigma_{zz}$ ,  $\epsilon_{xx}$ ,  $\epsilon_{yy}$ ,  $\epsilon_{zz}$ ,  $u$ ,  $v$  και  $w$ .
2. Ολοκληρώστε την εξίσωση ισορροπίας και δείξτε ότι

$$\sigma_{zz} = \rho g z \quad (9.61)$$

όπου  $g$  είναι η επιτάχυνση της βαρύτητας.

3. Βρείτε τις παραμορφώσεις  $\epsilon_{xx}$ ,  $\epsilon_{yy}$  και  $\epsilon_{zz}$  από το νόμο Hooke.
4. Αν οι μετατοπίσεις και οι στροφές είναι μηδενικές στο σημείο  $(0, 0, l)$ , βρείτε τις μετατοπίσεις  $u$  και  $v$ .
5. Δείξτε ότι

$$w = \frac{\rho g}{2E}(z^2 + \nu x^2 + \nu y^2 - l^2) \quad (9.62)$$



Σχήμα 9.6: Ράβδος αναρτημένη από οροφή.



## Κεφάλαιο 10

# Προβλήματα στο επίπεδο

### 10.1 Κατάσταση επίπεδης έντασης

Κατάσταση επίπεδης έντασης έχουμε όταν

$$\sigma_{xx} = \sigma_{xx}(x, y) \quad (10.1)$$

$$\sigma_{yy} = \sigma_{yy}(x, y) \quad (10.2)$$

$$\tau_{xy} = \tau_{xy}(x, y) \quad (10.3)$$

$$\tau_{xz} = \tau_{yz} = \sigma_{zz} = 0 \quad (10.4)$$

δηλαδή τα τρία μη μηδενιζόμενα στοιχεία του τανυστή τάσης είναι συναρτήσεις μόνο των  $x$  και  $y$ . Έτσι οι διέπουσες εξισώσεις της ελαστικότητας απλοποιούνται. Οι εξισώσεις ισορροπίας (9.1) δίνουν

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + F_x = 0 \quad (10.5)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + F_y = 0 \quad (10.6)$$

όπου οι μαζικές δυνάμεις  $F_x$  και  $F_y$  είναι συναρτήσεις των  $x$  και  $y$  μόνο, ενώ η  $F_z$  πρέπει να ισούται με μηδέν.

Οι σχέσεις τάσεων - παραμορφώσεων (9.3) παίρνουν τη μορφή

$$\epsilon_{xx} = \epsilon_{xx}(x, y) = \frac{1}{E}(\sigma_{xx} - \nu\sigma_{yy}) \quad (10.7)$$

$$\epsilon_{yy} = \epsilon_{yy}(x, y) = \frac{1}{E}(\sigma_{yy} - \nu\sigma_{xx}) \quad (10.8)$$

$$\gamma_{xy} = \gamma_{xy}(x, y) = \frac{1}{G}\tau_{xy} \quad (10.9)$$

Οι παραμορφώσεις  $\gamma_{xz}$ ,  $\gamma_{yz}$  μηδενίζονται. Υπάρχει και η συνιστώσα  $\epsilon_{zz}$  που δίνεται από τη σχέση

$$\epsilon_{zz} = \epsilon_{zz}(x, y) = -\frac{\nu}{E}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \quad (10.10)$$

Όμως η  $\epsilon_{zz}$  δεν εμφανίζεται σε κάποια διέπουσα εξίσωση γι' αυτό δε θεωρείται άγνωστη.

Οι σχέσεις παραμορφώσεων - μετατοπίσεων (9.2) δίνουν τις σχέσεις

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (10.11)$$

$$\epsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (10.12)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (10.13)$$

Η παράλειψη ορισμένων από τις εξισώσεις (9.2), οδηγεί σε προσεγγίσεις που θα συζητηθούν στην Ενότητα 10.2. Η μετατόπιση  $w$ , αν και γενικά είναι διάφορη του μηδενός, δε θεωρείται ανεξάρτητη μεταβλητή, εξ αιτίας της (10.10).

Τελικά έχουμε 8 εξισώσεις, δηλαδή τις (10.5), (10.6), (10.7) - (10.9) και τις (10.11) - (10.13), με 8 άγνωστες εξαρτημένες μεταβλητές, δηλαδή τις  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$ ,  $\tau_{xy}$ ,  $\epsilon_{xx}$ ,  $\epsilon_{yy}$ ,  $\gamma_{xy}$ ,  $u$  και  $v$ . Παρατηρούμε ότι οι (10.5) και (10.6) είναι ακριβώς ίδιες με τις (9.31) και (9.32) αντίστοιχα. Όμοια και οι (10.11) - (10.13) συμπίπτουν με τις (9.22) - (9.24). Οι καταστατικές εξισώσεις (10.7) - (10.9) όμως δεν είναι ίδιες με τις αντίστοιχες της επίπεδης παραμόρφωσης. Επίσης στην επίπεδη ένταση  $\sigma_{zz} = 0$  και  $\epsilon_{zz} \neq 0$ , ενώ στην επίπεδη παραμόρφωση  $\sigma_{zz} \neq 0$  και  $\epsilon_{zz} = 0$ .

Απαλείφουμε τις  $u$  και  $v$  από τις (10.11) - (10.13) και παίρνουμε την εξίσωση συμβιβαστού

$$\frac{\partial^2 \epsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{yy}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (10.14)$$

Εξ αιτίας των (10.7) - (10.9) και των (10.5) και (10.6), η (10.14) δίνει την

$$\nabla^2(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = -(\nu + 1) \left( \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} \right) \quad (10.15)$$

που είναι ίδια με την (9.46) της επίπεδης παραμόρφωσης, αν  $F_x = F_y = 0$ .

Όταν οι μαζικές δυνάμεις είναι συντηρητικές, υπάρχει μια συνάρτηση δυναμικού  $V$ , τέτοια ώστε

$$F_x = \frac{\partial V}{\partial x} \quad (10.16)$$

$$F_y = \frac{\partial V}{\partial y} \quad (10.17)$$

και οι εξισώσεις (10.5), (10.6) και (10.15) ανάγονται σε μια εξίσωση ως προς μια εξαρτημένη μεταβλητή. Για το σκοπό αυτό, ορίζουμε την *τασική συνάρτηση*  $\phi = \phi(x, y)$ , επίσης γνωστή και ως *συνάρτηση Airy*, μέσα

από τις σχέσεις

$$\sigma_{xx} + V = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \quad (10.18)$$

$$\sigma_{yy} + V = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \quad (10.19)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \quad (10.20)$$

Εξ αιτίας των (10.18) - (10.20), οι εξισώσεις ισορροπίας (10.5) και (10.6) ικανοποιούνται ως ταυτότητες. Αποδεικνύεται ότι μια τασική συνάρτηση  $\phi$ , που ικανοποιεί τις (10.18) - (10.20), μπορεί να βρεθεί για κάθε τασικό πεδίο που ικανοποιεί τις (10.5) και (10.6), αν οι μαζικές δυνάμεις ικανοποιούν τις (10.16) και (10.17). Η (10.15) γράφεται σαν συνάρτηση της  $\phi$ , εξ αιτίας των (10.18) - (10.20), ως

$$\nabla^4 \phi = (1 - \nu) \nabla^2 V \quad (10.21)$$

όπου

$$\nabla^4 = \nabla^2(\nabla^2) = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} \quad (10.22)$$

Ο τελεστής  $\nabla^4$  λέγεται *διαρμονικός τελεστής*. Η (10.21) είναι η διέπουσα εξίσωση για προβλήματα επίπεδης έντασης, όπου οι μαζικές δυνάμεις είναι συντηρητικές. Αν βρεθεί μια συνάρτηση  $\phi(x, y)$  που να ικανοποιεί την (10.22) και τις συνοριακές συνθήκες ενός προβλήματος επίπεδης έντασης, τότε αυτή η συνάρτηση  $\phi(x, y)$  μας δίνει τη λύση του προβλήματος.

Αν οι μαζικές δυνάμεις είναι μηδενικές ή αν η  $V$  είναι αρμονική συνάρτηση, δηλαδή αν ικανοποιεί την εξίσωση Laplace

$$\nabla^2 V = 0 \quad (10.23)$$

τότε η (10.21) γίνεται

$$\nabla^4 \phi = 0 \quad (10.24)$$

Με τους ίδιους περιορισμούς μπορούμε να δείξουμε ότι η (10.24) ισχύει και για επίπεδη παραμόρφωση.

Εξ αιτίας των (10.7) - (10.9) και των (10.11) - (10.13), οι εξισώσεις ισορροπίας (10.5) και (10.6) μπορούν να γραφούν σαν συνάρτηση των μετατοπίσεων ως

$$G \nabla^2 u + \frac{E}{2(1-\nu)} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + F_x = 0 \quad (10.25)$$

$$G \nabla^2 v + \frac{E}{2(1-\nu)} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + F_y = 0 \quad (10.26)$$

Γενικά όλες οι εξισώσεις της επίπεδης έντασης μπορούν να μετατραπούν σε εξισώσεις επίπεδης παραμόρφωσης, αν τα  $E$  και  $\nu$  αντικατασταθούν από τα  $E_1$  και  $\nu_1$  όπου

$$E_1 = \frac{E}{1 - \nu^2} \quad (10.27)$$

$$\nu_1 = \frac{\nu}{1 - \nu} \quad (10.28)$$

Αντίστροφα, όλες οι εξισώσεις της επίπεδης παραμόρφωσης μπορούν να μετατραπούν σε εξισώσεις επίπεδης έντασης, αν τα  $E$  και  $\nu$  αντικατασταθούν από τα

$$E_2 = \frac{E(1 + 2\nu)}{1 + \nu} \quad (10.29)$$

$$\nu_2 = \frac{\nu}{1 + \nu} \quad (10.30)$$

Συνεπώς, η λύση ενός προβλήματος επίπεδης έντασης μπορεί να προκύψει από τη λύση του αντίστοιχου προβλήματος επίπεδης παραμόρφωσης και αντίστροφα.

## 10.2 Προσεγγιστικός χαρακτήρας των εξισώσεων της επίπεδης έντασης

Μερικές από τις εξισώσεις παραμορφώσεων μετατοπίσεων (9.2) δε χρησιμοποιήθηκαν κατά την εύρεση των οκτώ διεπουσών εξισώσεων της επίπεδης έντασης. Αυτές οι μη χρησιμοποιημένες εξισώσεις, δεν ικανοποιούνται από τις υποθέσεις (10.1) - (10.4) της επίπεδης έντασης. Επομένως οι διεπίουρες εξισώσεις της επίπεδης έντασης είναι προσεγγιστικά αληθείς.

Έστω ότι έχουμε μηδενικές μαζικές δυνάμεις. Τότε, οι εξισώσεις Beltrami - Michell (7.45) - (7.50), γίνονται

$$\nabla^2 \sigma_{xx} + \frac{1}{1 + \nu} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} = 0 \quad (10.31)$$

$$\nabla^2 \sigma_{yy} + \frac{1}{1 + \nu} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^2} = 0 \quad (10.32)$$

$$\nabla^2 \sigma_{zz} + \frac{1}{1 + \nu} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} = 0 \quad (10.33)$$

$$\nabla^2 \tau_{yz} + \frac{1}{1 + \nu} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y \partial z} = 0 \quad (10.34)$$

$$\nabla^2 \tau_{xz} + \frac{1}{1 + \nu} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x \partial z} = 0 \quad (10.35)$$

$$\nabla^2 \tau_{xy} + \frac{1}{1 + \nu} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x \partial y} = 0 \quad (10.36)$$



## 10.2. ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΤΙΚΟΣ ΧΑΡΑΚΤΗΡΑΣ ΤΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΤΗΣ ΕΠΙΠΕΔΗΣ ΕΝΤΑΣΗΣ 121

όπου

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (10.37)$$

και οι εξισώσεις ισορροπίας γίνονται

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0 \quad (10.38)$$

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0 \quad (10.39)$$

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = 0 \quad (10.40)$$

Οι (10.33) - (10.35) και η (10.40) ικανοποιούνται ως ταυτότητες, εξ αιτίας των (10.1) - (10.4). Η εισαγωγή της τασικής συνάρτησης  $\phi$  μέσα από τις σχέσεις

$$\sigma_{yy} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \quad (10.41)$$

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \quad (10.42)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \quad (10.43)$$

οδηγεί στην ικανοποίηση των (10.38) και (10.39). Προσθέτοντας την (10.31) με την (10.32) κατά μέλη, παίρνουμε τελικά τη διέπουσα διαρμονική εξίσωση (10.24). Όμως, οι (10.36) και οι (10.31) και (10.32) χωριστά, δεν ικανοποιούνται γενικά από τις τάσεις που υπόκεινται στους περιορισμούς (10.1) - (10.4).

Υπάρχουν όμως συγκεκριμένες κατανομές τάσεων που ικανοποιούν όλες τις εξισώσεις Beltrami - Michell (10.31) - (10.36) αλλά και τους περιορισμούς (10.1) - (10.4). Επειδή  $\sigma_{zz} = 0$  έχουμε, εξ αιτίας των (10.41) - (10.43), ότι

$$\Theta = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} = \nabla_1^2 \phi \quad (10.44)$$

όπου

$$\nabla_1^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (10.45)$$

και οι (10.31), (10.32) και (10.36) γράφονται ως

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} (\nabla_1^2 \phi) = 0 \quad (10.46)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} (\nabla_1^2 \phi) = 0 \quad (10.47)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (\nabla_1^2 \phi) = 0 \quad (10.48)$$

Οι (10.46) - (10.48) δείχνουν ότι πρέπει να ισχύει η σχέση

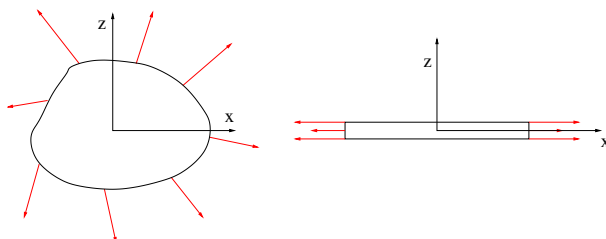
$$\nabla_1^2 \phi = Ax + By + C \quad (10.49)$$

όπου οι  $A$ ,  $B$  και  $C$  είναι αυθαίρετες σταθερές. Επειδή για να προκύψουν οι (10.46) - (10.48), όλες οι διέπουσες εξισώσεις (10.31) - (10.36) και (10.38) - (10.40) ικανοποιούνται, οι τάσεις που προκύπτουν από την (10.49), είναι ακριβείς λύσεις ενός προβλήματος επίπεδης έντασης και υπόκεινται στους περιορισμούς (10.1) - (10.4). Όμως οι λύσεις που προκύπτουν από την (10.49), σχετίζονται με μια μικρή ομάδα προβλημάτων.

Επειδή οι υποθέσεις (10.1) - (10.4) οδηγούν σε προσεγγιστικές λύσεις, έχει σημασία να εξεταστεί η σημασία της προσέγγισης αυτής. Έστω ότι αντί για τους περιορισμούς (10.1) - (10.4), έχουμε μόνο τον (10.4), δηλαδή ότι

$$\sigma_{zz} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \quad (10.50)$$

Έτσι, οι μη μηδενικές τάσεις, μπορούν να είναι συναρτήσεις των  $x$ ,  $y$  και  $z$ . Αν οι εξωτερικές δυνάμεις είναι συμμετρικά τοποθετημένες, ως προς το μέσο επίπεδο  $z = 0$  του σώματος (Σχήμα 10.1), αποδεικνύεται



Σχήμα 10.1: Λεπτή πλάκα σε κατάσταση επίπεδης έντασης.

ότι η ακριβής λύση είναι της μορφής

$$\phi = \phi_0 - \frac{1}{2} \frac{\nu}{1 + \nu} (\nabla_1^2 \phi_0) z^2 \quad (10.51)$$

όπου η  $\phi = \phi_0(x, y)$  ικανοποιεί την

$$\nabla_1^4 \phi_0 = 0 \quad (10.52)$$

Ο δεύτερος όρος στο δεξί μέλος της (10.51) μπορεί να παραληφθεί αν  $z \rightarrow 0$ . Δηλαδή για λεπτές πλάκες έχουμε ότι  $\phi \simeq \phi_0$  και έτσι

$$\nabla_1^4 \phi \simeq \nabla_1^4 \phi_0 = 0 \quad (10.53)$$

και επομένως λύσεις της διαρμονικής εξίσωσης (10.24), προσεγγίζουν πολύ ικανοποιητικά την πραγματική κατανομή των τάσεων.

## Κεφάλαιο 11

# Συνοριακά προβλήματα σε καρτεσιανές συντεταγμένες

### 11.1 Πολυωνυμικές τασικές συναρτήσεις

Διαρμονική συνάρτηση  $\phi$  είναι αυτή που ικανοποιεί τη διαρμονική εξίσωση

$$\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial^2} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} = 0 \quad (11.1)$$

Κάθε πολυώνυμο, ως προς  $x$  και  $y$ , βαθμού μικρότερου του 4, ικανοποιεί την (11.1) ως ταυτότητα. Έστω πολυώνυμο  $P_N(x, y)$ , βαθμού  $N$ , που δίνεται από τη σχέση

$$P_N(x, y) = A_0 x^N + A_1 x^{N-1} y + A_2 x^{N-2} y^2 + \dots + A_N y^N = \sum_{i=0}^N A_i x^{N-i} y^i \quad (11.2)$$

και έχει  $N + 1$  συντελεστές  $A_i$  ( $i = 0, 1, 2, \dots, N$ ). Εξ αιτίας της (11.2), η (11.1) δίνει

$$Q_{N-4}(x, y) = \nabla^4 P_N(x, y) = \sum_{i=0}^{N-4} B_i x^{N-4-i} y^i = 0 \quad (11.3)$$

Οι  $N-3$  συντελεστές  $B_0, B_1, \dots, B_{N-4}$  μπορούν να βρεθούν αναπτύσσοντας το τρίτο μέλος της (11.3) και εξισώνοντας τους συντελεστές των ανεξάρτητων μεταβλητών του με τους αντίστοιχους του δεύτερου μέλους της (11.3). Έτσι π. χ. ο συντελεστής  $B_0$  δίνεται από τη σχέση

$$B_0 = N(N-1)(N-2)(N-3)A_0 + 4(N-2)(N-3)A_2 + 24A_4 \quad (11.4)$$

Όμως η  $P_N(x, y)$  θα είναι διαρμονική αν και μόνον αν η  $Q_{N-4}(x, y)$  είναι ίση με μηδέν για κάθε  $x, y$ , δηλαδή αν

$$B_i = 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots, N-4 \quad (11.5)$$

Οι (11.5) μπορούν να γραφούν σαν  $N - 3$  εξισώσεις ως προς τους αγνώστους  $A_i$  ( $i = 0, 1, 2, \dots, N$ ). Για παράδειγμα, η σχέση

$$B_0 = 0 \quad (11.6)$$

δίνει, εξ αιτίας της (11.4), την εξίσωση

$$N(N-1)(N-2)(N-3)A_0 + 4(N-2)(N-3)A_2 + 24A_4 = 0 \quad (11.7)$$

Θα ονομάζουμε τις  $N - 3$  εξισώσεις (11.5) ως *εξισώσεις περιορισμών* για τους συντελεστές  $A_i$ , επειδή τα  $A_i$  πρέπει να τις ικανοποιούν, έτσι ώστε το πολυώνυμο  $P_N(x, y)$  να είναι διαρμονική συνάρτηση. Γενικά, από τις εξισώσεις (11.5), μπορούν να βρεθούν οι συντελεστές  $A_i, i = 4, \dots, N$  ως συναρτήσεις των  $A_0, A_1, A_2$  και  $A_3$ .

Έστω π. χ. το πολυώνυμο 5<sup>ου</sup> βαθμού

$$P_5(x, y) = A_0x^5 + A_1x^4y + A_2x^3y^2 + A_3x^2y^3 + A_4xy^4 + A_5y^5 \quad (11.8)$$

Από την (11.8), η (11.3) δίνει

$$Q_1(x, y) = (120A_0 + 24A_2 + 24A_4)x + (24A_1 + 24A_3 + 120A_5)y \quad (11.9)$$

Οι συντελεστές των ανεξάρτητων μεταβλητών  $x$  και  $y$  στην (11.9) πρέπει να μηδενίζονται και έτσι παίρνουμε τις δύο εξισώσεις περιορισμών

$$A_4 = -5A_0 - A_2 \quad (11.10)$$

$$A_5 = -\frac{A_1}{5} - \frac{A_3}{5} \quad (11.11)$$

Εξ αιτίας των (11.10) και (11.11), η (11.8) δίνει

$$P_5(x, y) = A_0(x^5 - 5xy^4) + A_1\left(x^4y - \frac{y^5}{5}\right) + A_2(x^3y^2 - xy^4) + A_3\left(x^2y^3 - \frac{y^5}{5}\right) \quad (11.12)$$

Το πολυώνυμο  $P_5(x, y)$  όπως δίνεται από την (11.12), θα είναι διαρμονικό για οποιαδήποτε τιμή των τεσσάρων σταθερών  $A_0, A_1, A_2$  και  $A_3$ .

## 11.2 Πολυώνυμα δευτέρου και τρίτου βαθμού

Εξ αιτίας των (10.41) - (10.43), αν η τασική συνάρτηση  $\phi$  είναι πολυώνυμο  $N$  βαθμού, τότε οι τάσεις είναι πολυώνυμα βαθμού  $N - 2$ . Σταθερές (όροι μηδενικού βαθμού) ή γραμμικοί όροι (πρώτου βαθμού) στη  $\phi$ , δίνουν μηδενικές τάσεις και έτσι αγνοούνται. Έστω λοιπόν ότι

$$\phi = A_0x^2 + A_1xy + A_2y^2 \quad (11.13)$$

τότε, από τις (10.41) - (10.43) παίρνουμε

$$\sigma_{xx} = 2A_2 \quad (11.14)$$

$$\sigma_{xy} = -A_1 \quad (11.15)$$

$$\sigma_{yy} = 2A_0 \quad (11.16)$$

που αντιστοιχούν στην πιο γενική κατάσταση διαξονικής ομοιόμορφης έντασης.

Το πολυώνυμο τρίτου βαθμού

$$\phi = A_0x^3 + A_1x^2y + A_2xy^2 + A_3y^3 \quad (11.17)$$

δίνει τις τάσεις

$$\sigma_{xx} = 2A_2x + 6A_3y \quad (11.18)$$

$$\sigma_{xy} = -2A_1x - 2A_2y \quad (11.19)$$

$$\sigma_{yy} = 6A_0x + 2A_1y \quad (11.20)$$

Θέτοντας

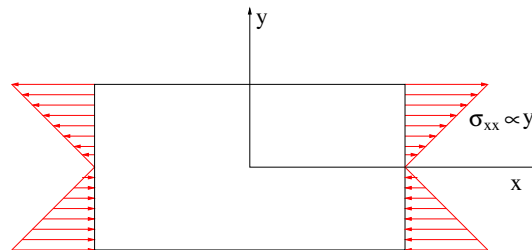
$$A_0 = A_1 = A_2 = 0 \quad (11.21)$$

στις (11.18) - (11.20) παίρνουμε

$$\sigma_{xx} = 6A_3y \quad (11.22)$$

$$\sigma_{yy} = \sigma_{xy} = 0 \quad (11.23)$$

που λύνει το πρόβλημα της καθαρής κάμψης δοκού ορθογώνιας διατομής (Σχήμα 11.1). Οι λύσεις των προβλημάτων της κάμψης με χρήση

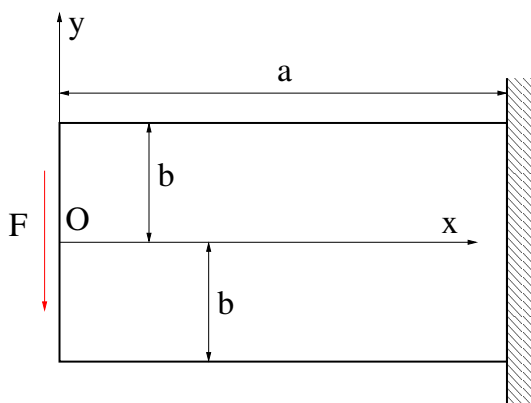


Σχήμα 11.1: Τάσεις σε δοκό υπό καθαρή κάμψη.

της διαρμονικής συνάρτησης  $\phi$ , δε βασίζονται σε απλοποιητικές υποθέσεις σχετικά με την κατανομή των τάσεων και των παραμορφώσεων. Εδώ δεν υποθέσαμε ότι οι αρχικά επίπεδες διατομές παραμένουν επίπεδες μετά την κάμψη, ούτε ότι το μήκος της δοκού είναι μεγάλο σε σχέση με τις εγκάρσιες διαστάσεις της. Οι λύσεις των προβλημάτων κάμψης με χρήση της  $\phi$  χρησιμεύουν για έλεγχο της ακρίβειας των λύσεων της Τεχνικής Θεωρίας Κάμψης στην Αντοχή των Υλικών.

### 11.3 Κάμψη πρόβολου με φορτίο στο άκρο

Πρόβολος μήκους  $a$ , ορθογώνιας διατομής ύψους  $2b$  και μοναδιαίου πάχους κάθετα στο χαρτί, είναι πακτωμένος στη θέση  $x = a$  και φορτίζεται με συγκεντρωμένη δύναμη  $F$  στη θέση  $x = 0$  (Σχήμα 11.2). Να



Σχήμα 11.2: Πρόβολος με συγκεντρωμένο φορτίο στο άκρο.

βρεθεί η κατανομή των τάσεων και των μετατοπίσεων στον πρόβολο.

Οι συνοριακές συνθήκες του προβλήματος είναι

$$\sigma_{xy} = 0 \quad \text{για} \quad y = \pm b \quad (11.24)$$

$$\sigma_{yy} = 0 \quad \text{για} \quad y = \pm b \quad (11.25)$$

$$\sigma_{xx} = 0 \quad \text{για} \quad x = 0 \quad (11.26)$$

$$\int_{-b}^b \sigma_{xy} dy = F \quad \text{για} \quad x = 0 \quad (11.27)$$

Η συνθήκη (11.27) εκφράζεται σε *ασθενή μορφή*, δηλαδή το διάνυσμα τάσης δεν εκφράζεται σε κάθε σημείο του συνόρου, αλλά είναι γνωστή η συνισταμένη του στην έδρα  $x = 0$ .

Από την Τεχνική Θεωρία Κάμψης γνωρίζουμε ότι η ροπή κάμψης θα μεταβάλλεται γραμμικά ως προς  $x$  και επομένως η τάση  $\sigma_{xx}$  θα περιέχει έναν κυρίαρχο όρο ανάλογο του  $xy$ . Έτσι επιλέγουμε

$$\phi = C_1 xy^3 \quad (11.28)$$

Από την (11.28), λαμβάνοντας υπ' όψη και τις (10.41) - (10.43), παίρ-

νουμε

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 6C_1xy \quad (11.29)$$

$$\sigma_{xy} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = -3C_1y^2 \quad (11.30)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 0 \quad (11.31)$$

Από τις (11.29) - (11.31) φαίνεται ότι οι συνοριακές συνθήκες (11.25) και (11.26) ικανοποιούνται αυτόματα. Η συνθήκη (11.24) όμως δεν ικανοποιείται και παίρνουμε μια ανεπιθύμητη διατμητική τάση ίση με  $-3C_1b^2$  για  $y = \pm b$ . Επιλέγουμε λοιπόν νέα  $\phi$

$$\phi = C_1xy^3 + C_2xy \quad (11.32)$$

επιχειρώντας να ακυρώσουμε την ανεπιθύμητη διατμητική τάση. Σημειώνουμε ότι ο όρος  $C_2xy$  δε θα επηρεάσει τις εκφράσεις (11.29) και (11.31) για τις τάσεις  $\sigma_{xx}$  και  $\sigma_{yy}$ , δηλαδή οι εκφράσεις αυτές παραμένουν αναλλοίωτες. Η (11.30) αντίθετα δίνει

$$\sigma_{xy} = -3C_1y^2 - C_2 \quad (11.33)$$

Για να ικανοποιείται η (11.24), από την (11.33) παίρνουμε

$$C_2 = -3C_1b^2 \quad (11.34)$$

και εξ αιτίας της (11.34), η (11.33) γίνεται

$$\sigma_{xy} = 3C_1(b^2 - y^2) \quad (11.35)$$

Από την (11.35), η (11.27) δίνει

$$C_1 = \frac{F}{4b^3} \quad (11.36)$$

Από τις (11.34) και (11.36), η (11.32) δίνει

$$\phi = \frac{F(xy^3 - 3b^2xy)}{4b^3} \quad (11.37)$$

και από τις (11.29) - (11.31) οι τάσεις γίνονται

$$\sigma_{xx} = \frac{3Fxy}{2b^3} \quad (11.38)$$

$$\sigma_{xy} = \frac{3F(b^2 - y^2)}{4b^3} \quad (11.39)$$

$$\sigma_{yy} = 0 \quad (11.40)$$

Δε χρησιμοποιήθηκαν στο πρόβλημα αυτό οι συνοριακές συνθήκες στην πάκτωση, δηλαδή για  $x = a$ . Σε ασθενή μορφή, αυτές οι συνθήκες θα μπορούσαν να γραφούν ως

$$\int_{-b}^b \sigma_{xx} dy = 0 \quad (11.41)$$

$$\int_{-b}^b \sigma_{xy} dy = F \quad (11.42)$$

$$\int_{-b}^b \sigma_{xx} y dy = Fa \quad (11.43)$$

Αν οι (11.24) - (11.27) ικανοποιούνται, τότε οι (11.41) - (11.43) είναι αποτέλεσμα της ισορροπίας της δοκού. Όμως η συνάρτηση  $\phi$  από τον ορισμό της, ικανοποιεί τις διαφορικές εξισώσεις ισορροπίας τοπικά, σε κάθε σημείο της δοκού. Άρα θα ικανοποιεί και τις συνοριακές συνθήκες (11.41) - (11.43). Δεν είναι επομένως απαραίτητο να επιβάλλουμε τις (11.41) - (11.43) ως επί πλέον συνοριακές συνθήκες. Αν απαιτήσουμε την ισχύ των (11.41) - (11.43) θα παρατηρήσουμε ότι αυτές ικανοποιούνται από τη λύση (11.38) - (11.40).

Οι παραμορφώσεις στον πρόβολο, για κατάσταση επίπεδης έντασης, είναι

$$\epsilon_{xx} = \frac{1}{E}(\sigma_{xx} - \nu\sigma_{yy}) = \frac{3Fxy}{2Eb^3} \quad (11.44)$$

$$\epsilon_{xy} = \frac{\sigma_{xy}(1+\nu)}{E} = \frac{3F(1+\nu)(b^2-y^2)}{4Eb^3} \quad (11.45)$$

$$\epsilon_{yy} = \frac{1}{E}(\sigma_{yy} - \nu\sigma_{xx}) = -\frac{3F\nu xy}{2Eb^3} \quad (11.46)$$

Αλλά

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x} \xrightarrow{(11.44)} u_x = \frac{3Fx^2y}{4Eb^3} + f(y) \quad (11.47)$$

$$\epsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y} \xrightarrow{(11.46)} u_y = -\frac{3F\nu xy^2}{4Eb^3} + g(x) \quad (11.48)$$

όπου  $f(y)$  και  $g(x)$  είναι συναρτήσεις που θα προσδιοριστούν. Ισχύει και ότι

$$\begin{aligned} \epsilon_{xy} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \xrightarrow{(11.45), (11.47), (11.48)} \\ \frac{3Fx^2}{8Eb^3} + \frac{1}{2} \frac{df}{dx} &= \frac{3F\nu y^2}{8Eb^3} - \frac{1}{2} \frac{dg}{dy} + \frac{3F(1+\nu)(b^2-y^2)}{4Eb^3} \end{aligned} \quad (11.49)$$



Η (11.49) ικανοποιείται για κάθε  $x$  και  $y$  μόνον όταν το αριστερό μέλος και το δεξί μέλος ισούνται με μια σταθερά, η οποία έστω ότι είναι ίση με  $\frac{1}{2}C$ . Έτσι

$$\frac{dg}{dx} = -\frac{3Fx^2}{4Eb^3} + C \quad (11.50)$$

$$\frac{df}{dy} = \frac{3F\nu y^2}{4Eb^3} + \frac{3F(1+\nu)(b^2 - y^2)}{2Eb^3} - C \quad (11.51)$$

Με ολοκλήρωση των (11.50) και (11.51), παίρνουμε

$$g(x) = -\frac{Fx^3}{4Eb^3} + Cx + B \quad (11.52)$$

$$f(y) = \frac{F\nu y^3}{4Eb^3} + \frac{F(1+\nu)(3b^2y - y^3)}{2Eb^3} - Cy + A \quad (11.53)$$

Εξ αιτίας των (11.52) και (11.53), οι (11.47) και (11.48) δίνουν

$$u_x = \frac{3Fx^2y}{4Eb^3} + \frac{3F(1+\nu)y}{2Eb} - \frac{F(2+\nu)y^3}{4Eb^3} + A - Cy \quad (11.54)$$

$$u_y = -\frac{3F\nu xy^2}{4Eb^3} - \frac{Fx^3}{4Eb^3} + B + Cx \quad (11.55)$$

Οι σταθερές  $A$  και  $B$  αντιστοιχούν σε μετατοπίσεις στερεού σώματος και το  $C$  αντιστοιχεί σε μικρή αντιωρολογιακή στροφή στερεού σώματος γύρω από την αρχή των αξόνων. Οι (11.54) και (11.55) δείχνουν ότι η γνώση των τάσεων και των παραμορφώσεων σ' ένα σώμα αρκεί για την εύρεση του παραμορφωμένου σχήματος του σώματος, αλλά δεν αρκεί για την εύρεση της θέσης του στο χώρο. Οι συνοριακές συνθήκες μετατοπίσεων στο πακτωμένο άκρο του προβόλου του Σχήματος (11.2) είναι

$$u_x = u_y = 0 \quad \text{για} \quad x = a, \quad -b < y < b \quad (11.56)$$

Η ύπαρξη μόνο τριών άγνωστων σταθερών  $A$ ,  $B$  και  $C$  στις (11.54) και (11.55), δε μας επιτρέπει να ικανοποιήσουμε τις ισχυρές συνοριακές συνθήκες (11.56), σε κάθε σημείο της έδρας  $x = a$  και στο διάστημα  $-b < y < b$ .

Σύμφωνα με την Αντοχή των Υλικών, έχουμε τις εξής κινηματικές συνοριακές συνθήκες για το μέσο  $(a, 0)$  της παρειάς στην πάκτωση

$$\left. \begin{array}{l} u_x = u_y = 0 \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} = 0 \end{array} \right\} \quad \text{για} \quad x = a, \quad y = 0 \quad (11.57)$$

130 ΚΕΦΑΛΑΙΟ 11. ΣΥΝΟΡΙΑΚΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΣΕ ΚΑΡΤΕΣΙΑΝΕΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

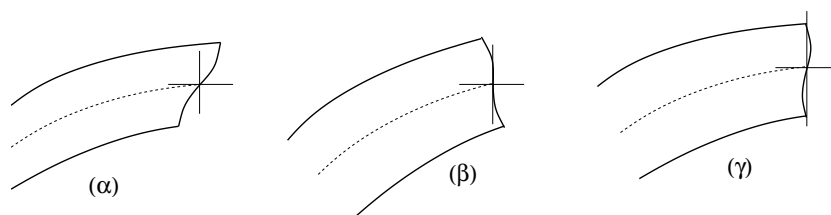
Οι (11.57), εξ αιτίας των (11.54) και (11.55), τελικά δίνουν

$$A = 0 \quad (11.58)$$

$$B = -\frac{Fa^3}{2Eb^3} \quad (11.59)$$

$$C = \frac{3Fa^2}{4Eb^3} \quad (11.60)$$

Οι συνθήκες (11.57) οδηγούν στην κατάσταση που φαίνεται στο Σχήμα 11.3(α) στο πακτωμένο άκρο. Μια τέτοια στήριξη, όπου ο διαμήκης



Σχήμα 11.3: Συνθήκες στήριξης στο άκρο προβόλου.

άξονας της δοκού είναι οριζόντιος στην πάκτωση, ταιριάζει στην πραγματική κατάσταση στερέωσης προβόλου σε οριζόντια εσοχή (Σχήμα 11.4).



Σχήμα 11.4: Πρόβολος πακτωμένος σε οριζόντια εσοχή.

Άλλες πραγματικές συνθήκες στήριξης μπορεί να προσομοιάζονται καλύτερα από άλλες συνοριακές συνθήκες. Έτσι, αντί για τις (11.57), μπορούμε να πάρουμε τις συνθήκες

$$\left. \begin{array}{l} u_x = u_y = 0 \\ \frac{\partial u_x}{\partial y} = 0 \end{array} \right\} \text{για } x = a, y = 0 \quad (11.61)$$

που επιβάλλουν κατακόρυφη επαπτομένη στο μέσο της πακτωμένης διατομής (Σχήμα 11.3(β)). Οι (11.61), εξ αιτίας των (11.54) και (11.55),

δίνουν

$$A = 0 \quad (11.62)$$

$$B = -\frac{Fa^3}{2Eb^3} \left( 1 + 3(1 + \nu) \frac{b^2}{a^2} \right) \quad (11.63)$$

$$C = \frac{3Fa^2}{4Eb^3} \left( 1 + 2(1 + \nu) \frac{b^2}{a^2} \right) \quad (11.64)$$

Μια κατάσταση πιο κοντά στην πραγματική θα πάρουμε (Σχήμα 11.3(γ)), χρησιμοποιώντας τις παρακάτω ασθενείς συνοριακές συνθήκες

$$\left. \begin{aligned} \int_{-b}^b u_x dy &= 0 \\ \int_{-b}^b u_y dy &= 0 \\ \int_{-b}^b y u_x dy &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ για } x = a \quad (11.65)$$

που μπορούν να θεωρηθούν αντίστοιχες με τις συνοριακές συνθήκες τάσεων (11.41) - (11.43). Οι (11.65) εξ αιτίας των (11.54) και (11.55) δίνουν

$$A = 0 \quad (11.66)$$

$$B = -\frac{Fa^3}{2Eb^3} \left( 1 + \frac{(12 + 11\nu) b^2}{5 a^2} \right) \quad (11.67)$$

$$C = \frac{3Fa^2}{4Eb^3} \left( 1 + \frac{(8 + 9\nu) b^2}{5 a^2} \right) \quad (11.68)$$

Για την κατακόρυφη μετατόπιση  $u_y$ , στο μέσο της διατομής στο ελεύθερο άκρο, δηλαδή στο σημείο με συντεταγμένες  $x = 0$  και  $y = 0$ , έχουμε από την (11.55) ότι

$$u_y(0, 0) = B \quad (11.69)$$

και για κάθε μια από τις συνθήκες στήριξης (11.57), (11.61) και (11.65), εξ αιτίας των (11.59), (11.63) και (11.67), παίρνουμε από την (11.69)

$$u_y(0, 0) = \begin{cases} -\frac{Fa^3}{2Eb^3} \\ -\frac{Fa^3}{2Eb^3} \left( 1 + 3(1 + \nu) \frac{b^2}{a^2} \right) \\ -\frac{Fa^3}{2Eb^3} \left( 1 + \frac{(12 + 11\nu) b^2}{5 a^2} \right) \end{cases} \quad (11.70)$$

Η πρώτη των (11.70) αντιστοιχεί στη λύση της Αντοχής Υλικών, η δεύτερη των (11.70) περιλαμβάνει και τη διόρθωση εξ αιτίας της διάτμησης ενώ η τρίτη των (11.70), έχει μέγεθος ανάμεσα στην πρώτη και στη δεύτερη και προσεγγίζει καλύτερα από τις άλλες δύο, την τιμή του βέλους κάμψης εξ αιτίας των πραγματικών συνοριακών συνθηκών (11.56) της πάκτωσης.

Στο δεξί μέλος των τριών εξισώσεων της (11.70) περιλαμβάνεται ο ίδιος κυρίαρχος παράγοντας  $\frac{Fa^3}{2Eb^3}$ . Οι διορθωτικοί παράγοντες μέσα στις παρενθέσεις στη δεύτερη και στην τρίτη από τις εξισώσεις (11.70), τείνουν στη μονάδα όταν  $b \ll a$ , δηλαδή παίρνουμε τη λύση της Τεχνικής Θεωρίας Κάμψης για δοκούς με μεγάλο μήκος.

## 11.4 Άσκησης

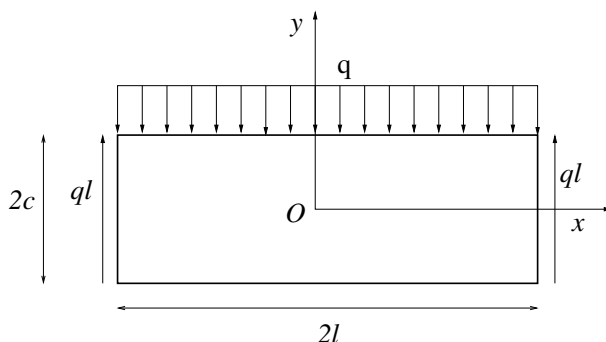
### 11.4.1 Άσκηση

Η αμφιέριστη δοκός του Σχήματος 11.5 δέχεται ομοιόμορφο κατανεμημένο φορτίο  $q$ , στο άνω μέρος της. Για το πρόβλημα αυτό δίνεται η τασική συνάρτηση

$$\Phi(x, y) = Ax^2 + Bx^2y + Cy^3 + Dx^2y^3 - \frac{D}{5}y^5 \quad (11.71)$$

όπου τα  $A$ ,  $B$ ,  $C$  και  $D$  είναι άγνωστες σταθερές.

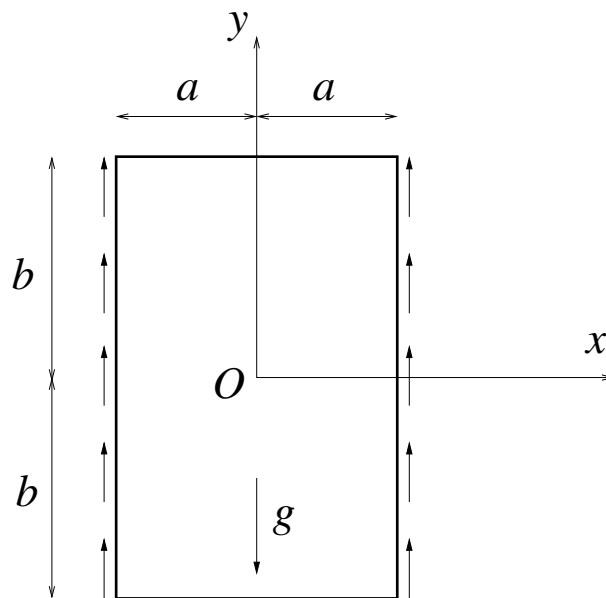
1. Να γραφούν οι ισχυρές συνοριακές συνθήκες τάσεων στην άνω και στην κάτω έδρα της δοκού.
2. Να γραφούν οι ασθενείς συνοριακές συνθήκες στη δεξιά και στην αριστερή έδρα της δοκού.
3. Να βρεθεί η κατανομή των τάσεων στη δοκό.



Σχήμα 11.5: Αμφιέριστη δοκός με ομοιόμορφο κατανεμημένο φορτίο.

**11.4.2 Άσκηση**

Μια μακρόστενη ορθογώνια πλάκα, καταλαμβάνει την περιοχή  $-a < x < a$  και  $-b < y < b$ . Η πλάκα στηρίζεται στις κατακόρυφες έδρες της  $x = \pm a$  και φορτίζεται με το ίδιο βάρος της. Η πυκνότητα μάζας του υλικού της πλάκας είναι  $\rho$  και η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι  $g$ . Να βρεθούν οι τάσεις στην πλάκα, χρησιμοποιώντας ασθενείς συνοριακές συνθήκες στις έδρες  $y = \pm b$  και ισχυρές συνοριακές συνθήκες στις στηρίξεις  $x = \pm a$ , όπου οι διατμητικές τάσεις θεωρούνται ομοιόμορφες.



Σχήμα 11.6: Πλάκα στηριγμένη ανάμεσα σε δύο κατακόρυφους τοίχους.

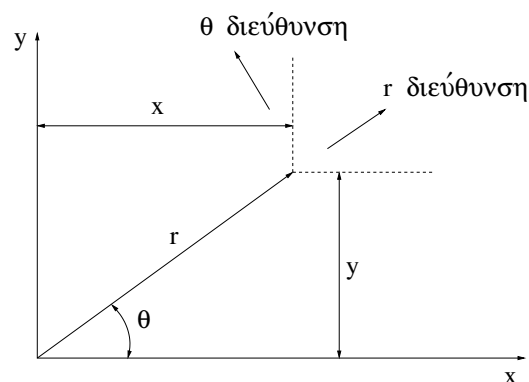


## Κεφάλαιο 12

# Προβλήματα σε πολικές συντεταγμένες

### 12.1 Διέπουσες εξισώσεις

Σε προβλήματα με σώματα σχήματος κυλινδρικού ή κυκλικού, χρησιμοποιούμε συνήθως τις κυλινδρικές συντεταγμένες  $r$ ,  $\theta$ , και  $z$ . Σε προβλήματα επίπεδης έντασης ή επίπεδης παραμόρφωσης, οι διατμητικές τάσεις σε οποιοδήποτε επίπεδο κάθετο στον άξονα  $z$ , είναι μηδενικές. Επίσης, οι μη μηδενιζόμενες εξαρτημένες μεταβλητές, είναι ανεξάρτητες του  $z$  και έτσι οι κυλινδρικές συντεταγμένες  $r$ ,  $\theta$  και  $z$  ανάγονται στις πολικές συντεταγμένες  $r$  και  $\theta$ . Έστω το καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων  $x$  και  $y$  και το αντίστοιχο σύστημα πολικών συντεταγμένων  $r$  και  $\theta$  (Σχήμα 12.1). Τα δύο συστήματα έχουν την ίδια αρχή. Με-



Σχήμα 12.1: Καρτεσιανό και πολικό σύστημα συντεταγμένων.

ταξύ των συντεταγμένων στα δύο συστήματα, ισχύουν οι παρακάτω

σχέσεις μετασχηματισμού

$$x = r \cos \theta \quad (12.1)$$

$$y = r \sin \theta \quad (12.2)$$

$$(12.3)$$

και οι αντίστροφές τους σχέσεις

$$\theta = \tan^{-1} \frac{y}{x} \quad (12.4)$$

$$r^2 = x^2 + y^2 \quad (12.5)$$

Από τις (12.1) - (12.5) παίρνουμε τις σχέσεις

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} = \cos \theta \quad (12.6)$$

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r} = \sin \theta \quad (12.7)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{y}{r^2} = -\frac{\sin \theta}{r} \quad (12.8)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{x}{r^2} = \frac{\cos \theta}{r} \quad (12.9)$$

και από τις τελευταίες προκύπτουν οι

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \theta} = \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \quad (12.10)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \theta} = \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \quad (12.11)$$

Έστω  $\sigma_{rr}$ ,  $\sigma_{r\theta}$  και  $\sigma_{\theta\theta}$  οι συνιστώσες της τάσης κατά την ακτινική και κατά την εφαπτομενική διεύθυνση. Από τους τύπους μετασχηματισμού (1.15) - (1.17) έχουμε

$$\sigma_{xx} = \sigma_{rr} \cos^2 \theta + \sigma_{\theta\theta} \sin^2 \theta - \sigma_{r\theta} \sin 2\theta \quad (12.12)$$

$$\sigma_{yy} = \sigma_{rr} \sin^2 \theta + \sigma_{\theta\theta} \cos^2 \theta + \sigma_{r\theta} \sin 2\theta \quad (12.13)$$

$$\sigma_{xy} = (\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) \sin \theta \cos \theta + \sigma_{r\theta} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \quad (12.14)$$

Όμοιες σχέσεις με τις (12.12) - (12.14), ισχύουν και για τις παραμορφώσεις  $\epsilon_{rr}$ ,  $\epsilon_{\theta\theta}$  και  $\gamma_{r\theta}$ . Θέτοντας τις (12.12) - (12.14) στην εξίσωση ισορροπίας κατά  $x$  (10.5) θεωρώντας μηδενικές μαζικές δυνάμεις και μετασχηματίζοντας τις παραγώγους σύμφωνα με τις (12.10) και (12.11), παίρνουμε

$$\left( \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} \right) \cos \theta - \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + 2 \frac{\sigma_{r\theta}}{r} \right) \sin \theta = 0 \quad (12.15)$$



Η (12.15) πρέπει να ισχύει για κάθε τιμή του  $\theta$ , επομένως πρέπει

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = 0 \quad \text{για } \theta = 0 \quad (12.16)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + 2 \frac{\sigma_{r\theta}}{r} = 0 \quad \text{για } \theta = \frac{\pi}{2} \quad (12.17)$$

Αλλά η επιλογή του άξονα  $x$  είναι αυθαίρετη, επομένως οι (12.16) και (12.17) πρέπει να ισχύουν για κάθε  $\theta$ . Η (12.16) είναι η εξίσωση ισοροπίας κατά την ακτινική διεύθυνση και η (12.17) είναι η εξίσωση ισοροπίας κατά την εφαπτομενική διεύθυνση.

Με παρόμοια διαδικασία δείχνουμε ότι οι σχέσεις παραμορφώσεων - μετατοπίσεων (10.11) - (10.13), δίνουν τις παρακάτω σχέσεις

$$\epsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r} \quad (12.18)$$

$$\epsilon_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \quad (12.19)$$

$$\gamma_{r\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \quad (12.20)$$

όπου  $u_r$  και  $u_\theta$  είναι αντίστοιχα η ακτινική και η εφαπτομενική συνιστώσα της μετατόπισης. Απαλείφοντας τις  $u_r$  και  $u_\theta$  από τις (12.18) - (12.20), παίρνουμε την εξίσωση συμβιβαστού

$$\frac{\partial^2 \epsilon_{\theta\theta}}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \epsilon_{rr}}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r} \frac{\epsilon_{\theta\theta}}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \epsilon_{rr}}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \gamma_{r\theta}}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \gamma_{r\theta}}{\partial \theta} \quad (12.21)$$

Επειδή το πολικό σύστημα συντεταγμένων είναι ορθογώνιο, ο νόμος του Hooke για ισότροπα υλικά, προκύπτει από τις σχέσεις (9.26) - (9.28) για επίπεδη παραμόρφωση και (10.7) - (10.9) για επίπεδη ένταση, αντικαθιστώντας το  $x$  με το  $r$  και το  $y$  με το  $\theta$  αντίστοιχα. Έτσι για επίπεδη παραμόρφωση έχουμε

$$\epsilon_{rr} = \frac{1 - \nu^2}{E} \left[ \sigma_{rr} - \left( \frac{\nu}{1 - \nu} \right) \sigma_{\theta\theta} \right] \quad (12.22)$$

$$\epsilon_{\theta\theta} = \frac{1 - \nu^2}{E} \left[ \sigma_{\theta\theta} - \left( \frac{\nu}{1 - \nu} \right) \sigma_{rr} \right] \quad (12.23)$$

$$\gamma_{r\theta} = \frac{1}{G} \sigma_{r\theta} \quad (12.24)$$

ή

$$\sigma_{rr} = 2G\epsilon_{rr} + \lambda(\epsilon_{rr} + \epsilon_{\theta\theta}) \quad (12.25)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = 2G\epsilon_{\theta\theta} + \lambda(\epsilon_{rr} + \epsilon_{\theta\theta}) \quad (12.26)$$

$$\sigma_{r\theta} = G\gamma_{r\theta} \quad (12.27)$$

και για επίπεδη ένταση έχουμε

$$\epsilon_{rr} = \frac{1}{E}(\sigma_{rr} - \nu\sigma_{\theta\theta}) \quad (12.28)$$

$$\epsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{E}(\sigma_{\theta\theta} - \nu\sigma_{rr}) \quad (12.29)$$

$$\gamma_{r\theta} = \frac{1}{G}\sigma_{r\theta} \quad (12.30)$$

ή

$$\sigma_{rr} = \frac{E}{1-\nu^2}(\epsilon_{rr} + \nu\epsilon_{\theta\theta}) \quad (12.31)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{E}{1-\nu^2}(\epsilon_{\theta\theta} + \nu\epsilon_{rr}) \quad (12.32)$$

$$\sigma_{r\theta} = G\gamma_{r\theta} \quad (12.33)$$

Η ανηγμένη διόγκωση για επίπεδη παραμόρφωση, εξ αιτίας των (12.18) - (12.20), είναι

$$\epsilon = \epsilon_{rr} + \epsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial(ru_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \quad (12.34)$$

και οι εξισώσεις ισορροπίας, ως συναρτήσεις των μετατοπίσεων είναι, για επίπεδη παραμόρφωση

$$(\lambda + 2G) \frac{\partial \epsilon}{\partial r} - \frac{2G}{r} \frac{\partial \omega}{\partial \theta} + F_r = 0 \quad (12.35)$$

$$(\lambda + 2G) \frac{1}{r} \frac{\partial \epsilon}{\partial \theta} + 2G \frac{\partial \omega}{\partial r} + F_\theta = 0 \quad (12.36)$$

όπου

$$\omega = \frac{1}{2r} \left[ \frac{\partial(ru_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right] \quad (12.37)$$

είναι η στροφή γύρω από τον άξονα  $z$ .

Η διαρμονική εξίσωση, δηλαδή η εξίσωση συμβιβαστού χωρίς μαζικές δυνάμεις, είναι

$$\nabla^4 \phi = \nabla^2 \nabla^2 \phi = \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \phi = 0 \quad (12.38)$$

και οι τάσεις εκφρασμένες με χρήση της τασικής συνάρτησης  $\phi$  είναι

$$\sigma_{rr} = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} \quad (12.39)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} \quad (12.40)$$

$$\sigma_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) \quad (12.41)$$

Οι (12.37) - (12.41) ισχύουν και για επίπεδη ένταση και για επίπεδη παραμόρφωση.

## 12.2 Αξονοσυμμετρικά προβλήματα στο επίπεδο

Είναι τα προβλήματα όπου η γεωμετρία του σώματος, αλλά και οι εφαρμοζόμενες σ' αυτό εξωτερικές δυνάμεις και μετατοπίσεις, είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα των  $z$ . Θα επικεντρώσουμε το ενδιαφέρον μας σε προβλήματα όπου οι τάσεις και οι μετατοπίσεις είναι ανεξάρτητες από το τη συντεταγμένη  $\theta$ . Εάν και η τασική συνάρτηση  $\phi$  είναι ανεξάρτητη από το  $\theta$ , τότε η διαρμονική εξίσωση (12.38), ανάγεται στη συνήθη διαφορική εξίσωση

$$\left( \frac{d^4}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r^3} \frac{d}{dr} \right) \phi = 0 \quad (12.42)$$

Με χρήση του μετασχηματισμού

$$r = e^\xi \quad (12.43)$$

η (12.42) παίρνει τη μορφή

$$\left( \frac{d^4}{d\xi^4} - 4 \frac{d^3}{d\xi^3} + 4 \frac{d^2}{d\xi^2} \right) \phi = 0 \quad (12.44)$$

που είναι συνήθης διαφορική εξίσωση με σταθερούς συντελεστές και έχει λύση τη

$$\phi = A\xi e^{2\xi} + B e^{2\xi} + C\xi + D \quad (12.45)$$

ή ισοδύναμα τη

$$\phi = Ar^2 \ln r + Br^2 + C \ln r + D \quad (12.46)$$

όπου τα  $A$ ,  $B$ ,  $C$  και  $D$  είναι αυθαίρετες σταθερές. Εξ αιτίας της (12.46), οι (12.39) - (12.41) δίνουν

$$\sigma_{rr} = \frac{1}{r} \frac{d\phi}{dr} = 2A \ln r + \frac{C}{r^2} + A + 2B \quad (12.47)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{d^2\phi}{dr^2} = 2A \ln r - \frac{C}{r^2} + 3A + 2B \quad (12.48)$$

$$\sigma_{r\theta} = 0 \quad (12.49)$$

Αν η περιοχή που εξετάζουμε είναι απλά συνεκτική (π. χ. συμπαγής κυκλικός κύλινδρος), πρέπει να ισχύει ότι

$$A = C = 0 \quad (12.50)$$

έτσι ώστε να έχουμε πεπερασμένες τάσεις (όχι ιδιόμορφες) στην αρχή  $r = 0$ . Έτσι

$$\sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta} = 2B \quad (12.51)$$

$$\sigma_{r\theta} = 0 \quad (12.52)$$

που λύνει το πρόβλημα για συμπαγή κύλινδρο στον οποίο αναπτύσσεται σταθερή ορθή τάση ίση με  $2B$ .

Σε περίπτωση πολλαπλά συνεκτικής περιοχής (π. χ. κυκλικός δακτύλιος με ομόκεντρη οπή), οι εξισώσεις συμβιβαστού δεν είναι αρκετές για να εγγωηθούν την ύπαρξη μονότιμων μετατοπίσεων. Πρέπει επομένως να εξετασθούν οι μετατοπίσεις απευθείας στο πρόβλημα. Από τις (12.18) - (12.20) παίρνουμε

$$\epsilon_{rr} = \frac{du_r}{dr} \quad (12.53)$$

$$\epsilon_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r} \quad (12.54)$$

Οι (12.53) και (12.54), εξ αιτίας των (12.22), (12.23) και (12.28), (12.29) και λαμβάνοντας υπ' όψη τις (12.47) - (12.49), τελικά δίνουν

$$\frac{du_r}{dr} = K_1 \left[ 2A \ln r + \frac{C}{r^2} + A + 2B - K_2 \left( 2A \ln r - \frac{C}{r^2} + 3A + 2B \right) \right] \quad (12.55)$$

$$\frac{u_r}{r} = K_1 \left[ 2A \ln r - \frac{C}{r^2} + 3A + 2B - K_2 \left( 2A \ln r + \frac{C}{r^2} + A + 2B \right) \right] \quad (12.56)$$

όπου

$$K_1 = \frac{1}{E} \quad (12.57)$$

$$K_2 = \nu \quad (12.58)$$

για επίπεδη ένταση και

$$K_1 = \frac{1 - \nu^2}{E} \quad (12.59)$$

$$K_2 = \frac{\nu}{1 - \nu} \quad (12.60)$$

για επίπεδη παραμόρφωση.

Ολοκληρώνοντας την (12.55) παίρνουμε

$$u_r = K_1 \left[ 2Ar \ln r - Ar + 2Br - \frac{C}{r} - K_2 \left( 2Ar \ln r + Ar + 2Br + \frac{C}{r} \right) + F \right] \quad (12.61)$$

όπου η  $F$  είναι σταθερά ολοκλήρωσης. Εξισώνοντας τις εκφράσεις για την  $u_r$ , από την (12.56) και από την (12.61), παίρνουμε τελικά τη σχέση

$$4Ar - F = 0 \quad (12.62)$$

Η (12.62) πρέπει να ισχύει για κάθε  $r$  και έτσι προκύπτει ότι

$$A = F = 0 \quad (12.63)$$

Οι σταθερές  $B$  και  $C$  υπολογίζονται από τις συνοριακές συνθήκες.

Η (12.61), εξ αιτίας της (12.63), τελικά γράφεται ως

$$u_r(r) = C_1 r + C_2 \frac{1}{r} \quad (12.64)$$

όπου

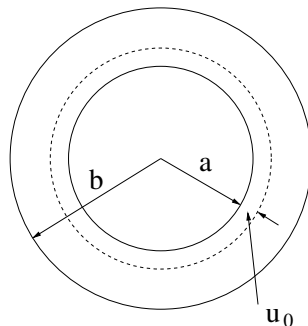
$$C_1 = 2K_1 B(1 - K_2) \quad (12.65)$$

$$C_2 = -K_1 C(1 + K_2) \quad (12.66)$$

είναι αυθαίρετες σταθερές.

### 12.2.1 Παράδειγμα

Κοίλος κυκλικός κύλινδρος, εσωτερικής ακτίνας  $r = a$  και εξωτερικής ακτίνας  $r = b$  (Σχήμα 12.2), υπόκειται στις παρακάτω συνοριακές συνθήκες.



Σχήμα 12.2: Κοίλος κυκλικός κύλινδρος υπό σταθερή εσωτερική ακτινική μετατόπιση.

$$u_r|_{r=a} = u_0 \quad (12.67)$$

$$u_r|_{r=b} = 0 \quad (12.68)$$

Να βρεθούν οι μετατοπίσεις και οι τάσεις στον κύλινδρο.

Από τις δεδομένες συνοριακές συνθήκες (12.67) και (12.68), έχουμε

$$u_r(a) = u_0 \quad (12.69)$$

$$u_r(b) = 0 \quad (12.70)$$

Εξ αιτίας της (12.64), το σύστημα των (12.67) και (12.68) δίνει

$$C_1 = \frac{a}{a^2 - b^2} u_0 \quad (12.71)$$

$$C_2 = \frac{-ab^2}{a^2 - b^2} u_0 \quad (12.72)$$

Από τις (12.71) και (12.72), η (12.64) δίνει

$$u_r(r) = \frac{au_0}{a^2 - b^2} \left[ r - \frac{b^2}{r} \right] \quad (12.73)$$

Οι τάσεις μετά μπορούν να βρεθούν χρησιμοποιώντας τις (12.53) και (12.54), στις (12.25) - (12.27) για επίπεδη παραμόρφωση ή στις (12.31) - (12.33) για επίπεδη ένταση.

### 12.3 Η λύση Michell

Η γενική λύση για προβλήματα της ελαστικότητας στο επίπεδο, σε πολικές συντεταγμένες, δίνεται υπό μορφή αναπτύγματος σειράς Fourier ως προς τη γωνία  $\theta$ , από τη σχέση

$$\begin{aligned} \phi = & A_{01}r^2 + A_{02}r^2 \ln r + A_{03} \ln r + A_{04}\theta + \\ & (A_{11}r^3 + A_{12}r \ln r + A_{14}r^{-1}) \cos \theta + A_{13}r\theta \sin \theta + \\ & (B_{11}r^3 + B_{12}r \ln r + B_{14}r^{-1}) \sin \theta + B_{13}r\theta \cos \theta + \\ & \sum_{n=2}^{\infty} (A_{n1}r^{n+2} + A_{n2}r^{-n+2} + A_{n3}r^n + A_{n4}r^{-n}) \cos n\theta + \\ & \sum_{n=2}^{\infty} (B_{n1}r^{n+2} + B_{n2}r^{-n+2} + B_{n3}r^n + B_{n4}r^{-n}) \sin n\theta \end{aligned} \quad (12.74)$$

Οι αντίστοιχες τάσεις προκύπτουν με αντικατάσταση της (12.74) στις (12.39) - (12.41). Για διευκόλυνση, οι τάσεις που αντιστοιχούν σε επί μέρους όρους της (12.74), περιέχονται στον Πίνακα (12.1). Οι αντίστοιχες μετατοπίσεις περιέχονται στον Πίνακα (12.2). Στον Πίνακα (12.2) ισχύει ότι

$$\kappa = 3 - 4\nu \quad (12.75)$$

για επίπεδη παραμόρφωση και

$$\kappa = \frac{3 - \nu}{1 + \nu} \quad (12.76)$$

για επίπεδη ένταση. Επίσης  $\mu$  είναι το μέτρο διάτμησης.

$\phi$	$\sigma_{rr}$	$\sigma_{r\theta}$	$\sigma_{\theta\theta}$
$r^2$	2	0	2
$r^2 \ln r$	$2 \ln r + 1$	0	$2 \ln r + 3$
$\ln r$	$\frac{1}{r^2}$	0	$-\frac{1}{r^2}$
$\theta$	0	$\frac{1}{r^2}$	0
$r^3 \cos \theta$	$2r \cos \theta$	$2r \sin \theta$	$6r \cos \theta$
$r\theta \sin \theta$	$\frac{2 \cos \theta}{r}$	0	0
$r \ln r \cos \theta$	$\frac{\cos \theta}{r}$	$\frac{\sin \theta}{r}$	$\frac{\cos \theta}{r}$
$\frac{\cos \theta}{r}$	$-\frac{2 \cos \theta}{r^3}$	$-\frac{2 \sin \theta}{r^3}$	$\frac{2 \cos \theta}{r^3}$
$r^3 \sin \theta$	$2r \sin \theta$	$-2r \cos \theta$	$6r \sin \theta$
$r\theta \cos \theta$	$-2 \frac{\sin \theta}{r}$	0	0
$r \ln r \sin \theta$	$\frac{\sin \theta}{r}$	$-\frac{\cos \theta}{r}$	$\frac{\sin \theta}{r}$
$\frac{\sin \theta}{r}$	$-2 \frac{\sin \theta}{r^3}$	$\frac{2 \cos \theta}{r^3}$	$2 \frac{\sin \theta}{r^3}$
$r^{n+2} \cos n\theta$	$-(n+1)(n-2)r^n \cos n\theta$	$n(n+1)r^n \sin n\theta$	$(n+1)(n+2)r^n \cos n\theta$
$r^{-n+2} \cos n\theta$	$-(n+2)(n-1)r^{-n} \cos n\theta$	$-n(n-1)r^{-n} \sin n\theta$	$(n-1)(n-2)r^{-n} \cos n\theta$
$r^n \cos n\theta$	$-n(n-1)r^{n-2} \cos n\theta$	$n(n-1)r^{n-2} \sin n\theta$	$n(n-1)r^{n-2} \cos n\theta$
$r^{-n} \cos n\theta$	$-n(n+1)r^{-n-2} \cos n\theta$	$-n(n+1)r^{-n-2} \sin n\theta$	$n(n+1)r^{-n-2} \cos n\theta$
$r^{n+2} \sin n\theta$	$-(n+1)(n-2)r^n \sin n\theta$	$-n(n+1)r^n \cos n\theta$	$(n+1)(n+2)r^n \sin n\theta$
$r^{-n+2} \sin n\theta$	$-(n+2)(n-1)r^{-n} \sin n\theta$	$n(n-1)r^{-n} \cos n\theta$	$(n-1)(n-2)r^{-n} \sin n\theta$
$r^n \sin n\theta$	$-n(n-1)r^{n-2} \sin n\theta$	$-n(n-1)r^{n-2} \cos n\theta$	$n(n-1)r^{n-2} \sin n\theta$
$r^{-n} \sin n\theta$	$-n(n+1)r^{-n-2} \sin n\theta$	$n(n+1)r^{-n-2} \cos n\theta$	$n(n+1)r^{-n-2} \sin n\theta$

Πίνακας 12.1: Οι τάσεις για διάφορους όρους της λύσης Michell

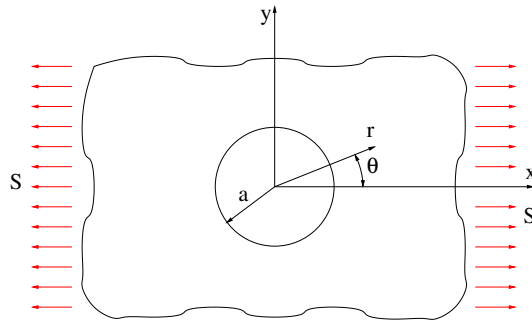
$\phi$	$2\mu u_r$	$2\mu u_\theta$
$r^2$	$(\kappa - 1)r$	0
$r^2 \ln r$	$(\kappa - 1)r \ln r - r$	$(\kappa + 1)r\theta$
$\ln r$	$-\frac{1}{r}$	0
$\theta$	0	$-\frac{1}{r}$
$r^3 \cos \theta$	$(\kappa - 2)r^2 \cos \theta$	$(\kappa + 2)r^2 \sin \theta$
$r\theta \sin \theta$	$\frac{1}{2}[(\kappa - 1)\theta \sin \theta - \cos \theta + (\kappa + 1) \ln r \cos \theta]$	$\frac{1}{2}[(\kappa - 1)\theta \cos \theta - \sin \theta - (\kappa + 1) \ln r \sin \theta]$
$r \ln r \cos \theta$	$\frac{1}{2}[(\kappa + 1)\theta \sin \theta - \cos \theta + (\kappa - 1) \ln r \cos \theta]$	$\frac{1}{2}[(\kappa + 1)\theta \cos \theta - \sin \theta - (\kappa - 1) \ln r \sin \theta]$
$\frac{\cos \theta}{r}$	$\frac{\cos \theta}{r^2}$	$\frac{\sin \theta}{r^2}$
$r^3 \sin \theta$	$(\kappa - 2)r^2 \sin \theta$	$-(\kappa + 2)r^2 \cos \theta$
$r\theta \cos \theta$	$\frac{1}{2}[(\kappa - 1)\theta \cos \theta + \sin \theta - (\kappa + 1) \ln r \sin \theta]$	$\frac{1}{2}[-(\kappa - 1)\theta \sin \theta - \cos \theta - (\kappa + 1) \ln r \cos \theta]$
$r \ln r \sin \theta$	$\frac{1}{2}[-(\kappa + 1)\theta \cos \theta - \sin \theta + (\kappa - 1) \ln r \sin \theta]$	$\frac{1}{2}[(\kappa + 1)\theta \sin \theta + \cos \theta + (\kappa - 1) \ln r \cos \theta]$
$\frac{\sin \theta}{r}$	$\frac{\sin \theta}{r^2}$	$-\frac{\cos \theta}{r^2}$
$r^{n+2} \cos n\theta$	$(\kappa - n - 1)r^{n+1} \cos n\theta$	$(\kappa + n + 1)r^{n+1} \sin n\theta$
$r^{-n+2} \cos n\theta$	$(\kappa + n - 1)r^{-n+1} \cos n\theta$	$-(\kappa - n + 1)r^{-n+1} \sin n\theta$
$r^n \cos n\theta$	$-nr^{n-1} \cos n\theta$	$nr^{n-1} \sin n\theta$
$r^{-n} \cos n\theta$	$nr^{-n-1} \cos n\theta$	$nr^{-n-1} \sin n\theta$
$r^{n+2} \sin n\theta$	$(\kappa - n - 1)r^{n+1} \sin n\theta$	$-(\kappa + n + 1)r^{n+1} \cos n\theta$
$r^{-n+2} \sin n\theta$	$(\kappa + n - 1)r^{-n+1} \sin n\theta$	$(\kappa - n + 1)r^{-n+1} \cos n\theta$
$r^n \sin n\theta$	$-nr^{n-1} \sin n\theta$	$-nr^{n-1} \cos n\theta$
$r^{-n} \sin n\theta$	$nr^{-n-1} \sin n\theta$	$-nr^{-n-1} \cos n\theta$

Πίνακας 12.2: Οι μετατοπίσεις για διάφορους όρους της λύσης Michell



### 12.3.1 Παράδειγμα: Εφελκυσμός πλάκας με οπή

Να βρεθεί η κατανομή των τάσεων σε επίπεδη πλάκα, άπειρων διαστάσεων, που υπόκειται σε εφελκυστική τάση  $S$  στο άπειρο και περιέχει κυκλική οπή με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα  $r = a$  (Σχήμα 12.3).



Σχήμα 12.3: Εφελκυσμένη πλάκα άπειρων διαστάσεων με οπή.

Οι συνοριακές συνθήκες του προβλήματος είναι

$$\sigma_{rr} = 0 \quad \text{για} \quad r = a \quad (12.77)$$

$$\sigma_{r\theta} = 0 \quad \text{για} \quad r = a \quad (12.78)$$

$$\sigma_{xy} = 0 \quad \text{για} \quad r \rightarrow \infty \quad (12.79)$$

$$\sigma_{yy} = 0 \quad \text{για} \quad r \rightarrow \infty \quad (12.80)$$

$$\sigma_{xx} = S \quad \text{για} \quad r \rightarrow \infty \quad (12.81)$$

Αν δεν υπήρχε η οπή, το πρόβλημα θα μπορούσε να περιγραφεί από την τασική συνάρτηση

$$\phi = \frac{Sy^2}{2} = \frac{Sr^2 \sin^2 \theta}{2} = \frac{Sr^2}{4} - \frac{Sr^2 \cos 2\theta}{4} \quad (12.82)$$

διότι οι τάσεις

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = S \quad (12.83)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 0 \quad (12.84)$$

$$\sigma_{xy} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = 0 \quad (12.85)$$

ικανοποιούν τις συνοριακές συνθήκες για την εφελκυσμένη πλάκα χωρίς οπή.

Το άνοιγμα της οπής θα παραγάγει ένα επί πλέον τασικό πεδίο που θα μηδενίσει την ορθή και τη διατμητική τάση πάνω στην περιφέρεια

$r = a$ , αλλά και θα δίνει μηδενικές τάσεις για  $r \rightarrow \infty$ , διότι μακριά από την αρχή των αξόνων, η οπή δεν επηρεάζει το ομοιόμορφο τασικό πεδίο που περιγράφεται από τις σχέσεις (12.83) - (12.85). Παίρνοντας λοιπόν υπ' όψη τη (12.82), προσθέτουμε όρους στο δεξί μέλος της, που περιέχουν το  $\cos 2\theta$  ή είναι ανεξάρτητοι του  $\theta$  (αξονοσυμμετρικοί) και δίνουν μηδενικές τάσεις για  $r \rightarrow \infty$ . Επιλέγουμε λοιπόν τη συνάρτηση

$$\phi = \frac{Sr^2}{4} - \frac{Sr^2 \cos 2\theta}{4} + A \ln r + B\theta + C \cos 2\theta + Dr^{-2} \cos 2\theta \quad (12.86)$$

όπου τα  $A, B, C$  και  $D$  είναι άγνωστες σταθερές. Οι τάσεις που προκύπτουν από τη (12.86), εξ αιτίας των (12.39) - (12.41), είναι

$$\sigma_{rr} = \frac{S}{2} + \frac{S \cos 2\theta}{2} + \frac{A}{r^2} - \frac{4C \cos 2\theta}{r^2} - \frac{6D \cos 2\theta}{r^4} \quad (12.87)$$

$$\sigma_{r\theta} = -\frac{S \sin 2\theta}{2} + \frac{B}{r^2} - \frac{2C \sin 2\theta}{r^2} - \frac{6D \sin 2\theta}{r^4} \quad (12.88)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{S}{2} - \frac{S \cos 2\theta}{2} - \frac{A}{r^2} + \frac{6D \cos 2\theta}{r^4} \quad (12.89)$$

Οι συνοριακές συνθήκες (12.77) και (12.78) πρέπει να ικανοποιούνται  $\forall \theta$  στην περιφέρεια  $r = a$  της οπής. Έτσι οι (12.87) και (12.88) δίνουν τις εξισώσεις

$$\frac{S}{2} + \frac{A}{a^2} = 0 \quad (12.90)$$

$$\frac{B}{a^2} = 0 \quad (12.91)$$

$$\frac{S}{2} - \frac{4C}{a^2} - \frac{6D}{a^4} = 0 \quad (12.92)$$

$$-\frac{S}{2} - \frac{2C}{a^2} - \frac{6D}{a^4} = 0 \quad (12.93)$$

που έχουν ως λύση την

$$A = -\frac{Sa^2}{2} \quad (12.94)$$

$$B = 0 \quad (12.95)$$

$$C = \frac{Sa^2}{2} \quad (12.96)$$

$$D = -\frac{Sa^4}{4} \quad (12.97)$$

Οι (12.87) - (12.89), εξ αιτίας των (12.94) - (12.97), δίνουν την κατανομή

των τάσεων στην πλάκα με οπή ως

$$\sigma_{rr} = \frac{S}{2} \left( 1 - \frac{a^2}{r^2} \right) + \frac{S \cos 2\theta}{2} \left( \frac{3a^4}{r^4} - \frac{4a^2}{r^2} + 1 \right) \quad (12.98)$$

$$\sigma_{r\theta} = \frac{S \sin 2\theta}{2} \left( \frac{3a^4}{r^4} - \frac{2a^2}{r^2} - 1 \right) \quad (12.99)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{S}{2} \left( 1 + \frac{a^2}{r^2} \right) - \frac{S \cos 2\theta}{2} \left( \frac{3a^4}{r^4} + 1 \right) \quad (12.100)$$

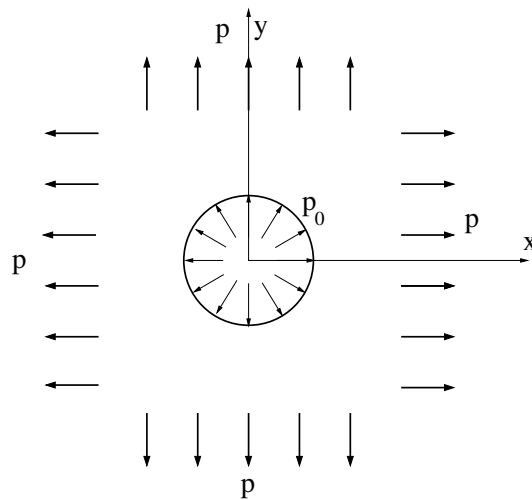
Η μέγιστη ορθή τάση αναπτύσσεται στην περιφέρεια της οπής και είναι ίση με

$$\sigma_{\theta\theta} = 3S \quad \text{για} \quad r = a, \quad \theta = \frac{\pi}{2} \quad (12.101)$$

Επομένως ο συντελεστής συγκέντρωσης τάσεων για το πρόβλημα αυτό είναι ίσος με 3, διότι η μέγιστη ορθή τάση στην πλάκα με οπή είναι τριπλάσια από τη μέγιστη ορθή τάση στην πλάκα χωρίς οπή.

## 12.4 Άσκηση

Επίπεδο σώμα άπειρων διαστάσεων, φέρει οπή ακτίνας  $r = a$ , με κέντρο την αρχή των αξόνων. Η οπή φορτίζεται εσωτερικά με ομοιόμορφη πίεση  $p_0$ , ενώ στο άπειρο εφαρμόζονται ορθές τάσεις  $\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = p$  (Σχήμα 12.4). Να βρεθεί η κατανομή των τάσεων στο σώμα.



Σχήμα 12.4: Πλάκα με οπή, υπό εσωτερική πίεση και διαξονική ένταση στο άπειρο.



## Κεφάλαιο 13

# Στρέψη δοκού τυχαίας διατομής

### 13.1 Γενική λύση του προβλήματος

Η ακριβής λύση του προβλήματος βρέθηκε από τον Saint-Venant. Με οδηγό τις παραμορφώσεις που αναπτύσσονται σε μια άτρακτο κυκλικής διατομής που υποβάλλεται σε στρέψη, ο Saint-Venant έκανε τις παρακάτω παραδοχές για τις μετατοπίσεις σε μια δοκό τυχαίας διατομής που υποβάλλεται σε στρέψη:

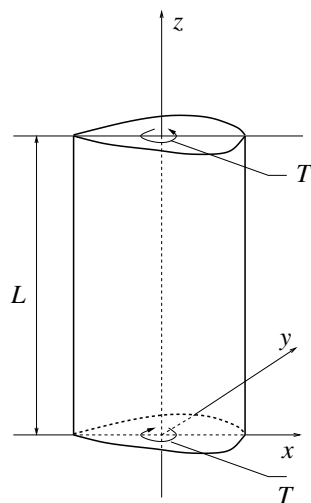
1. Η προβολή κάθε παραμορφωμένης διατομής πάνω στο επίπεδο  $xy$  (Σχήμα 13.1) στρέφεται σαν στερεό σώμα και η συστροφή (γωνία στροφής ανά μονάδα υψους  $z$ ) είναι σταθερή.
2. Κάθε σημείο της δοκού μετατοπίζεται κατά τη διαμήκη διεύθυνση  $z$ . Η μετατόπιση  $w$  κατά  $z$ , είναι ανεξάρτητη από τη συντεταγμένη  $z$ , δηλαδή παραμένει σταθερή καθ' ύψος.

Η γεωμετρία και οι φορτίσεις του προβλήματος φαίνονται στο Σχήμα 13.1. Οι άξονες  $x$  και  $y$  βρίσκονται στο επίπεδο της κάτω ακραίας διατομής. Ο άξονας  $z$  είναι παράλληλος προς το διαμήκη άξονα της δοκού. Η στρεπτική ροπή  $T$  σε μια ακραία διατομή είναι θετική, αν το διάνυσμά της που προκύπτει από τον κανόνα του δεξιού χεριού, έχει τη φορά του εξωτερικού μοναδιαίου διανύσματος της ακραίας διατομής.

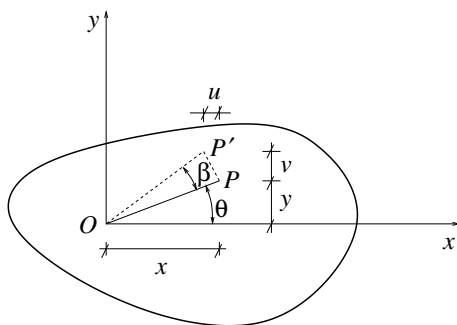
Η μετατόπιση κάθε σημείου  $P$  της δοκού λόγω της στρέψης, φαίνεται στο Σχήμα 13.2. Το ευθύγραμμο τμήμα  $OP$  στρέφεται γύρω από το σημείο  $O$  κατά μια μικρή γωνία  $\beta$ . Το σημείο  $O$  ονομάζεται *κέντρο στρέψης* και αναφέρεται στη θέση όπου

$$u = v = 0. \quad (13.1)$$

Η θέση του κέντρου στρέψης εξαρτάται από το σχήμα της διατομής. Η άτρακτος του Σχήματος 13.1 που εξετάζουμε είναι έτσι τοποθετημένη



Σχήμα 13.1: Στρέψη δοκού τυχαίας διατομής



Σχήμα 13.2: Μετατοπίσεις ενός σημείου  $P$  της διατομής της δοκού λόγω στρέψης.

ώστε το κέντρο στρέψης να βρίσκεται πάνω στον άξονα  $z$ . Επειδή η γωνία στρέψης  $\beta$  είναι μικρή, το τόξο  $PP'$  θεωρείται ως ευθύγραμμο τμήμα κάθετο προς το  $OP$ . Οι συνιστώσες  $u$  και  $v$  της μετατόπισης του σημείου  $P$ , κατά τους άξονες  $x$  και  $y$  αντίστοιχα, δίνονται από τις σχέσεις

$$u = -r\beta \sin \theta = -\beta y \quad (13.2)$$

$$v = r\beta \cos \theta = \beta x. \quad (13.3)$$

Η συνιστώσα  $w$  της μετατόπισης του  $P$  κατά τον άξονα  $z$ , που είναι υπεύθυνη για την ήβωση της διατομής, γράφεται ως

$$w = w(x, y). \quad (13.4)$$

Επειδή έχει γίνει η υπόθεση, ότι η ήβωση σε κάθε διατομή της ατράκτου είναι ίδια, η συνιστώσα  $w$  της μετατόπισης του  $P$ , είναι συνάρτηση μόνο των συντεταγμένων  $x$  και  $y$  και όχι του  $z$ . Έτσι όλα τα σημεία πάνω σε μια γραμμή παράλληλη στον άξονα  $z$ , κινούνται κατά την ίδια απόσταση παράλληλα προς τον άξονα  $z$ . Στο Σχήμα 13.2 φαίνεται μια διατομή της δοκού στη στραμμένη θέση όπου δείχνεται η μετατόπιση του σημείου  $P$  στη θέση  $P'$ . Για τη διατομή στη θέση  $z = 0$  έχει θεωρηθεί ότι

$$u = v = 0. \quad (13.5)$$

Έτσι αν η διατομή του Σχήματος 13.2 βρίσκεται σε απόσταση  $z$  από την αρχή, η γωνία στροφής δίνεται από τη σχέση

$$\beta = \alpha z \quad (13.6)$$

όπου  $\alpha$  είναι η συστροφή. Κατά συνέπεια το πεδίο μετατοπίσεων στην άτρακτο δίνεται από τις σχέσεις

$$u = -\alpha y z \quad (13.7)$$

$$v = \alpha x z \quad (13.8)$$

$$w = w(x, y). \quad (13.9)$$

Σύμφωνα με τη θεωρία της ελαστικότητας οι εξισώσεις (13.7) - (13.9) μπορούν να θεωρηθούν ως μερική λύση του προβλήματος στα πλαίσια της οιονεί αντίστροφης μεθόδου. Θα δείξουμε στη συνέχεια ότι οι τάσεις και παραμορφώσεις που προκύπτουν από τις σχέσεις (13.7) - (13.9), μπορούν να ικανοποιήσουν και τις διέπουσες διαφορικές εξισώσεις του προβλήματος και τις συνοριακές συνθήκες. Σύμφωνα με το θεώρημα της μοναδικότητας, οι τελικά προκύπτουσες τάσεις και παραμορφώσεις θα αποτελούν και τη λύση του προβλήματος.

Οι σχέσεις παραμορφώσεων - μετατοπίσεων συνδυασμένες με τις σχέσεις (13.7) - (13.9), δίνουν

$$\epsilon_{xx} = \epsilon_{yy} = \epsilon_{zz} = \gamma_{xy} = 0 \quad (13.10)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial x} - \alpha y \quad (13.11)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial y} + \alpha x. \quad (13.12)$$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις τάσεων - παραμορφώσεων (νόμος Hooke), οι σχέσεις τάσεων - μετατοπίσεων γίνονται

$$\tau_{xz} = G\gamma_{xz} = G \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \alpha y \right) \quad (13.13)$$

$$\tau_{yz} = G\gamma_{yz} = G \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \alpha x \right) \quad (13.14)$$

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \tau_{xy} = 0. \quad (13.15)$$

Από τις (13.13) και (13.14) παρατηρούμε ότι οι μηδενιζόμενες τάσεις  $\tau_{xz}$  και  $\tau_{yz}$  είναι συναρτήσεις των  $x$  και  $y$  μόνο. Μπορούμε τώρα να απαλείψουμε το  $w$  από τις (13.13) και (13.14), παραγωγίζοντας την πρώτη ως προς  $y$ , τη δεύτερη ως προς  $x$  και αφαιρώντας κατά μέλη. Έτσι οδηγούμαστε στην παρακάτω εξίσωση συμβιβαστού των παραμορφώσεων

$$\frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} = -2\alpha \quad (13.16)$$

που εκφρασμένη, χρησιμοποιώντας το νόμο του Hooke, με όρους τάσεων, δίνει

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} = -2G\alpha. \quad (13.17)$$

Γράφοντας τώρα, τη μόνη μη - ταυτοτικά ικανοποιούμενη εξίσωση ισοροπίας, θεωρώντας μηδενικές μαζικές δυνάμεις, παίρνουμε

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0. \quad (13.18)$$

Εισάγουμε τώρα στο πρόβλημα την τασική συνάρτηση  $\phi(x, y)$  (συνάρτηση Prantl), έτσι ώστε να ισχύουν οι σχέσεις

$$\tau_{xz} = \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad (13.19)$$

$$\tau_{yz} = -\frac{\partial \phi}{\partial x}. \quad (13.20)$$



Παρατηρούμε ότι λόγω των (13.19) και (13.20), η εξίσωση ισορροπίας (13.18) ικανοποιείται ως ταυτότητα. Λόγω των (13.19) και (13.20), η εξίσωση συμβιβαστού (13.17) δίνει την εξίσωση Poisson

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = -2G\alpha \quad (13.21)$$

ή ισοδύναμα την

$$\nabla^2 \phi = -2G\alpha \quad (13.22)$$

όπου

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}. \quad (13.23)$$

Η (13.22) είναι η διέπουσα εξίσωση του προβλήματος, με άγνωστη εξαρτημένη μεταβλητή τη  $\phi$ .

Περνάμε τώρα στην εξέταση των συνοριακών συνθηκών του προβλήματος, με βάση τις γενικές εξισώσεις (9.4) - (9.6). Στην παράπλευρη επιφάνεια δεν ασκούνται εξωτερικές δυνάμεις και επομένως εκεί

$$\overline{T}_x^\mu = \overline{T}_y^\mu = \overline{T}_z^\mu = 0 \quad (13.24)$$

Επειδή τα μοναδιαία εξωτερικά διανύσματα στην παράπλευρη επιφάνεια είναι κάθετα στον άξονα  $z$ , πρέπει να ισχύει ότι

$$\mu_z = 0 \quad (13.25)$$

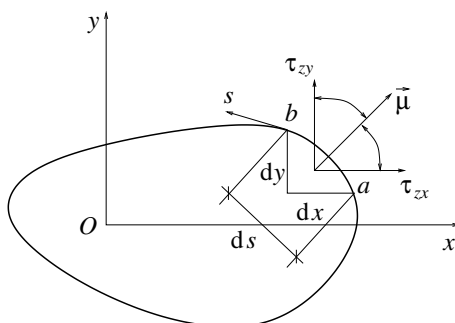
στην επιφάνεια αυτή. Έτσι, λόγω των (13.13) - (13.15), οι (9.4) και (9.5) ικανοποιούνται ως ταυτότητες. Η τρίτη συνοριακή συνθήκη (9.6) δίνει

$$\tau_{xz}\mu_x + \tau_{yz}\mu_y = 0 \quad (13.26)$$

όπου έχει παραλειφθεί ο δείκτης «ο» από τους όρους των τάσεων για λόγους απλοποίησης των συμβόλων. Από το Σχήμα 13.3 συμπεραίνουμε ότι το αριστερό μέλος της (13.26) εκφράζει τη συνιστώσα  $\tau_{z\mu}$  της διατμητικής τάσης που ασκείται σε μια διατομή. Η συνιστώσα  $\tau_{z\mu}$  είναι κάθετη προς την παράπλευρη επιφάνεια και λόγω της (13.26), καταλήγουμε στη σχέση

$$\tau_{z\mu} = \tau_{zx}\mu_x + \tau_{zy}\mu_y = 0. \quad (13.27)$$

Επειδή απαιτείται η κάθετη προς το παράπλευρο σύνορο συνιστώσα  $\tau_{z\mu}$ , της διατμητικής τάσης στη διατομή, να είναι μηδενική πάνω στο παράπλευρο σύνορο, συμπεραίνουμε ότι η τάση αυτή πάνω στο παράπλευρο σύνορο, πρέπει να έχει διεύθυνση εφαπτομενική προς αυτό.



Σχήμα 13.3: Διατμητικές τάσεις σε μια εγκάρσια διατομή (επίπεδο κάθετο στον άξονα  $z$ ), κοντά στο παράπλευρο σύνορο.

Έστω  $s$  η εφαπτομενική διεύθυνση στο παράπλευρο σύνορο, μέσα στο επίπεδο  $xy$ , στο σημείο  $b$ . Από το Σχήμα 13.3 συνάγουμε ότι

$$\mu_x = \frac{dy}{ds} \quad (13.28)$$

$$\mu_y = -\frac{dx}{ds} \quad (13.29)$$

θεωρώντας ότι το  $s$  είναι αυξανόμενο από το  $a$  προς το  $b$ . Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (13.19), (13.20), (13.28) και (13.29) στη σχέση (13.26), παίρνουμε

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} = 0 \quad (13.30)$$

ή ισοδύναμα

$$\frac{d\phi}{ds} = 0. \quad (13.31)$$

Επομένως η τασική συνάρτηση  $\phi$  πρέπει να έχει σταθερή τιμή κατά μήκος του συνόρου της εγκάρσιας διατομής. Επιλέγουμε την τιμή

$$\phi = 0 \quad (13.32)$$

η οποία προφανώς οδηγεί στην ικανοποίηση της (13.27).

Έχουμε δείξει μέχρι τώρα ότι οι τάσεις που ορίζονται με χρήση της  $\phi$ , που η τελευταία ικανοποιεί τις σχέσεις (13.32) και (13.21), εκφράζουν τη λύση του προβλήματος της ελαστικότητας για τη στρέψη μιας ράβδου τυχαίας διατομής, όταν στην παράπλευρη επιφάνεια δεν ασκούνται συνοριακές δυνάμεις. Θα εξετάσουμε στη συνέχεια τα επιφανειακά διανύσματα τάσης που πρέπει να εφαρμόζονται στις ακραίες εγκάρσιες διατομές της δοκού, έτσι ώστε οι τάσεις που βρέθηκαν να έχουν ισχύ. Επειδή οι ακραίες διατομές είναι κάθετες προς τον άξονα  $z$ , έχουμε ότι

$$\mu_x = 0, \quad \mu_y = 0, \quad \mu_z = -1 \quad (13.33)$$

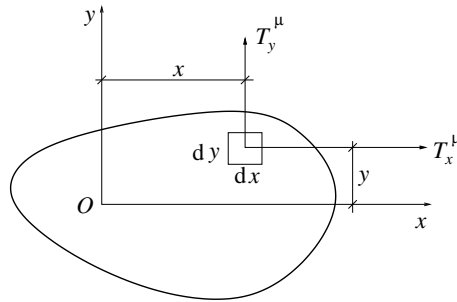
για τη διατομή στη θέση  $z = 0$  και

$$\mu_x = 0, \quad \mu_y = 0, \quad \mu_z = +1 \quad (13.34)$$

για τη διατομή στη θέση  $z = L$ . Θέτοντας τις παραπάνω τιμές των συνημιτόνων κατεύθυνσης στις συνοριακές συνθήκες (9.4) - (9.6), βρίσκουμε τις παρακάτω κατανομές διανυσμάτων τάσης

$$T_x^\mu = \mp \tau_{xz}, \quad T_y^\mu = \mp \tau_{yz}, \quad T_z^\mu = 0 \quad (13.35)$$

που πρέπει να εφαρμόζονται στις ακραίες διατομές για να ικανοποιούνται οι συνοριακές συνθήκες. Στις σχέσεις (13.35) το άνω πρόσημο αναφέρεται στη διατομή  $z = 0$  και το κάτω πρόσημο αναφέρεται στη διατομή  $z = L$ . Από το Σχήμα 13.4 παρατηρούμε ότι η συνιστώσα κατά



Σχήμα 13.4: Συνοριακά διανύσματα τάσης στις ακραίες διατομές.

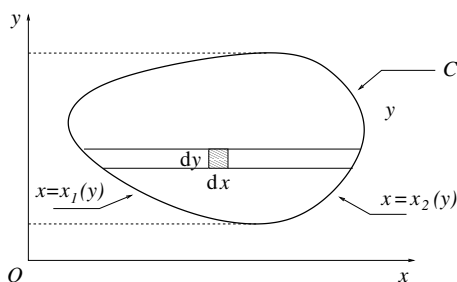
$y$ , της συνισταμένης δύναμης που ασκείται σε κάθε μια από τις ακραίες διατομές της δοκού, δίνεται από τη σχέση

$$\iint_A T_y^\mu dx dy = \mp \iint_A \tau_{yz} dx dy = \pm \iint_A \frac{\partial \phi}{\partial x} dx dy. \quad (13.36)$$

Το διπλό ολοκλήρωμα στη σχέση (13.36) μπορεί να υπολογιστεί κάνοντας πρώτα την ολοκλήρωση κατά τη διεύθυνση  $x$ , όπως φαίνεται στο Σχήμα 13.5. Έτσι γράφουμε

$$\begin{aligned} \iint_A T_y^\mu dx dy &= \pm \int_C \left( \int_{x=x_1}^{x=x_2} \frac{\partial \phi}{\partial x} dx \right) dy = \\ &\pm \int_C \left( \int_{x=x_1}^{x=x_2} d\phi \right) dy = \pm \int_C (\phi_2 - \phi_1) dy = 0 \end{aligned} \quad (13.37)$$

όπου  $x = x_1(y)$  είναι η εξίσωση του αριστερού τμήματος του συνόρου  $C$  και  $x = x_2(y)$  είναι η εξίσωση του δεξιού τμήματος του συνόρου  $C$ . Επειδή οι συναρτήσεις  $\phi_1$  και  $\phi_2$  υπολογίζονται πάνω στις συνοριακές επιφάνειες  $x = x_1(y)$  και  $x = x_2(y)$ , η τιμή τους είναι ίση με το μηδέν. Αλλά ακόμη και αν θεωρήσουμε ότι η συνάρτηση  $\phi$  ισούται με μια



Σχήμα 13.5: Ολοκλήρωση πάνω στην ακραία διατομή.

σταθερά, τότε η διαφορά  $\phi_2 - \phi_1$  μηδενίζεται. Με παρόμοια διαδικασία μπορούμε να δείξουμε ότι

$$\iint_A T_x^\mu dx dy = 0. \quad (13.38)$$

Έτσι οι συνιστώσες κατά  $x$  και  $y$  της συνοριακής δύναμης που ασκείται στις δύο ακραίες εγκάρσιες διατομές, είναι ίσες με το μηδέν. επομένως, το στατικό ισοδύναμο γενικευμένο φορτίο που ασκείται στις δύο ακραίες εγκάρσιες διατομές, είναι μια στρεπτική ροπή γύρω από τον άξονα  $z$ . Η στρεπτική αυτή ροπή  $T$ , όπως φαίνεται και στο Σχήμα 13.4, δίνεται από τη σχέση

$$T = \mp \iint_A (T_y^\mu x - T_x^\mu y) dx dy. \quad (13.39)$$

ή εναλλακτικά από τη σχέση

$$T = - \iint_A \frac{\partial \phi}{\partial x} x dx dy - \iint_A \frac{\partial \phi}{\partial y} y dx dy \quad (13.40)$$

αν ληφθούν υπ' όψη οι σχέσεις (13.19), (13.20) και (13.35). Κάνοντας την εσωτερική ολοκλήρωση (παραγοντικά), στον πρώτο όρο του δεξιού μέλους της (13.40), παίρνουμε

$$\int_{x=x_1}^{x=x_2} \frac{\partial \phi}{\partial x} x dx = x \phi \Big|_{x=x_1}^{x=x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \phi dx = x_2 \phi_2 - x_1 \phi_1 - \int_{x_1}^{x_2} \phi dx = - \int_{x_1}^{x_2} \phi dx \quad (13.41)$$

επειδή

$$\phi_1 = \phi_2 = 0 \quad (13.42)$$

στο παράπλευρο σύνορο. Έτσι, ο πωτος όρος στο δεξί μέλος της (13.40) γίνεται

$$- \iint_A \frac{\partial \phi}{\partial x} x dx dy = \iint_A \phi dx dy. \quad (13.43)$$

Όμοια παίρνουμε

$$-\iint_A \frac{\partial \phi}{\partial y} y dx dy = \iint_A \phi dx dy \quad (13.44)$$

έτσι ώστε

$$T = 2 \iint_A \phi dx dy. \quad (13.45)$$

Παρατηρούμε ότι τα δύο ολοκληρώματα στο δεξί μέλος της (13.40) είναι ίσα και επομένως καθέ μια από τις δύο συνιστώσες  $\tau_{xz}$  και  $\tau_{yz}$  της διατμητικής τάσης, συνεισφέρει το μισό της στρεπτικής ροπής.

Το εφαρμοζόμενο διάνυσμα τάσης στις ακραίες διατομές, όπως δίνεται από τις σχέσεις (13.35), σπάνια συναντάται σε πρακτικά προβλήματα. Εξ αιτίας όμως της αρχής του Saint-Venant, η λύση που παρουσιάστηκε για τη στρέψη της δοκού, μπορεί να εφαρμοστεί για οποιοδήποτε εξωτερικό φορτίο στις ακραίες διατομές, αρκεί η συνισταμένη αυτού του εξωτερικού φορτίου να ικανοποιεί τις συνθήκες (13.37), (13.38) και (13.45). Με άλλα λόγια, αν η εφαρμοζόμενη στρεπτική ροπή στις ακραίες διατομές έχει τιμή  $T$ , ανεξάρτητα από τη λεπτομερή κατανομή της στις διατομές αυτές, σε θέσεις κοντινές στις ακραίες διατομές (για μικρές διαστάσεις των διατομών σε σχέση με το μήκος της δοκού), οι τάσεις θα καθορίζονται από τις σχέσεις (13.19), (13.20), (13.22) και (13.32).

## 13.2 Λύση για άτρακτο ελλειπτικής διατομής

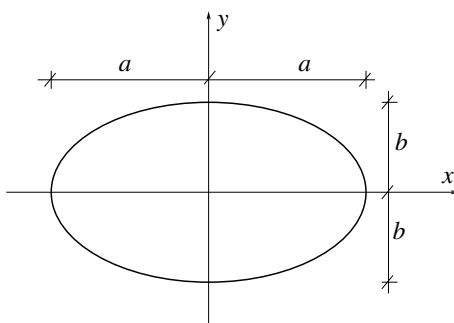
Οι διέπουσες εξισώσεις (13.22) και (13.32) αν και είναι απλές στη μορφή τους, είναι δύσκολο να λυθούν αναλυτικά. Η δυσκολία βρίσκεται κύρια στην ικανοποίηση των συνοριακών συνθηκών, ειδικά στην περίπτωση που οι μαθηματικές εξισώσεις που περιγράφουν το σχήμα των διατομών είναι πολύπλοκες. Σε μερικές περιπτώσεις όμως, που η διατομή της ατράκτου έχει απλό γεωμετρικό σχήμα, μπορούμε να βρούμε αναλυτική λύση, χρησιμοποιώντας την εξίσωση του συνόρου της διατομής. Μια τέτοια περίπτωση είναι αυτή της ελλειπτικής διατομής.

Θεωρούμε την ελλειπτική διατομή του Σχήματος 13.6. Η εξίσωση του συνόρου είναι

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0. \quad (13.46)$$

Θεωρούμε επομένως ότι η τασική συνάρτηση  $\phi$  που λύνει το πρόβλημα είναι της μορφής

$$\phi = k \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) \quad (13.47)$$



Σχήμα 13.6: Ελλειπτική διατομή ατράκτου που υποβάλλεται σε στρέψη.

όπου  $k$  είναι μια σταθερά. Η επιλεγμένη  $\phi$  ικανοποιεί την απαίτηση (13.32) στο παράπλευρο σύνορο. Αντικαθιστώντας την παραπάνω τιμή της  $\phi$  στη διέπουσα εξίσωση (13.22), βρίσκουμε ότι η σταθερά  $k$  δίνεται από τη σχέση

$$k = -\frac{a^2 b^2 G \alpha}{a^2 + b^2}. \quad (13.48)$$

Με την τιμή αυτή του  $k$ , παρατηρούμε ότι οι διέπουσες εξισώσεις (13.22) και (13.32) ικανοποιούνται, επομένως έχουμε βρει τη λύση του προβλήματος. Η εξωτερικά εφαρμοζόμενη στρεπτική ροπή  $T$  μπορεί τώρα να βρεθεί με χρήση της σχέσης (13.45), που λόγω των (13.46) - (13.48) δίνει

$$T = -\frac{2a^2 b^2}{a^2 + b^2} G \alpha \left[ \frac{1}{a^2} \iint_A x^2 dx dy + \frac{1}{b^2} \iint_A y^2 dx dy - \iint_A dx dy \right]. \quad (13.49)$$

Παρατηρούμε ότι τα δύο πρώτα ολοκληρώματα στο δεξί μέλος της (13.49), εκφράζουν τις ροπές αδράνειας της διατομής ως προς τους άξονες  $y$  και  $x$  αντίστοιχα. Το τρίτο ολοκλήρωμα στο δεξί μέλος της (13.49) εκφράζει το εμβαδό της διατομής. Για την ελλειπτική διατομή αυτές οι ποσότητες δίνονται από τις σχέσεις

$$I_y = \iint_A x^2 dx dy = \frac{\pi}{4} b a^3 \quad (13.50)$$

$$I_x = \iint_A y^2 dx dy = \frac{\pi}{4} a b^3 \quad (13.51)$$

$$A = \iint_A dx dy = \pi a b \quad (13.52)$$

Λόγω των (13.50) - (13.52) η (13.49) δίνει

$$T = \frac{\pi a^3 b^3 G \alpha}{a^2 + b^2} \quad (13.53)$$

και η συστροφή παίρνει την τιμή

$$\alpha = \frac{(a^2 + b^2)T}{\pi a^3 b^3 G}. \quad (13.54)$$

Από τις σχέσεις (13.19), (13.20), (13.47), (13.48), (13.54) βρίσκουμε ότι

$$\tau_{xz} = -\frac{2a^2 G \alpha y}{a^2 + b^2} = -\frac{2T y}{\pi a b^3} \quad (13.55)$$

$$\tau_{yz} = \frac{2b^2 G \alpha x}{a^2 + b^2} = \frac{2T x}{\pi b a^3}. \quad (13.56)$$

Η μέγιστη απόλυτη τιμή  $\tau_{max}$  της διατμητικής τάσης προκύπτει στο σημείο ( $x = 0, y = b$ ) και δίνεται από τη σχέση

$$\tau_{max} = \frac{2T}{\pi a b^2}. \quad (13.57)$$

### 13.3 Το ανάλογο πρόβλημα από τη ρευστομηχανική

Ο Λόρδος Kelvin ερμήνευσε τη λύση του Saint - Venant για τη στρέψη ατράκτου τυχαίας διατομής, με χρήση των γραμμών ροής μιας «κυκλικής» ροής, με σταθερό στροβιλισμό, ενός ιδεατού ρευστού πάνω στη διατομή. Ακολουθώντας το συνηθισμένο συμβολισμό της ρευστομηχανικής, θεωρούμε ως  $u$  και  $v$  τις συνιστώσες της ταχύτητας κατά  $x$  και  $y$  αντίστοιχα, μιας δισδιάστατης ροής ρευστού. Ορίζεται τότε η ροϊκή συνάρτηση  $\Psi = \Psi(x, y)$  και οι συνιστώσες της ταχύτητας δίνονται από τις σχέσεις

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial y} \quad (13.58)$$

$$v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}. \quad (13.59)$$

Λόγω των (13.58) και (13.59), η εξίσωση συνέχειας

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (13.60)$$

για ασυμπιεστα ρευστά, ικανοποιείται αυτόματα.

Ένα ασυμπιεστο ρευστό μπορεί να αναπτύσσει ή να μην αναπτύσσει στροβιλισμό κατά τη ροή του. Ο στροβιλισμός  $\omega$  δίνεται από τη σχέση

$$2\omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (13.61)$$

Από τις σχέσεις (13.60) και (13.61) παίρνουμε

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = -2\omega \quad (13.62)$$

Η διαφορική εξίσωση (13.62) για το στροβιλισμό ασυμπίεστου ρευστού είναι ίδια με τη διαφορική εξίσωση (13.21) για τη στρέψη ατράκτου, αν θέσουμε

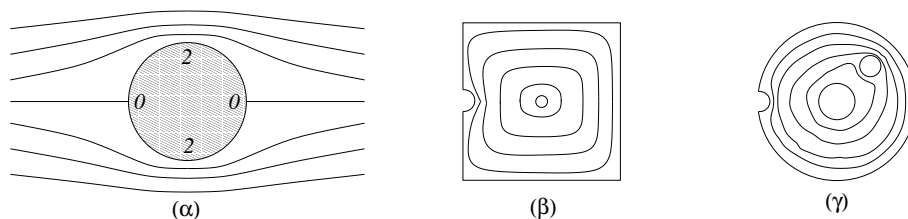
$$\omega = G\alpha \quad (13.63)$$

ως μια σταθερή τιμή του στροβιλισμού  $\sigma'$  ολόκληρη την επιφάνεια της διατομής. Είναι γνωστό από τη Μηχανική των Ρευστών ότι οι γραμμές ροής περιγράφονται από την εξίσωση

$$\Psi = \text{σταθερά}. \quad (13.64)$$

Μια ίδια με την (13.64) εξίσωση θα ισχύει και στο σύνορο μιας και εκεί το διάνυσμα της ταχύτητας θα είναι εφαπτόμενο σ' αυτό. Ανάλογη είναι και η συνοριακή συνθήκη (13.32) που ισχύει για την τασική συνάρτηση Prantl. Παραπέρα, συγκρίνοντας τις σχέσεις (13.58 και (13.59) με τις σχέσεις (13.19) και (13.20), είναι εμφανής η αντιστοιχία μεταξύ των τάσεων στο υποβαλλόμενο σε στρέψη παραμορφώσιμο στερεό και των ταχυτήτων στο ασυμπίεστο στροβιλιζόμενο ρευστό.

Η αξία της αντιστοιχίας του Kelvin βρίσκεται στο γεγονός ότι ήδη γνωστές λύσεις για τη ροή ιδεατών ρευστών, μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την επίλυση προβλημάτων στρέψης ατράκτων από παραμορφώσιμα στερεά. Ως πρώτη εφαρμογή εξετάζουμε τη ροή ιδεατού ρευστού γύρω από ένα κυλινδρικό εμπόδιο (Σχήμα 13.7 (α)). Αν  $V_0$  εί-



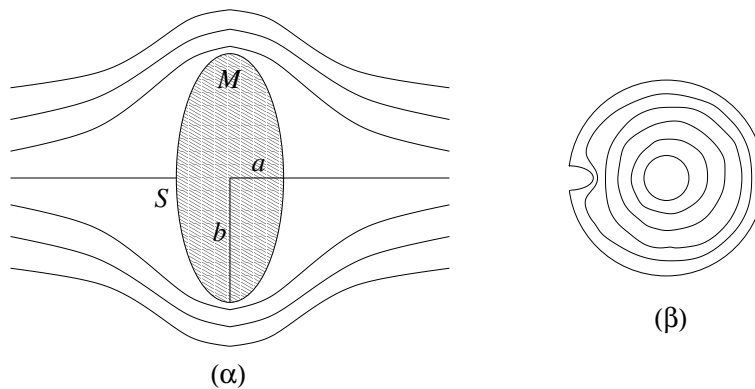
Σχήμα 13.7: Η ροή ενός ιδεατού ρευστού γύρω από ένα κυλινδρικό εμπόδιο παρουσιάζει μέγιστη ταχύτητα ίση με το διπλάσιο της στην αδιατάρακτη περιοχή (μακριά από το εμπόδιο). Έτσι ο συντελεστής συγκέντρωσης τάσεων λόγω στρέψης, στην περιφέρεια μιας κυκλικής οπής ή στη βάση μιας ημικυκλικής εγκοπής στην περιφέρεια της διατομής του στερεού, είναι ίσος με 2.

ναι η ταχύτητα της ροής μακριά από το εμπόδιο, στα σημεία 0 η ταχύτητα της ροής είναι μηδενική (stagnation points) ενώ στα σημεία 2 η ταχύτητα είναι ίση με  $2V_0$ . Το ανάλογο της στρέψης των ισότροπων



παραμορφώσιμων στερεών φαίνεται στα Σχήματα 13.7 (β) και 13.7 (γ). Έχει εφαρμογή γύρω από μικρές κυλινδρικές οπές που διατρέχουν όλο το μήκος της δοκού. Ημικυκλικές εγκοπές στην περιφέρεια παρουσιάζουν επίσης συντελεστή συγκέντρωσης τάσεων ίσο με 2, διότι τοπικά γύρω από την οπή η εικόνα είναι ίδια με το μισό του Σχήματος 13.7 (α).

Για την περίπτωση μιας στενότερης και βαθύτερης εγκοπής στην περιφέρεια της διατομής της δοκού, είναι σχετική η ταχύτητα ροής γύρω από ένα ελλειπτικό εμπόδιο (Σχήμα 13.8). Από τη Ρευστομηχα-



Σχήμα 13.8: Η ροή γύρω από ένα ελλειπτικό εμπόδιο παρουσιάζει δύο σημεία  $S$  μηδενισμού της ταχύτητας και δύο σημεία  $M$  όπου η ταχύτητα γίνεται ίση με  $V_0(1 + b/a)$ . Έτσι η συγκέντρωση τάσεων σε μια άτρακτο από στερεό υλικό, που υποβάλλεται σε στρέψη και περιέχει μια ελλειπτικού κατά το μισό σχήματος εγκοπή, είναι ίση με  $(1 + b/a)$ . Ο λόγος αυτός για πολύ μακρόστενη εγκοπή γίνεται πολύ μεγάλος.

νική, η αύξηση της ταχύτητας ροής στα σημεία  $M$ , σε σχέση με την ταχύτητα μακριά από το εμπόδιο, είναι ίση με  $\left(1 + \frac{b}{a}\right)$  φορές (Σχήμα 13.8 (α)). Μια ρωγμή στην περιφέρεια της διατομής του στερεού σώματος (Σχήμα 13.8 (β)), πριν από την αστοχία λόγω κόπωσης, φαίνεται σαν μια μακρόστενη μισή έλλειψη με  $b \gg a$ . Έτσι η συγκέντρωση τάσεων στη βάση μιας τέτοιας ρωγμής είναι πολύ μεγάλη.

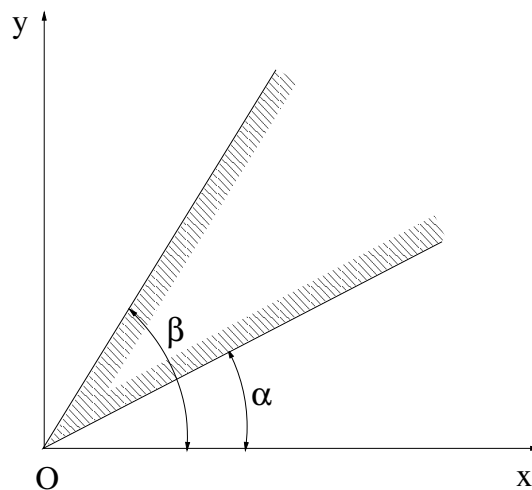


## Κεφάλαιο 14

# Προβλήματα με σφήνες

### 14.1 Γενικά

Θα εξετάσουμε προβλήματα με ημιάπειρες σφήνες, οι οποίες ορίζονται από τις γραμμές  $\alpha < \theta < \beta$  (Σχήμα 14.1). Θα θεωρήσουμε ότι τα



Σχήμα 14.1: Ημιάπειρη σφήνα.

διανύσματά τάσης στα σύνορα των σφηνών, μεταβάλλονται όπως το  $r^n$ . Εξ αιτίας των (12.39) - (12.41), η τασική συνάρτηση πρέπει να έχει τη μορφή

$$\phi = r^{n+2} f(\theta) \quad (14.1)$$

Θέτοντας το δεξί μέλος της (14.1) στη διαρμονική εξίσωση (12.38), παίρνουμε τη συνήθη διαφορική εξίσωση

$$\left( \frac{d^2}{d\theta^2} + (n+2)^2 \right) \left( \frac{d^2}{d\theta^2} + n^2 \right) f(\theta) = 0 \quad (14.2)$$

Για  $n \neq 0$  ή  $n \neq -2$ , η λύση της (14.2) είναι

$$\phi = r^{n+2} (A_1 \cos(n+2)\theta + A_2 \cos n\theta + A_3 \sin(n+2)\theta + A_4 \sin n\theta) \quad (14.3)$$

Για  $n = 0$  παίρνουμε τη λύση

$$\phi = r^2 (A_1 \cos 2\theta + A_2 + A_3 \sin 2\theta + A_4 \theta) \quad (14.4)$$

που μας επιτρέπει να λύνουμε προβλήματα σφηνών με 4 ανεξάρτητα διανύσματα τάσης, δηλαδή δύο ορθές και δύο διατμητικές ομοιόμορφες τάσεις, στα σύνορα  $\theta = \alpha$  και  $\theta = \beta$ . Ο τελευταίος όρος της (14.4) προκύπτει από τον τελευταίο όρο της (14.3), θέτοντας

$$A'_4 = \frac{A_4}{n} \quad (14.5)$$

και παίρνοντας το όριο

$$\lim_{n \rightarrow 0} A'_4 \sin n\theta = \lim_{n \rightarrow 0} A_4 \frac{\sin n\theta}{n} = \lim_{n \rightarrow 0} A_4 \frac{\theta \cos n\theta}{1} = A_4 \theta \quad (14.6)$$

Οι τάσεις που δίνει η (14.4), εξ αιτίας των (12.39) - (12.41), είναι

$$\sigma_{rr} = -2A_1 \cos 2\theta + 2A_2 - 2A_3 \sin 2\theta + 2A_4 \theta \quad (14.7)$$

$$\sigma_{r\theta} = 2A_1 \sin 2\theta - 2A_3 \cos 2\theta - A_4 \quad (14.8)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = 2A_1 \cos 2\theta + 2A_2 + 2A_3 \sin 2\theta + 2A_4 \theta \quad (14.9)$$

## 14.2 Παράδειγμα

Ορθογώνια σφήνα δέχεται ομοιόμορφη διάτμηση  $S$  στην πλευρά  $x = 0$  (Σχήμα 14.2). Να βρεθεί η κατανομή των τάσεων στη σφήνα.

Οι συνοριακές συνθήκες του προβλήματος, σε καρτεσιανές συντεταγμένες, είναι

$$\sigma_{xy} = S \quad \text{και} \quad \sigma_{xx} = 0 \quad \text{για} \quad x = 0, y > 0 \quad (14.10)$$

$$\sigma_{yy} = 0 \quad \text{και} \quad \sigma_{yx} = 0 \quad \text{για} \quad y = 0, x > 0 \quad (14.11)$$

ενώ σε πολικές συντεταγμένες είναι

$$\sigma_{\theta r} = -S \quad \text{και} \quad \sigma_{\theta\theta} = 0 \quad \text{για} \quad \theta = \frac{\pi}{2} \quad (14.12)$$

$$\sigma_{\theta r} = 0 \quad \text{και} \quad \sigma_{\theta\theta} = 0 \quad \text{για} \quad \theta = 0 \quad (14.13)$$

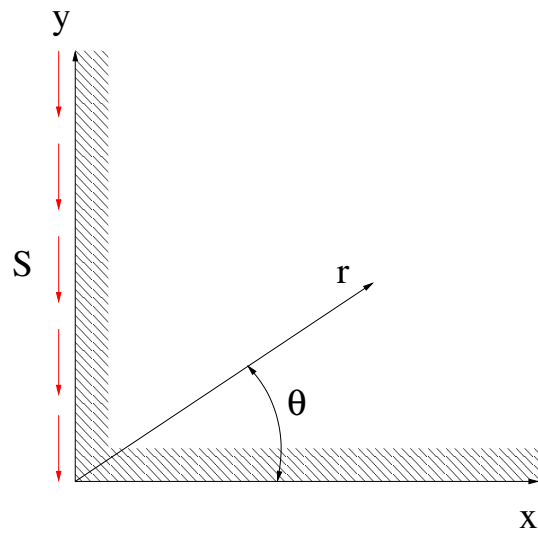
Οι (14.12) και (14.13), εξ αιτίας των (14.7) - (14.9), δίνουν

$$2A_3 - A_4 = -S \quad (14.14)$$

$$-2A_1 + 2A_2 + A_4 \pi = 0 \quad (14.15)$$

$$-2A_3 - A_4 = 0 \quad (14.16)$$

$$2A_1 + 2A_2 = 0 \quad (14.17)$$



Σχήμα 14.2: Ορθογώνια σφήνα υπό ομοιόμορφη διάτμηση στην πλευρά  $x = 0$ .

που έχει ως λύση την

$$A_1 = \frac{\pi S}{8} \quad (14.18)$$

$$A_2 = -\frac{\pi S}{8} \quad (14.19)$$

$$A_3 = -\frac{S}{4} \quad (14.20)$$

$$A_4 = \frac{S}{2} \quad (14.21)$$

Εξ αιτίας των (14.18) - (14.21), η (14.4) δίνει

$$\phi = S \left( \frac{\pi r^2 \cos 2\theta}{8} - \frac{\pi r^2}{8} - \frac{r^2 \sin 2\theta}{4} + \frac{r^2 \theta}{2} \right) \quad (14.22)$$

σε πολικές συντεταγμένες ή

$$\phi = S \left( \frac{\pi}{8}(x^2 - y^2) - \frac{\pi(x^2 + y^2)}{8} - \frac{xy}{2} + \frac{x^2 + y^2}{2} \arctan \frac{y}{x} \right) \quad (14.23)$$

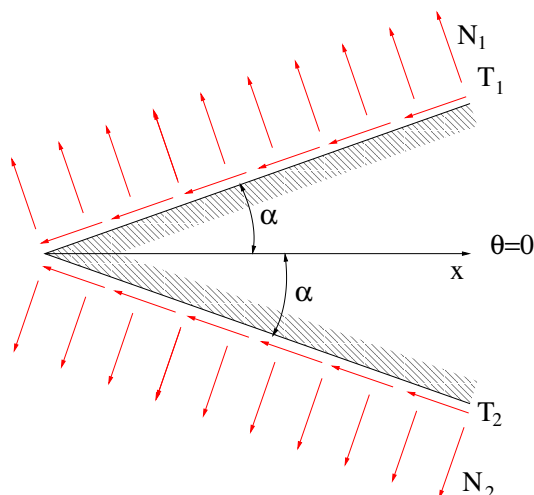
Από τη (14.23), η διατμητική τάση γίνεται

$$\sigma_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = \frac{S y^2}{x^2 + y^2} \quad (14.24)$$

Η (14.24) δίνει την τιμή 0 για  $y = 0$  και  $x > 0$  και την τιμή  $S$  για  $x = 0$  και  $y > 0$ , δηλαδή ικανοποιεί τη συνοριακή συνθήκη (14.10). Στην αιχμή της σφήνας, δηλαδή για  $x = 0$  και  $y = 0$ , η διατμητική τάση  $\sigma_{xy}$  είναι απροσδιόριστη.

### 14.3 Γενική ομοιόμορφη φόρτιση στις πλευρές

Θεωρούμε σφήνα ανοίγματος  $2\alpha$  (Σχήμα 14.3) με συνοριακές συνθήκες



Σχήμα 14.3: Σφήνα με ομοιόμορφη φόρτιση στις πλευρές.

$$\sigma_{\theta r} = T_1 \quad \text{για} \quad \theta = \alpha \quad (14.25)$$

$$\sigma_{\theta r} = T_2 \quad \text{για} \quad \theta = -\alpha \quad (14.26)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = N_1 \quad \text{για} \quad \theta = \alpha \quad (14.27)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = N_2 \quad \text{για} \quad \theta = -\alpha \quad (14.28)$$

Οι (14.25) - (14.28), εξ αιτίας των (14.8) και (14.9), δίνουν

$$2A_1 \sin 2\alpha - 2A_3 \cos 2\alpha - A_4 = T_1 \quad (14.29)$$

$$-2A_1 \sin 2\alpha - 2A_3 \cos 2\alpha - A_4 = T_2 \quad (14.30)$$

$$2A_1 \cos 2\alpha + 2A_2 + 2A_3 \sin 2\alpha + 2A_4\alpha = N_1 \quad (14.31)$$

$$2A_1 \cos 2\alpha + 2A_2 - 2A_3 \sin 2\alpha - 2A_4\alpha = N_2 \quad (14.32)$$

Οι (14.29) - (14.32) γράφονται και ως

$$-4A_3 \cos 2\alpha - 2A_4 = T_1 + T_2 \quad (14.33)$$

$$4A_1 \sin 2\alpha = T_1 - T_2 \quad (14.34)$$

$$4A_1 \cos 2\alpha + 4A_2 = N_1 + N_2 \quad (14.35)$$

$$4A_3 \sin 2\alpha + 4A_4\alpha = N_1 - N_2 \quad (14.36)$$

Εξ αιτίας των (14.7) και (14.9) παρατηρούμε ότι οι σταθερές  $A_1$  και  $A_2$  δίνουν συμμετρικούς (ως προς  $\theta = 0$ ) όρους στις ορθές τάσεις, ενώ οι  $A_3$  και  $A_4$  δίνουν αντισυμμετρικούς όρους στις τάσεις αυτές.

### 14.3.1 Ιδιοτιμές για τη γωνία της σφήνας

Υπάρχουν κάποιες ιδιοτιμές για τις οποίες, οι ορίζουσες των συντελεστών των αγνώστων σταθερών  $A_1$  και  $A_2$  του συστήματος των εξισώσεων (14.34) - (14.35) και των αγνώστων σταθερών  $A_3$  και  $A_4$  του συστήματος των εξισώσεων (14.33) - (14.36), ισούνται με μηδέν. Για το σύστημα των εξισώσεων (14.34) και (14.35) η ορίζουσα δίνει

$$\sin 2\alpha = 0 \implies 2\alpha = 180^\circ \quad \text{ή} \quad 2\alpha = 360^\circ \quad (14.37)$$

ενώ για το σύστημα των εξισώσεων (14.33) και (14.36) ο μηδενισμός της ορίζουσας δίνει

$$\tan 2\alpha = 2\alpha \implies 2\alpha = 257.4^\circ \quad (14.38)$$

Η περίπτωση  $2\alpha = 180^\circ$  αντιστοιχεί στο ημιεπίπεδο  $x > 0$  (Σχήμα 14.4), η περίπτωση  $2\alpha = 360^\circ$  αντιστοιχεί στην ημιάπειρη ρωγμή (Σχήμα 14.5) και η περίπτωση  $2\alpha = 257.4^\circ$  αντιστοιχεί σε εσοχή (Σχήμα 14.6).

Για το μη ομογενές πρόβλημα, στην περίπτωση που έχουμε κάποια από τις παραπάνω γωνίες της σφήνας, πρέπει να αναζητηθούν ειδικές λύσεις. Αυτές μπορούν να βρεθούν από τη γενική λύση (14.3), την οποία παραγωγίζουμε ως προς  $n$ , πριν θέσουμε  $n = 0$ . Παίρνουμε έτσι τους επί πλέον όρους  $r^2(\ln r \cos 2\theta - \theta \sin 2\theta)$  και  $r^2 \ln r$ , στο δεξιό μέλος της (14.3). Ένα πρόβλημα για το οποίο η λύση αυτή είναι αναγκαία, είναι αυτό του ημιεπιπέδου που υποβάλλεται σε ομοιόμορφη διατμητική τάση κατά μήκος του μισού συνόρου του.

### Το ομογενές πρόβλημα

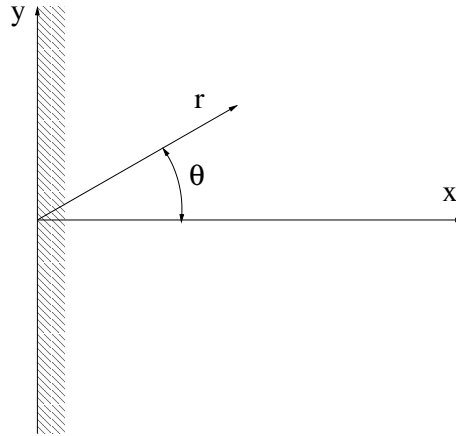
Ενδιαφέρον παρουσιάζει το ομογενές πρόβλημα όπου

$$N_1 = N_2 = T_1 = T_2 = 0 \quad (14.39)$$

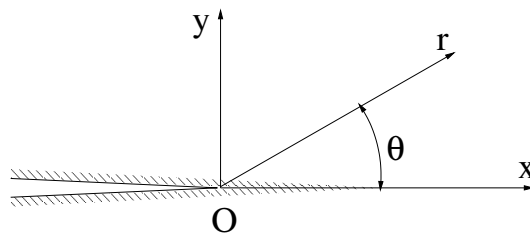
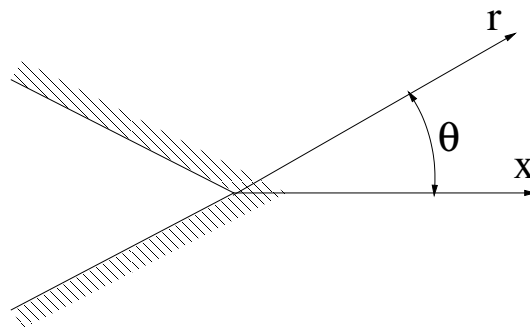
Με δοκιμές βρίσκουμε ότι η λύση για το ημιεπίπεδο  $x > 0$  (Σχήμα 14.4) είναι μονοαξονικός εφελκυσμός με  $\sigma_{yy} = S$ , που είναι μη τετριμμένη λύση ενώ οι τάσεις στην ελεύθερη επιφάνεια  $x = 0$  είναι μηδενικές. Η ίδια λύση ισχύει και για την ημιάπειρη ρωγμή (Σχήμα 14.5). Παρατηρούμε ότι και στις δύο περιπτώσεις οι παρειές της σφήνας παραμένουν αφόρτιστες, ενώ το εξωτερικά επιβαλλόμενο φορτίο εφαρμόζεται στο άπειρο.

## 14.4 Η ασυμπτωτική μέθοδος Williams

Στην περίπτωση εσοχής Σχήμα 14.6, αντιλαμβανόμαστε διαισθητικά ότι στην αιχμή θα υπάρχει συγκέντρωση τάσεων. Θα δείξουμε



S

Σχήμα 14.4: Ημιεπίπεδο στην περιοχή  $x > 0$ .Σχήμα 14.5: Ημιάπειρη ρωγμή κατά μήκος του άξονα  $x < 0$ .

Σχήμα 14.6: Πλάκα με εσοχή υπό μονοαξονικό εφελκυσμό.



ότι το τασικό πεδίο εκεί είναι γενικά ιδιόμορφο, δηλαδή ότι οι τάσεις παίρνουν άπειρη τιμή, καθώς πλησιάζουμε την κορυφή της γωνίας της εσοχής. Ο M. L. Williams [7] ανέπτυξε μια μέθοδο για τη διερεύνηση της φύσης του τασικού πεδίου κοντά στην αιχμή, ορίζοντας ένα σύστημα πολικών συντεταγμένων με αρχή την αιχμή και αναπτύσσοντας το τασικό πεδίο σε ασυμπτωτική σειρά δυνάμεων της απόστασης  $r$ .

### 14.4.1 Αποδεκτές ιδιομορφίες

Πριν παρουσιάσουμε την ασυμπτωτική αυτή λύση με λεπτομέρεια, πρέπει να απαντηθεί το ερώτημα αν το ιδιόμορφο τασικό πεδίο είναι αποδεκτό σε λύσεις των προβλημάτων της ελαστικότητας. Θα παρουσιαστούν τόσο κριτήρια μηχανικού όσο και μαθηματικά κριτήρια, που επιτρέπουν την ύπαρξη ιδιόμορφων τάσεων στην ελαστικότητα.

#### Κριτήρια μηχανικού

Η άποψη ενός μηχανικού θα ήταν ότι κανένα υλικό απ' αυτά που χρησιμοποιούνται στις κατασκευές, δεν είναι ικανό να παραλάβει τάσεις άπειρου μεγέθους. Επομένως οποιοδήποτε αποτέλεσμα ανάλυσης δώσει άπειρη τάση, θα σημαίνει ότι έχουμε στην πραγματικότητα διαρροή ή κάποιου άλλου είδους αστοχία.

Σημειώνεται ότι οι ιδιομορφίες των τάσεων συνδέονται με ασυνέχειες στη γεωμετρία ή στις συνοριακές συνθήκες, π. χ. μια αιχμηρή γωνία όπως στην προκειμένη περίπτωση της εσοχής ή ένα συγκεντρωμένο φορτίο περιγραφόμενο μαθηματικά από τη συνάρτηση Dirac. Στην πραγματικότητα δεν υπάρχουν αιχμηρές ρωγμές και τα φορτία δεν είναι ποτέ απόλυτα συγκεντρωμένα. Αν δεχθούμε τις ιδιομορφες λύσεις, αυτές θα πρέπει να θεωρηθούν ως οριακές περιπτώσεις πραγματικών καταστάσεων, όπως π. χ. μια γωνία με μια πολύ μικρή ακτίνα καμπυλότητας ή ένα κατανεμημένο φορτίο που εφαρμόζεται σε μια πολύ μικρή περιοχή του συνόρου του σώματος

Η υπόθεση του συνεχούς μέσου είναι μια ακόμη οριακή περίπτωση. Τα πραγματικά υλικά δεν είναι απόλυτα συνεχή, αντίθετα έχουν ατομική δομή ή κοκκώδη δομή σε μεγαλύτερη κλίμακα. Έτσι δεν έχει μεγάλη πρακτική σημασία να μιλάμε για τιμές ποσοτήτων, κοντά στην αιχμή μιας γωνίας και σε απόσταση από αυτή, μικρότερη της ατομικής απόστασης. Σ' αυτή την περιοχή η θεωρία του συνεχούς μέσου δεν ισχύει έτσι κι αλλιώς. Επομένως η ύπαρξη ιδιομορφής τάσης πιθανά να μη μας ενοχλεί, διότι το σημείο της ιδιομορφίας βρίσκεται «έξω» από το υλικό.

### Μαθηματικά κριτήρια

Ένας μαθηματικός θα αναζητούσε απαντήσεις στο ερώτημα περί αποδοχής ή όχι της ιδιομορφίας στις τάσεις, περισσότερο στα πλαίσια της αναζήτησης ύπαρξης, μοναδικότητας και σύγκλισης των λύσεων παρά με βάση τη φυσική παρατήρηση και εμπειρία. Στα πλαίσια της συναρτησιακής ανάλυσης, η θεωρία της ελαστικότητας τοποθετείται σ' ένα χώρο συναρτήσεων όπου τα προβλήματα είναι μαθηματικά καλά ορισμένα. Εδώ ο συναρτησιακός αυτός χώρος δηλώνει μια κατηγορία συναρτήσεων μέσα στην οποία αναζητάμε και τη λύση και γενικά αναφέρεται και στην ισχύ (εκθέτη) της ιδιομορφίας.

Στις αιτιάσεις των μηχανικών περί φυσικής σημασίας, οι μαθηματικοί προτείνουν τις θεωρήσεις οριακών καταστάσεων. Γενικά, δεν είναι λογικά αδύνατο η τάση διαρροής ενός υλικού να είναι αυθαίρετα μεγάλη αλλά πεπερασμένη και η ακτίνα καμπυλότητας στην κορυφή μιας σφήνας να είναι αυθαίρετα μικρή αλλά επίσης πεπερασμένη. Οι λύσεις που περιλαμβάνουν ιδιομορφίες μπορούν να θεωρηθούν ως αποτελέσματα που προκύπτουν όταν οι παραπάνω ποσότητες τείνουν στα όριά τους. Γενικά η διαφορά μεταξύ του πραγματικού προβλήματος και της οριακής περίπτωσης, θα είναι εντοπισμένη στο σημείο της ιδιομορφίας.

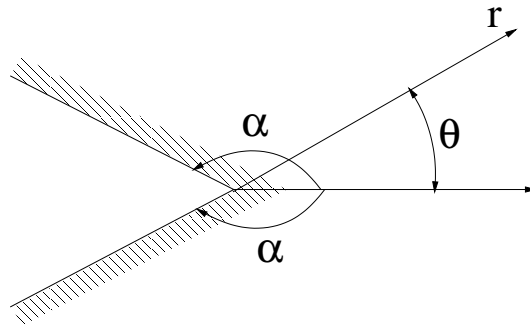
Αποδεκτές ιδιομορφίες έχουμε όταν, σε μια μικρή περιοχή γύρω από το ιδιόμορφο σημείο όπου δεν εφαρμόζεται συγκεντρωμένη δύναμη, η ενέργεια παραμόρφωσης μηδενίζεται όταν το μέγεθος της περιοχής τείνει στο μηδέν. Αν οι τάσεις και κατά συνέπεια και οι παραμορφώσεις μεταβάλλονται όπως το  $r^\alpha$  όταν το  $r \rightarrow 0$ , η ενέργεια παραμόρφωσης για το πρόβλημα στο επίπεδο, θα είναι

$$U = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^r \sigma_{ij} \epsilon_{ij} r dr d\theta = C \int_0^r r^{2\alpha+1} dr \quad (14.40)$$

όπου  $C$  είναι σταθερά που εξαρτάται από τις ελαστικές σταθερές και από τον τρόπο μεταβολής του τασικού πεδίου ως προς  $\theta$ . Το ολοκλήρωμα στη (14.40) είναι φραγμένο αν  $\alpha > -1$  όταν  $r \rightarrow 0$ . Έτσι ένα ιδιόμορφο τασικό πεδίο είναι αποδεκτό, αν ο εκθέτης του  $r$  στην έκφραση της τάσης είναι μεγαλύτερος του  $-1$ . Οι τάσεις που παράγονται από συγκεντρωμένες δυνάμεις ή από εξαρμώσεις (dislocations), έχουν ιδιομορφίες με  $\alpha = -1$ . Χρησιμοποιούνται όμως, κατά παράβαση του παραπάνω κανόνα, ως πυρήνες (kernels) σε ολοκληρώματα συνέλιξης (convolution integrals) για την επίλυση χρήσιμων προβλημάτων π. χ. προβλημάτων ρωγμών. Οι πυρήνες αυτοί λέγονται και *συναρτήσεις Green (Green's functions)*.

### 14.4.2 Ανάπτυγμα ιδιοσυναρτήσεων

Θεωρούμε εσοχή ή σφήνα με μηδενικές επιφανειακές δυνάμεις στις πλευρές της, σε πλάκα άπειρων διαστάσεων που φορτίζεται στο άπειρο (Σχήμα 14.7). Το τασικό πεδίο κοντά στην αιχμή της εσοχής είναι γε-



Σχήμα 14.7: Πλάκα άπειρων διαστάσεων με εσοχή και φόρτιση στο άπειρο.

νικά μια πολύπλοκη συνάρτηση των  $r$  και  $\theta$ . Θα θεωρήσουμε όμως το ανάπτυγμα της λύσης αυτής σε σειρά όρων που έχουν μορφή χωριζόμενων μεταβλητών. Κάθε ένας απ' αυτούς τους όρους θα ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες μηδενικών διανυσμάτων τάσης στις παρειές της σφήνας. Ενδιαφερόμαστε κυρίως για τις τάσεις κοντά στην κορυφή της εσοχής, δηλαδή για  $r \rightarrow 0$ . Ως λύση χρησιμοποιούμε την (14.3), αλλά θεωρούμε ότι το  $n$  μπορεί και να μην είναι ακέραιος. Έτσι θέτουμε

$$n = \lambda - 1 \quad (14.41)$$

και η (14.3) γράφεται ως

$$\phi = r^{\lambda+1} (A_1 \cos(\lambda+1)\theta + A_2 \cos(\lambda-1)\theta + A_3 \sin(\lambda+1)\theta + A_4 \sin(\lambda-1)\theta) \quad (14.42)$$

Εξ αιτίας των (12.39) - (12.41) και της (14.42), οι τάσεις γίνονται

$$\sigma_{rr} = r^{\lambda-1} \{-A_1 \lambda(\lambda+1) \cos(\lambda+1)\theta - A_2 \lambda(\lambda-3) \cos(\lambda-1)\theta - A_3 \lambda(\lambda+1) \sin(\lambda+1)\theta - A_4 \lambda(\lambda-3) \sin(\lambda-1)\theta\} \quad (14.43)$$

$$\sigma_{r\theta} = r^{\lambda-1} \{A_1 \lambda(\lambda+1) \sin(\lambda+1)\theta + A_2 \lambda(\lambda-1) \sin(\lambda-1)\theta - A_3 \lambda(\lambda+1) \cos(\lambda+1)\theta - A_4 \lambda(\lambda-1) \cos(\lambda-1)\theta\} \quad (14.44)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = r^{\lambda-1} \{A_1 \lambda(\lambda+1) \cos(\lambda+1)\theta + A_2 \lambda(\lambda+1) \cos(\lambda-1)\theta + A_3 \lambda(\lambda+1) \sin(\lambda+1)\theta + A_4 \lambda(\lambda+1) \sin(\lambda-1)\theta\} \quad (14.45)$$

Για να ικανοποιηθούν οι συνοριακές συνθήκες

$$\sigma_{\theta r} = \sigma_{\theta\theta} = 0 \quad \text{για} \quad \theta = \pm\alpha \quad (14.46)$$

οι (14.44) και (14.45) δίνουν

$$\lambda \{A_1(\lambda + 1) \sin(\lambda + 1)\alpha + A_2(\lambda - 1) \sin(\lambda - 1)\alpha - A_3(\lambda + 1) \cos(\lambda + 1)\alpha - A_4(\lambda - 1) \cos(\lambda - 1)\alpha\} = 0 \quad (14.47)$$

$$\lambda \{-A_1(\lambda + 1) \sin(\lambda + 1)\alpha - A_2(\lambda - 1) \sin(\lambda - 1)\alpha - A_3(\lambda + 1) \cos(\lambda + 1)\alpha - A_4(\lambda - 1) \cos(\lambda - 1)\alpha\} = 0 \quad (14.48)$$

$$\lambda \{A_1(\lambda + 1) \cos(\lambda + 1)\alpha + A_2(\lambda + 1) \cos(\lambda - 1)\alpha + A_3(\lambda + 1) \sin(\lambda + 1)\alpha + A_4(\lambda + 1) \sin(\lambda - 1)\alpha\} = 0 \quad (14.49)$$

$$\lambda \{A_1(\lambda + 1) \cos(\lambda + 1)\alpha - A_2(\lambda + 1) \cos(\lambda - 1)\alpha - A_3(\lambda + 1) \sin(\lambda + 1)\alpha - A_4(\lambda + 1) \sin(\lambda - 1)\alpha\} = 0 \quad (14.50)$$

Οι (14.47) - (14.50) αποτελούν ένα σύστημα τεσσάρων ομογενών εξισώσεων, ως προς τις τέσσερες άγνωστες σταθερές  $A_1, A_2, A_3$  και  $A_4$ . Το σύστημα αυτό θα έχει μη τετριμμένη (μηδενική) λύση, μόνο για ορισμένες ιδιοτιμές του εκθέτη  $\lambda$ . Η τιμή  $\lambda = 0$  είναι μια ιδιοτιμή που ισχύει για όλες τις γωνίες  $\alpha$  της εσοχής (σφήνας), διότι το  $\lambda$  υπάρχει ως παράγοντας σ' όλες τις εξισώσεις (14.47) - (14.50). Διώχνοντας τον παράγοντα  $\lambda$  από τις (14.47) - (14.50) και με προσθέσεις και αφαιρέσεις εξισώσεων παίρνουμε

$$A_1(\lambda + 1) \sin(\lambda + 1)\alpha + A_2(\lambda - 1) \sin(\lambda - 1)\alpha = 0 \quad (14.51)$$

$$A_1(\lambda + 1) \cos(\lambda + 1)\alpha + A_2(\lambda + 1) \cos(\lambda - 1)\alpha = 0 \quad (14.52)$$

$$A_3(\lambda + 1) \cos(\lambda + 1)\alpha + A_4(\lambda - 1) \cos(\lambda - 1)\alpha = 0 \quad (14.53)$$

$$A_3(\lambda - 1) \cos(\lambda - 1)\alpha + A_4(\lambda + 1) \sin(\lambda - 1)\alpha = 0 \quad (14.54)$$

Η διαδικασία αυτή μας οδηγεί στα παρακάτω δύο ανεξάρτητα συστήματα εξισώσεων

$$\begin{bmatrix} (\lambda + 1) \sin(\lambda + 1)\alpha & (\lambda - 1) \sin(\lambda - 1)\alpha \\ (\lambda + 1) \cos(\lambda + 1)\alpha & (\lambda + 1) \cos(\lambda - 1)\alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{Bmatrix} = 0 \quad (14.55)$$

και

$$\begin{bmatrix} (\lambda + 1) \cos(\lambda + 1)\alpha & (\lambda - 1) \cos(\lambda - 1)\alpha \\ (\lambda + 1) \sin(\lambda + 1)\alpha & (\lambda + 1) \sin(\lambda - 1)\alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_3 \\ A_4 \end{Bmatrix} = 0 \quad (14.56)$$

Οι (14.55) έχουν μη τετριμμένη λύση για τους όρους  $A_1$  και  $A_2$ , αν η ορίζουσα των συντελεστών των αγνώστων είναι ίση με μηδέν, δηλαδή αν

$$\lambda \sin 2\alpha + \sin 2\lambda\alpha = 0 \quad (14.57)$$

Οι (14.56) έχουν μη τετριμμένη λύση αν

$$\lambda \sin 2\alpha - \sin 2\lambda\alpha = 0 \quad (14.58)$$

### 14.4.3 Η φύση των ιδιομορφιών

Εξ αιτίας του ενεργειακού κριτηρίου που αναφέραμε πιο πάνω, πρέπει να ισχύει ότι  $\lambda > 0$ . Θα ψάξουμε για το μικρότερο δυνατό  $\lambda$  που δίνει και την ισχυρότερη ιδιομορφή στην κορυφή της εσοχής, δηλαδή για  $r \rightarrow 0$ .

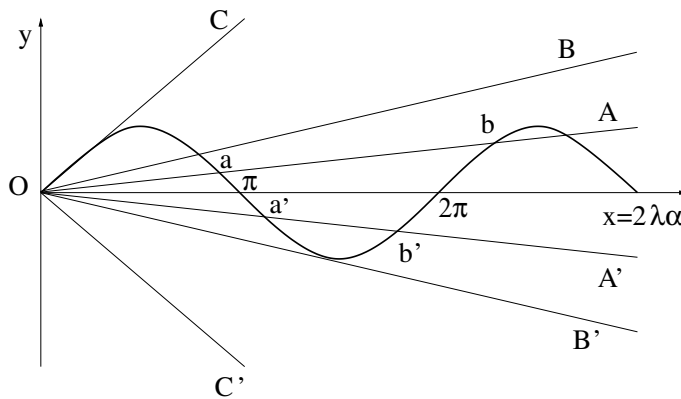
Οι (14.57) και (14.58) ικανοποιούνται για όλα τα  $\alpha$  αν  $\lambda = 0$ , ενώ η (14.58) ικανοποιείται για όλα τα  $\alpha$  αν  $\lambda = 1$ . Η λύση  $\lambda = 0$  αντιστοιχεί σε συγκεντρωμένη δύναμη που δρα στην αρχή των αξόνων, αλλά αυτή η λύση είναι χωρίς χρησιμότητα εδώ διότι θεωρούμε τις παρειές της εσοχής αφόρτιστες. Η τιμή  $\lambda = 1$  δίνει λύση μόνο για  $2\alpha = 257.4^\circ$ . Η λύση  $\lambda = 1$  της εξίσωσης (14.58) είναι μια ιδιαίτερη ιδιομορφή, διότι αν την αντικαταστήσουμε στην τασική ιδιοσυνάρτηση (14.3), λαμβάνοντας υπ' όψη και την (14.41), παίρνουμε τη μηδενική μορφή  $\phi = A_4 \sin(0)$ . Η σωστή οριακή μορφή για την τασική ιδιοσυνάρτηση, όταν  $\lambda = 1$ , προκύπτει με χρήση της τασικής συνάρτησης (14.4) και οδηγεί στη συνθήκη (14.38) για το αντισυμμετρικό πεδίο, η οποία ικανοποιείται μόνον όταν  $2\alpha = 257.4^\circ$

Για διευκόλυνση κάνουμε τη γραφική παράσταση των συναρτήσεων

$$y = \sin x = \sin 2\lambda\alpha \quad \text{ως προς} \quad x = 2\lambda\alpha \quad (14.59)$$

$$y = \pm x \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha} = \pm \lambda \sin 2\alpha \quad \text{ως προς} \quad x = 2\lambda\alpha \quad (14.60)$$

που φαίνεται στο Σχήμα 14.8. Η ημιτονοειδής γραμμή στο Σχήμα 14.8

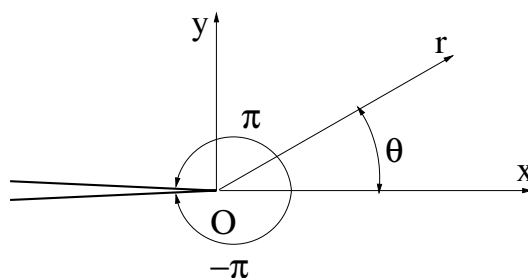


Σχήμα 14.8: Γραφήματα των συναρτήσεων  $y = \sin x = \sin 2\lambda\alpha$  και  $y = \pm x \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha} = \pm \lambda \sin 2\alpha$ .

αναφέρεται στη (14.59) ενώ οι ευθείες γραμμές αναφέρονται στη (14.60).

Η πιο απλή περίπτωση είναι όταν  $2\alpha = 2\pi$ , οπότε η σφήνα γίνεται ημιάπειρη ρωγμή (Σχήμα 14.9). Τότε ισχύει ότι

$$\sin 2\alpha = 0 \quad (14.61)$$



Σχήμα 14.9: Ημιάπειρη ρωγμή.

και οι λύσεις του συστήματος των (14.57) και (14.58) αντιστοιχούν σε σημεία όπου η ημιτονοειδής καμπύλη τέμνει τον οριζόντιο άξονα στο Σχήμα 14.8, δηλαδή όταν

$$\sin 2\lambda\pi = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots \quad (14.62)$$

Αυτό είναι ένα σημαντικό αποτέλεσμα εξ αιτίας των εφαρμογών του στη Μηχανική των Θραύσεων. Το τασικό πεδίο των (14.43) - (14.45) μπορεί να γραφτεί σαν δυναμοσειρά ιδιοσυναρτήσεων που προκύπτουν από τη (14.42), για τις τιμές του  $\lambda$  που είναι λύσεις της (14.62). Όμως κοντά στην κορυφή της εσοχής ( $r \rightarrow 0$ ), οι όροι για  $\lambda = 1, \frac{3}{2}, \dots$  μηδενίζονται ενώ παραμένει (απειριζόμενος) ο όρος που περιέχει το  $r^{\frac{1}{2}-1} = r^{-\frac{1}{2}}$ . Δηλαδή οι τάσεις στην κορυφή της εσοχής τείνουν στο άπειρο, όταν  $r \rightarrow 0$ , όπως τείνει η συνάρτησή  $r^{-\frac{1}{2}}$ . Τα σημεία  $x = \pi$  και  $x = 2\pi$  στον οριζόντιο άξονα  $x$  του Σχήματος 14.8, αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές  $\lambda = \frac{1}{2}$  και  $\lambda = 1$  αντίστοιχα.

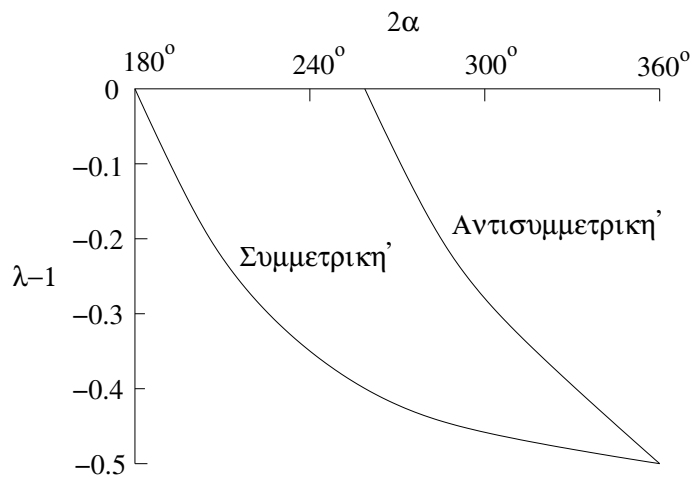
Έστω τώρα ότι εξετάζουμε μια σφήνα με γωνιακό άνοιγμα  $2\alpha$  μικρότερο από  $2\pi$ . Σ' αυτή την περίπτωση οι λύσεις των εξισώσεων (14.57) και (14.58), παριστάνονται από τα σημεία τομής της ημιτονοειδούς καμπύλης και των ευθειών  $A$  και  $A'$  αντίστοιχα (Σχήμα 14.8).

Όταν η γωνία  $2\alpha$  ελαττώνεται, η κλίση  $\frac{\sin 2\alpha}{2\alpha}$  γίνεται αρνητική και μικραίνει, μέχρι η ευθεία να πάρει την εφαπτομενική θέση ' ή τη συμμετρική της  $OB$ , για  $2\alpha = 257.4^\circ$ . Μετά η κλίση αυξάνεται, παίρνει την τιμή μηδέν όταν  $2\alpha = \pi$  που αντιστοιχεί στην περίπτωση του ημιεπιπέδου και τελικά, για  $2\alpha = 0$  η ευθεία παίρνει τις οριακές θέσεις  $C$  και  $C'$ .

Γενικά οι ευθείες γραμμές και ', αν είναι ελαφρά κεκλιμένες ως προς τον οριζόντιο άξονα, θα τμήσουν την ημιτονοειδή καμπύλη σε πεπερασμένο αριθμό σημείων, δηλαδή θα έχουμε πεπερασμένο αριθμό πραγματικών ριζών  $\lambda$ . Ο αριθμός των ριζών αυξάνεται καθώς η κλίση των ευθειών  $OA$  και  $OA'$  πλησιάζει στο μηδέν. Με αύξηση της κλίσης, ρίζες που για μηδενική κλίση απέχουν ίσες αποστάσεις μεταξύ τους, πλησιάζουν ανά δύο π. χ. οι  $a'$  και  $b'$  στο Σχήμα 14.8. Για κάθε ζεύγος

ριζών, υπάρχει μια κρίσιμη κλίση της ευθείας' (η' γίνεται τότε εφαπτομενική στην ημιτονοειδή καμπύλη) όπου οι δύο ρίζες συμπίπτουν. Για παραπέρα αύξηση της κλίσης εμφανίζονται ζεύγη συζυγών μιγαδικών ριζών.

Η ένταση  $\lambda - 1$  της ιδιομορφίας των τάσεων στην κορυφή της εσοχής, δηλαδή ο εκθέτης του  $r$  στις (14.43) - (14.45), παρουσιάζεται γραφικά, σαν συνάρτηση της γωνίας  $2\alpha$  της εσοχής, στο Σχήμα 14.10. Στο



Σχήμα 14.10: Η ένταση της ιδιομορφίας  $\lambda - 1$  των τάσεων στην αιχμή της εσοχής, σαν συνάρτηση του γωνιακού ανοίγματος  $2\alpha$  της εσοχής.

σχήμα αυτό η μια καμπύλη αντιστοιχεί στους όρους  $A_1$  και  $A_2$  που αντιστοιχούν σε συμμετρική, ως προς  $\theta = 0$ , φόρτιση και η άλλη καμπύλη αντιστοιχεί στους όρους  $A_3$  και  $A_4$  που αντιστοιχούν σε αντισυμμετρική, ως προς  $\theta = 0$ , φόρτιση. Έτσι η καμπύλη «συμμετρική» αντιστοιχεί στη λύση της (14.57) ως προς  $\lambda$ , ενώ η καμπύλη «αντισυμμετρική» αντιστοιχεί στη λύση της (14.58) ως προς  $\lambda$ . Για σφήνες, όπου  $2\alpha < \pi$  και τα δύο πεδία, συμμετρικό και αντισυμμετρικό, είναι ομαλά (χωρίς ιδιομορφία), δηλαδή ισχύει ότι  $\lambda - 1 > 0$ . Συνεπώς, εξ αιτίας των (14.43) - (14.45), οι τάσεις τείνουν στο μηδέν όταν το  $r \rightarrow 0$ .

Τα αποτελέσματα της ασυμπτωτικής ανάλυσης, δηλαδή της έκφρασης των τάσεων ως δυναμοσειρών του  $r$  και της επιλογής του κυρίαρχου όρου που κάνει την τάση ιδιόμορφη όταν  $r \rightarrow 0$ , είναι χρήσιμα στις αριθμητικές μεθόδους επίλυσης προβλημάτων. Μας δίνουν πληροφορίες για το τασικό πεδίο κοντά στο σημείο της ιδιομορφίας. Παρέχουν έτσι τη δυνατότητα στον προγραμματιστή να χρησιμοποιήσει κατάλληλα στοιχεία στην περιοχή αυτή. Αν δεν ακολουθηθεί τέτοια διαδικασία τα αριθμητικά αποτελέσματα θα είναι προβληματικά στην περιοχή της ιδιομορφίας (εξάρτηση της λύσης από πλέγμα διακριτοποίησης, αστάθεια της λύσης, αδυναμία σύγκλισης κ. λ. π.).

#### 14.4.4 Το ιδιόμορφο τασικό πεδίο

Αν  $\lambda = \lambda_S$  είναι μια ιδιοτιμή της εξίσωσης (14.57), τότε οι δύο εξισώσεις (14.51) και (14.52) δεν είναι γραμμικά ανεξάρτητες και μπορούν να ικανοποιηθούν και οι δύο επιλέγοντας

$$A_1 = A(\lambda_S - 1) \sin(\lambda_S - 1)\alpha \quad (14.63)$$

$$A_2 = -A(\lambda_S + 1) \sin(\lambda_S + 1)\alpha \quad (14.64)$$

όπου  $A$  είναι μια νέα αυθαίρετη σταθερά. Το αντίστοιχο (συμμετρικό) ιδιόμορφο τασικό πεδίο, ορίζεται από την τασική συνάρτηση

$$\phi_S = Ar^{\lambda_S+1} \{(\lambda_S - 1) \sin(\lambda_S - 1)\alpha \cos(\lambda_S + 1)\theta - (\lambda_S + 1) \sin(\lambda_S + 1)\alpha \cos(\lambda_S - 1)\theta\} \quad (14.65)$$

Με παρόμοια διαδικασία, από τις εξισώσεις (14.53) και (14.54), βρίσκουμε το αντισυμμετρικό ιδιόμορφο τασικό πεδίο, από την τασική συνάρτηση

$$\phi_A = Br^{\lambda_A+1} \{(\lambda_A + 1) \sin(\lambda_A - 1)\alpha \sin(\lambda_A + 1)\theta - (\lambda_A + 1) \sin(\lambda_A + 1)\alpha \sin(\lambda_A - 1)\theta\} \quad (14.66)$$

όπου  $\lambda_A$  είναι μια ιδιοτιμή της εξίσωσης (14.58) και  $B$  είναι αυθαίρετη σταθερά.

Για το τασικό πεδίο κοντά στο άκρο της ημιάπειρης ρωγμής (Σχήμα 14.9), οι ιδιοτιμές και των δύο συστημάτων εξισώσεων (14.57) και (14.58), δίνονται από τη σχέση (14.62). Η κυρίαρχη ιδιοτιμή μάλιστα είναι

$$\lambda_S = \lambda_A = \frac{1}{2} \quad (14.67)$$

Από τις (14.65), (14.67) και από τις (12.39) - (12.41), παίρνουμε τις εκφράσεις των τάσεων για το συμμετρικό ιδιόμορφο τασικό πεδίο κοντά στο άκρο της ρωγμής, ως

$$\sigma_{rr} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \left\{ \frac{5}{4} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - \frac{1}{4} \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right\} \quad (14.68)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \left\{ \frac{3}{4} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \frac{1}{4} \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right\} \quad (14.69)$$

$$\sigma_{r\theta} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \left\{ \frac{1}{4} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) + \frac{1}{4} \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right\} \quad (14.70)$$

όπου έχουμε εισαγάγει τη νέα σταθερά

$$K_I = 3A\sqrt{\frac{\pi}{2}} \quad (14.71)$$



που είναι γνωστή ως ο συντελεστής έντασης των τάσεων τύπου I (ανοίγματος) ρωγμής.

Όμοια από τις (14.65), (14.66) και από τις (12.39) - (12.41), παίρνουμε τις εκφράσεις των τάσεων για το αντισυμμετρικό ιδιόμορφο τασικό πεδίο κοντά στο άκρο της ρωγμής, ως

$$\sigma_{rr} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \left\{ -\frac{5}{4} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) + \frac{3}{4} \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right\} \quad (14.72)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \left\{ -\frac{3}{4} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) - \frac{3}{4} \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right\} \quad (14.73)$$

$$\sigma_{r\theta} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \left\{ \frac{1}{4} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \frac{3}{4} \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right\} \quad (14.74)$$

όπου ο συντελεστής  $K_{II}$  είναι γνωστός ως συντελεστής έντασης των τάσεων τύπου II (διάτμησης) ρωγμής.

## 14.5 Άσκηση

Δείξτε ότι η συνάρτηση

$$\phi = Ar^2\theta \quad (14.75)$$

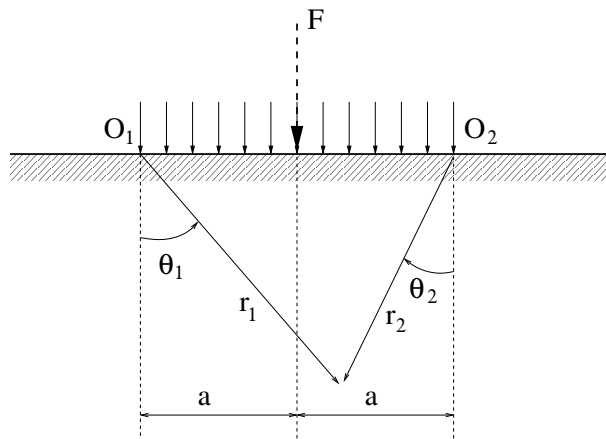
μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως τασική συνάρτηση. Μετά βρείτε τις τάσεις που δίνει η  $\phi$  στην ελεύθερη επιφάνεια ημιεπιπέδου, το οποίο καταλαμβάνει την περιοχή

$$-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \quad (14.76)$$

Τελικά δείξτε ότι η τασική συνάρτηση

$$\phi = -\frac{F}{4\pi a}(r_1^2\theta_1 + r_2^2\theta_2) \quad (14.77)$$

λύνει το πρόβλημα του ημιεπιπέδου, που δέχεται κατακόρυφο κατανεμημένο φορτίο, συνισταμένης δύναμης  $F$ , όπως φαίνεται στο Σχήμα 14.11. Τα  $r_1$ ,  $r_2$ ,  $\theta_1$  και  $\theta_2$  ορίζονται στο Σχήμα 14.11.



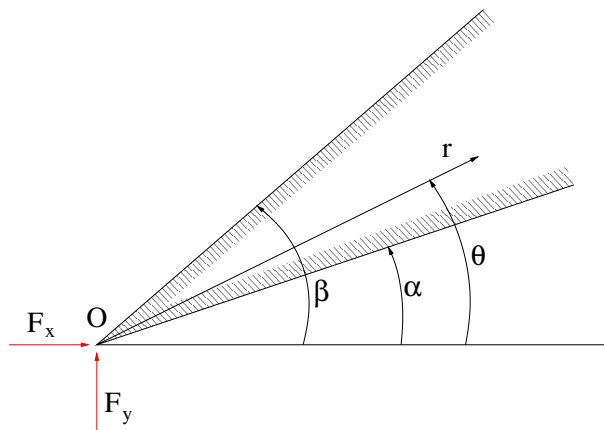
Σχήμα 14.11: Ημειπίπεδο με ομοιόμορφα καταμεμημένο φορτίο στην ελεύθερη επιφάνεια.

## Κεφάλαιο 15

# Προβλήματα επαφών στο επίπεδο

### 15.1 Ομοιότητα

Εξετάζοντας τα προβλήματα των σφηνών στο προηγούμενο κεφάλαιο, ασχοληθήκαμε με φορτίσεις είτε στις πλευρές της σφήνας είτε στο άπειρο. Μια άλλη ενδιαφέρουσα κατηγορία προβλημάτων είναι οι σφήνες με αφόρτιστες πλευρές, αλλά με συγκεντρωμένο φορτίο στην αιχμή (κορυφή) τους (Σχήμα 15.1).



Σχήμα 15.1: Σφήνα με συγκεντρωμένο φορτίο στην αιχμή της.

Ένα βασικό χαρακτηριστικό των προβλημάτων αυτών είναι ότι δεν υπάρχει εσωτερικό χαρακτηριστικό μήκος. Μια μεγεθυμένη φωτογραφία της γεωμετρίας, φαίνεται ίδια με την αρχική. Η λύση θα πρέπει να συμπεριφέρεται με παρόμοιο τρόπο, δηλαδή οι ισοϋψείς καμπύλες της τασικής συνάρτησης  $\phi$  θα πρέπει να έχουν το ίδιο γεωμετρικό σχήμα, σε όλες τις αποστάσεις από την αιχμή. Προβλήματα αυτού του τύπου,

όπου η λύση παραμένει ίδια μετά από αλλαγή της κλίμακας του μήκους, περιγράφονται ως προβλήματα ομοιότητας.

Άμεση συνέπεια της ομοιότητας είναι ότι όλες οι ποσότητες μπορούν να γραφούν με τη μορφή χωριζόμενων μεταβλητών. Π. χ. η τάση γράφεται ως

$$\sigma = f(r)g(\theta) \quad (15.1)$$

Επειδή πάνω σ' ένα κυκλικό τόξο ακτίνας  $r = a$ , το ολοκλήρωμα των τάσεων πρέπει να εξισορροπεί τη δύναμη  $F$  που ασκείται στην αιχμή της σφήνας, ανεξάρτητα από την τιμή που παίρνει το  $a$ , συμπεραίνουμε ότι  $f(r) = r^{-1}$ . Πράγματι το στοιχειώδες μήκος τόξου πάνω στο οποίο γίνεται η ολοκλήρωση είναι  $ds = r d\theta$  και

$$F = \int \sigma ds = \int \sigma r d\theta = \int r^{-1} g(\theta) r d\theta = \int g(\theta) d\theta \quad (15.2)$$

δηλαδή για οποιοδήποτε τόξο ακτίνας  $r = a$ , η συνισταμένη δύναμη των τάσεων είναι ίδια και ίση με  $F$ , όπως απαιτεί η ισορροπία.

## 15.2 Η λύση Flamant

Για να έχουμε τάσεις ανάλογες του  $r^{-1}$ , επιλέγουμε από τον Πίνακα 12.1 την τασική συνάρτηση

$$\phi = C_1 r \theta \sin \theta - C_2 r \theta \cos \theta + C_3 r \ln r \cos \theta + C_4 r \ln r \sin \theta \quad (15.3)$$

Οι τάσεις που προκύπτουν από την (14.3), εξ αιτίας των (12.39) - (12.41), είναι

$$\sigma_{rr} = r^{-1}(2C_1 \cos \theta - 2C_2 \sin \theta + C_3 \cos \theta + C_4 \sin \theta) \quad (15.4)$$

$$\sigma_{r\theta} = r^{-1}(C_3 \sin \theta - C_4 \cos \theta) \quad (15.5)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = r^{-1}(C_3 \cos \theta + C_4 \sin \theta) \quad (15.6)$$

Για να μην αναπτύσσονται τάσεις στις πλευρές της σφήνας πρέπει να έχουμε

$$\sigma_{\theta r} = \sigma_{\theta\theta} = 0 \quad \text{για} \quad \theta = \alpha, \beta \quad (15.7)$$

Η (15.7) ικανοποιείται αν

$$C_3 = C_4 = 0 \quad (15.8)$$

Για τον προσδιορισμό των υπόλοιπων σταθερών  $C_1$  και  $C_2$ , θεωρούμε την ισορροπία ενός κυκλικού τομέα στην περιοχή  $0 < r < a$  και παίρνουμε τις σχέσεις

$$F_x + 2 \int_{\alpha}^{\beta} \left( \frac{C_1 \cos \theta - C_2 \sin \theta}{a} \right) a \cos \theta d\theta = 0 \quad (15.9)$$

$$F_y + 2 \int_{\alpha}^{\beta} \left( \frac{C_1 \cos \theta - C_2 \sin \theta}{a} \right) a \sin \theta d\theta = 0 \quad (15.10)$$

### 15.3. ΤΟ ΗΜΙΕΠΙΠΕΔΟ ΜΕ ΣΥΓΚΕΝΤΡΩΜΕΝΗ ΔΥΝΑΜΗ ΣΤΗΝ ΕΛΕΥΘΕΡΗ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑ 181

Λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων (15.9) και (15.10), βρίσκουμε τις σταθερές  $C_1$  και  $C_2$ . Παρατηρούμε ότι στις (15.9) και (15.10) η ακτίνα απαλείφεται και επομένως οι (15.9) και (15.10) ικανοποιούνται, όπως αναμενόταν, για κάθε τιμή του  $r$ .

Εξ αιτίας της (15.8), οι (15.5) και (15.6) δίνουν

$$\sigma_{r\theta} = \sigma_{\theta\theta} = 0 \quad \text{για} \quad \alpha \leq \theta \leq \beta \quad (15.11)$$

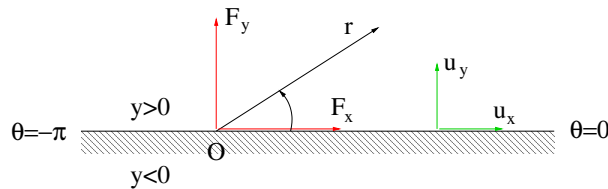
δηλαδή κάθε ακτινική επιφάνεια  $\theta = \theta_1$  ( $\alpha \leq \theta_1 \leq \beta$ ) της σφήνας δέχεται μηδενικές τάσεις. Οι μόνες μη μηδενικές τάσεις που αναπτύσσονται είναι οι

$$\sigma_{rr} = \frac{2C_1 \cos \theta}{r} - \frac{2C_2 \sin \theta}{r} \quad (15.12)$$

Η λύση στο παραπάνω πρόβλημα του σφήνα ονομάζεται λύση *Flamant* ή *απλή ακτινική κατανομή*.

### 15.3 Το ημιεπίπεδο με συγκεντρωμένη δύναμη στην ελεύθερη επιφάνεια

Αν θέσουμε  $\alpha = 0$  και  $\beta = -\pi$  στη λύση Flamant, προκύπτει η ειδική περίπτωση του ημιεπιπέδου  $y < 0$  που δέχεται συγκεντρωμένη δύναμη στην ελεύθερη επιφάνεια (Σχήμα 15.2). Οι σχέσεις (15.9) και



Σχήμα 15.2: Ημιεπίπεδο με συγκεντρωμένη δύναμη στην ελεύθερη επιφάνεια.

(15.10), για την περίπτωση του ημιεπιπέδου, δίνουν

$$F_x + 2 \int_{-\pi}^0 (C_1 \cos^2 \theta - C_2 \sin \theta \cos \theta) d\theta = F_x + \pi C_1 = 0 \quad (15.13)$$

$$F_y + 2 \int_{-\pi}^0 (C_1 \cos \theta \sin \theta - C_2 \sin^2 \theta) d\theta = F_y - \pi C_2 = 0 \quad (15.14)$$

απ' όπου προκύπτει

$$C_1 = -\frac{F_x}{\pi} \quad (15.15)$$

$$C_2 = \frac{F_y}{\pi} \quad (15.16)$$

Είναι χρήσιμο να εξεταστούν οι δύο παραπάνω όροι χωριστά.

### 15.3.1 Η κατακόρυφη συνιστώσα $F_y$ της δύναμης

Αν θεωρήσουμε ότι δρα στην ελεύθερη επιφάνεια  $y = 0$  του ημιεπιπέδου, μόνον η κάθετη σ' αυτή δύναμη  $F_y$ , τότε η (15.12) δίνει

$$\sigma_{rr} = -\frac{2F_y \sin \theta}{\pi r} \quad (15.17)$$

Η  $\sigma_{rr}$  γίνεται μέγιστη για  $\theta = -\frac{\pi}{2}$ , δηλαδή πάνω στην κατακόρυφη ευθεία που περνά από το σημείο εφαρμογής του φορτίου. Η  $\sigma_{rr}$  πάλι, μηδενίζεται για  $\theta = 0$  ή για  $\theta = -\pi$ , δηλαδή πάνω στην ελεύθερη επιφάνεια. Οι μετατοπίσεις που αντιστοιχούν στο τασικό πεδίο (15.17), προκύπτουν εύκολα από τον Πίνακα 12.2 ως

$$2\mu u_r = \frac{F_y}{2\pi} [(\kappa - 1)\theta \cos \theta - (\kappa + 1) \ln r \sin \theta + \sin \theta] \quad (15.18)$$

$$2\mu u_\theta = \frac{F_y}{2\pi} [-(\kappa - 1)\theta \sin \theta - (\kappa + 1) \ln r \cos \theta - \cos \theta] \quad (15.19)$$

Οι λύσεις (15.17)-(15.19) έχουν ενδιαφέρον διότι θα χρησιμοποιηθούν ως συναρτήσεις Green (ολοκληρωτέες συναρτήσεις μέσα σε ολοκληρώματα) για τη μελέτη προβλημάτων ημιεπιπέδου που καταπονείται με διάφορα είδη φορτίων στην ελεύθερη επιφάνεια.

Οι μετατοπίσεις στην ελεύθερη επιφάνεια έχουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον. Για  $\theta = 0$  ( $y = 0, x > 0$ ) έχουμε

$$2\mu u_r = 2\mu u_x = 0 \quad (15.20)$$

$$2\mu u_\theta = 2\mu u_y = \frac{F_y}{2\pi} [-(\kappa + 1) \ln r - 1] \quad (15.21)$$

ενώ για  $\theta = -\pi$  ( $y = 0, x < 0$ ) έχουμε

$$2\mu u_r = -2\mu u_x = (\kappa - 1) \frac{F_y}{2} \quad (15.22)$$

$$2\mu u_\theta = -2\mu u_y = \frac{F_y}{2\pi} [(\kappa + 1) \ln r + 1] \quad (15.23)$$

Για την επίτευξη συμμετρίας στη λύση, όπως απαιτεί το φυσικό πρόβλημα, προσθέτουμε τις μετατοπίσεις στερεού σώματος

$$2\mu u_x = \frac{F_y(\kappa - 1)}{4} \quad (15.24)$$

$$2\mu u_y = \frac{F_y}{2\pi} \quad (15.25)$$

στις (15.18) και (15.19) αντίστοιχα. Έτσι οι (15.20) - (15.23) τελικά γίνονται

$$u_x = \frac{F_y(\kappa - 1) \operatorname{sgn}(x)}{8\mu} \quad (15.26)$$

$$u_y = -\frac{F_y(\kappa + 1) \ln |x|}{4\pi\mu} \quad (15.27)$$

όπου

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} +1 & \text{για } x > 0 \\ -1 & \text{για } x < 0 \end{cases} \quad (15.28)$$

Σημειώνεται ότι  $r = |x|$  πάνω στην ελεύθερη επιφάνεια  $y = 0$ .

### 15.3.2 Η οριζόντια συνιστώσα $F_x$ της δύναμης

Η οριζόντια συνιστώσα  $F_x$  της δύναμης παράγει το τασικό πεδίο

$$\sigma_{rr} = -\frac{2F_x \cos \theta}{\pi r} \quad (15.29)$$

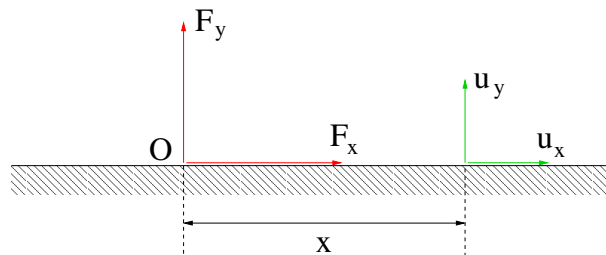
Από τον Πίνακα 12.2, με πρόσθεση κατάλληλων μετατοπίσεων στερεού σώματος, οι μετατοπίσεις στην ελεύθερη επιφάνεια εξ αιτίας της δράσης της  $F_x$  μόνο, γίνονται

$$u_x = -\frac{F_x(\kappa + 1) \ln |x|}{4\pi\mu} \quad (15.30)$$

$$u_y = -\frac{F_x(\kappa - 1)\text{sgn}(x)}{8\mu} \quad (15.31)$$

### 15.3.3 Το συνδυασμένο πεδίο των $F_y$ και $F_x$

Η αρχή της επαλληλίας μας επιτρέπει να προσθέσουμε τις μετατοπίσεις (15.26) και (15.30) και τις (15.27) και (15.31), έτσι ώστε να προκύψουν οι μετατοπίσεις σε μια θέση  $x$  της ελεύθερης επιφάνειας (Σχήμα 15.3), εξ αιτίας της ταυτόχρονης δράσης των  $F_x$  και  $F_y$ . Οι μετατοπίσεις



Σχήμα 15.3: Μετατοπίσεις στην ελεύθερη επιφάνεια, σε απόσταση  $x$  από το σημείο εφαρμογής της δύναμης.

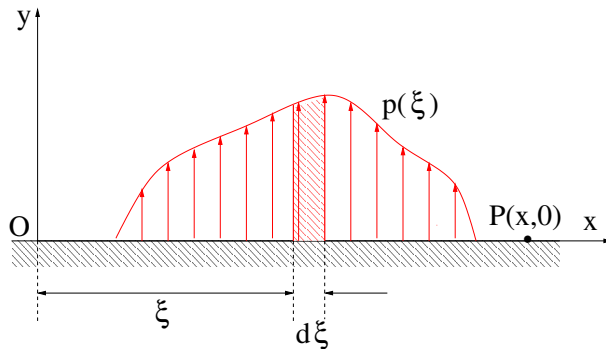
αυτές είναι

$$u_x = -\frac{F_x(\kappa + 1) \ln |x|}{4\pi\mu} + \frac{F_y(\kappa - 1)\text{sgn}(x)}{8\mu} \quad (15.32)$$

$$u_y = -\frac{F_x(\kappa - 1)\text{sgn}(x)}{8\mu} - \frac{F_y(\kappa + 1) \ln |x|}{4\pi\mu} \quad (15.33)$$

## 15.4 Καταναμημένο κατακόρυφο φορτίο

Έστω καταναμημένο κατακόρυφο φορτίο, έντασης  $p(\xi)$  ανά μονάδα μήκους  $\xi$ , που εφαρμόζεται στην ελεύθερη επιφάνεια του ημιεπιπέδου (Σχήμα 15.4). Σε απειροστό μήκος  $d\xi$  η συνισταμένη ασκούμενη



Σχήμα 15.4: Καταναμημένο κατακόρυφο φορτίο στην ελεύθερη επιφάνεια ημιεπιπέδου.

δύναμη είναι ίση με  $p(\xi)d\xi$  και μπορεί να θεωρηθεί ως συγκεντρωμένη δύναμη, διότι  $d\xi \rightarrow 0$ . Το πεδίο των τάσεων και των μετατοπίσεων εξ αιτίας του καταναμημένου φορτίου  $p(\xi)$ , μπορεί να προκύψει με επαλληλία, χρησιμοποιώντας τη λύση Flamant ως συνάρτηση Green, δηλαδή θεωρώντας το καταναμημένο φορτίο, οριακά ως άθροισμα συγκεντρωμένων φορτίων μεταβαλλόμενου μεγέθους  $p(\xi)d\xi$ .

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον έχει η μετατόπιση  $u_y$ , στην ελεύθερη επιφάνεια  $y = 0$ . Εξ αιτίας της (15.27), η μετατόπιση  $u_y$  στο σημείο  $P(x, 0)$ , δίνεται από τη σχέση

$$u_y = -\frac{\kappa + 1}{4\pi\mu} \int_A p(\xi) \ln|x - \xi| d\xi \quad (15.34)$$

όπου  $A$  είναι η επιφάνεια πάνω στην οποία το καταναμημένο φορτίο  $p(\xi)$  δρα. Η  $A$  θεωρείται ως γραμμή, π. χ. από  $\xi = a$  έως  $\xi = b$ , με μοναδιαίο πάχος κάθετα στο χαρτί.

Η (15.34) δείχνει ότι η μετατόπιση  $u_y \rightarrow \infty$  όταν  $x \rightarrow \infty$ . Γενικά σε αποστάσεις  $r \gg A$ , τα πεδία τάσεων και μετατοπίσεων προσεγγίζουν αυτά που παράγονται από συγκεντρωμένες δυνάμεις και δίνονται από τις σχέσεις (15.17) - (15.19), εξ αιτίας μόνο κατακόρυφης δύναμης στην ελεύθερη επιφάνεια. Έτσι οι τάσεις θα φθίνουν όπως η συνάρτηση  $\frac{1}{r}$  και οι μετατοπίσεις θα μεταβάλλονται λογαριθμικά.

Η λύση (15.34) για το ημιεπίπεδο μπορεί να χρησιμοποιηθεί και σε σώματα με πεπερασμένες διαστάσεις, όταν το μήκος  $A$  της επιφάνειας



επαφής φορτίου - σώματος, είναι πολύ μικρότερο από τις διαστάσεις του σώματος.

Εξ αιτίας των μη φραγμένων μετατοπίσεων στο άπειρο, μετατοπίσεις στερεού σώματος δε μπορούν να βρεθούν στο άπειρο. Για να αποφευχθούν τέτοιες δυσκολίες, συχνά χρησιμοποιείται η βαθμίδα της μετατόπισης στην κατάστρωση προβλημάτων στο ημιεπίπεδο. Έτσι η (15.34) δίνει

$$\frac{du_y}{dx} = -\frac{\kappa + 1}{4\pi\mu} \int_A \frac{p(\xi)d\xi}{x - \xi} \quad (15.35)$$

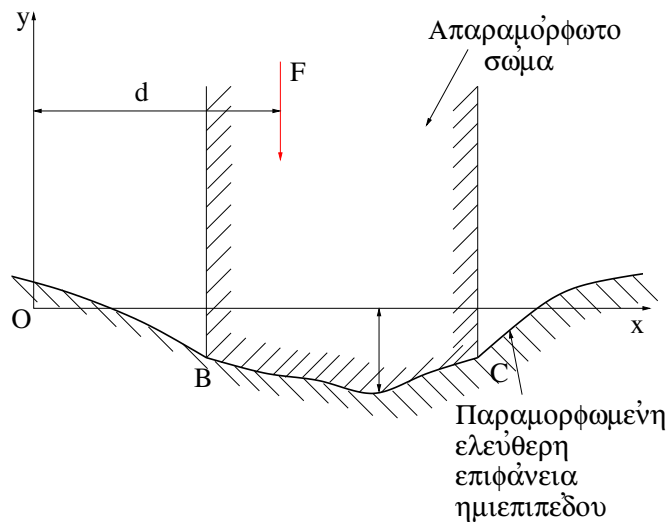
Όταν το σημείο  $x$  βρίσκεται μέσα στο διάστημα  $A$ , το ολοκλήρωμα στην (15.35) γίνεται *ιδιόμορφο* και θεωρείται ως η *πρωτεύουσα τιμή του ολοκληρώματος Cauchy*, δηλαδή

$$\int_a^b \frac{p(\xi)d\xi}{x - \xi} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left( \int_a^{x-\epsilon} \frac{p(\xi)d\xi}{x - \xi} + \int_{x+\epsilon}^b \frac{p(\xi)d\xi}{x - \xi} \right) \quad (15.36)$$

όπου  $a < x < b$ .

## 15.5 Προβλήματα επαφών χωρίς τριβή

Τα αποτελέσματα που παρουσιάστηκαν προηγούμενα, μας επιτρέπουν να βρούμε τη λύση για ένα ημιεπίπεδο, στο οποίο διεισδύει ένα अपαραμόρφωτο σώμα (διεισδυτής), που έχει δεδομένο σχήμα (Σχήμα 15.5). Θεωρούμε ότι δεν αναπτύσσονται τριβές μεταξύ του απαραμόρ-



Σχήμα 15.5: Απαραμόρφωτος διεισδυτής στην ελεύθερη επιφάνεια ημιεπιπέδου.

φωτου διεισδυτή και του ημιεπιπέδου.

Έστω  $A$  η επιφάνεια επαφής μεταξύ του अपαραμόρφωτου διεισδυτή και του ημιεπιπέδου, δηλαδή το τμήμα από το  $B$  ως το  $C$  (Σχήμα 15.5). Στην επιφάνεια  $A$ , η μετατόπιση  $u_y$  του ημιεπιπέδου δίνεται από τη σχέση

$$u_y = -u_0(x) + C_1x + C_0 \quad (15.37)$$

όπου  $u_0(x)$  είναι μια γνωστή συνάρτηση που περιγράφει το σχήμα του, γενικά μη - επίπεδου, μετώπου  $BC$  του απαραμόρφωτου διεισδυτή. Οι σταθερές  $C_1$  και  $C_0$  εκφράζουν στροφή και μετατόπιση στερεού σώματος αντίστοιχα, του διεισδυτή. Αν  $F$  είναι η δύναμη που εφαρμόζεται εξωτερικά στο διεισδυτή, τότε εξ αιτίας της ισορροπίας δυνάμεων και ροπών στο διεισδυτή, ισχύουν οι σχέσεις

$$\int_A p(\xi) d\xi = -F \quad (15.38)$$

$$\int_A p(\xi) \xi d\xi = -Fd \quad (15.39)$$

όπου  $p(\xi)$  είναι η κατανομή της πίεσης στην επιφάνεια  $A$  και  $d$  είναι η απόσταση του άξονα της  $F$  από την αρχή του συστήματος αναφοράς  $O$ . Από τις (15.38) και (15.39) μπορούν να προσδιοριστούν οι σταθερές  $C_0$  και  $C_1$ .

Αν η αρχή του συστήματος συντεταγμένων τοποθετηθεί στο μέσο της επιφάνειας επαφής  $A$ , με το μισό του μήκους της επιφάνειας επαφής να συμβολίζεται με  $a$ , τότε οι σχέσεις (15.35) και (15.37), δίνουν

$$-\frac{du_0}{dx} + C_1 = -\frac{\kappa + 1}{4\pi\mu} \int_{-a}^a \frac{p(\xi) d\xi}{x - \xi} \quad (15.40)$$

για  $-a < x < a$ . Η (15.40) έχει τη μορφή *ιδιόμορφης ολοκληρωτικής εξίσωσης Cauchy* με άγνωστη την κατανομή της πίεσης  $p(\xi)$ .

### 15.5.1 Μέθοδος επίλυσης της ιδιόμορφης ολοκληρωτικής εξίσωσης Cauchy

Ολοκληρωτικές εξισώσεις αυτού του είδους εμφανίζονται σε εφαρμογές μεθόδων μιγαδικών μεταβλητών, σε προβλήματα δυναμικού στο επίπεδο. Τέτοιες εξισώσεις μελετήθηκαν εκτενώς από τον Muskhelishvili [5], ενώ ειδικά οι εφαρμογές τους σε προβλήματα της ελαστικότητας αναλύονται από τον Muskhelishvili [6]. Με πιο απλές λύσεις ιδιόμορφων ολοκληρωτικών εξισώσεων ασχολείται και ο Johnson [4].

Για την επίλυση της εξίσωσης (15.40), κάνουμε την παρακάτω αλλαγή μεταβλητών

$$x = a \cos \phi \quad (15.41)$$

$$\xi = a \cos \theta \quad (15.42)$$

και η (15.40) παίρνει τη μορφή

$$\frac{1}{a \sin \phi} \frac{du_0}{d\phi} + C_1 = -\frac{\kappa + 1}{4\pi\mu} \int_0^\pi \frac{p(\theta) \sin \theta d\theta}{\cos \phi - \cos \theta} \quad (15.43)$$

όπου  $0 < \phi < \pi$ . Αναπτύσσουμε κατόπιν τις συναρτήσεις  $\frac{du_0(\phi)}{d\phi}$  και  $p(\theta)$  σε σειρά Fourier ως

$$p(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p_n \cos n\theta}{\sin \theta} \quad (15.44)$$

$$\frac{du_0(\phi)}{d\phi} = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \sin n\phi \quad (15.45)$$

όπου  $p_n$  και  $u_n$  είναι συντελεστές. Παίρνοντας υπ' όψη το γνωστό αποτέλεσμα

$$\int_0^\pi \frac{\cos n\theta d\theta}{\cos \phi - \cos \theta} = -\frac{\pi \sin n\phi}{\sin \phi} \quad (15.46)$$

η (15.43), εξ αιτίας των (15.44) και (15.45), γίνεται

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} u_n \sin(n\phi) + C_1 a \sin \phi &= \frac{(\kappa + 1)a \sin \phi}{4\pi\mu} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi p_n \sin(n\phi)}{\sin \phi} \\ &= \frac{(\kappa + 1)a}{4\mu} \sum_{n=1}^{\infty} p_n \sin(n\phi) \end{aligned} \quad (15.47)$$

και από την τελευταία παίρνουμε

$$p_n = \frac{4\mu u_n}{(\kappa + 1)a} \quad \text{για } n > 1 \quad (15.48)$$

$$p_1 = \frac{4\mu(C_1 a + u_1)}{(\kappa + 1)a} \quad (15.49)$$

Επειδή οι συντελεστές  $u_n$ , είναι γνωστοί από το ανάπτυγμα σε σειρά Fourier της (15.45), οι συντελεστές  $p_n$  του αναπτύγματος της πίεσης του διεισδυτή στο ημιεπίπεδο, μπορούν να βρεθούν από τη (15.48), για όλα τα  $n > 1$  αλλά όχι για  $n = 0, 1$ .

Οι δύο συντελεστές  $p_0$  και  $p_1$  υπολογίζονται χρησιμοποιώντας τη σχέση (15.44), στις εξισώσεις ισορροπίας (15.38) και (15.39). Έτσι από

τις (15.38) και (15.39) παίρνουμε

$$-F = \int_{-a}^a p(x') dx' = \int_0^\pi p(\theta) a \sin \theta d\theta = a \sum_{n=0}^{\infty} p_n \int_0^\pi \cos(n\theta) d\theta = \pi a p_0 \implies p_0 = -\frac{F}{\pi a} \quad (15.50)$$

$$-Fd = \int_{-a}^a p(x') x' dx' = \int_0^\pi p(\theta) a^2 \sin \theta \cos \theta d\theta = a^2 \sum_{n=0}^{\infty} p_n \int_0^\pi \cos \theta \cos(n\theta) d\theta = \frac{\pi a^2 p_1}{2} \implies p_1 = -\frac{2Fd}{\pi a^2} \quad (15.51)$$

Η στροφή στερεού σώματος  $C_1$  του διεισδυτή, υπολογίζεται μετά από τις (15.49) και (15.51) ως

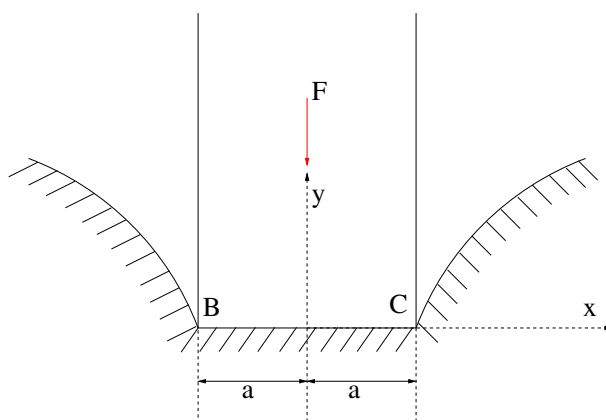
$$C_1 = -\frac{Fd(\kappa + 1)}{2\pi\mu a^2} - \frac{u_1}{a} \quad (15.52)$$

Εναλλακτικά αν ο διεισδυτής κινείται κατακόρυφα χωρίς να στρέφεται, η σταθερά  $C_1$  ισούται με μηδέν και η (15.52) δίνει

$$Fd = -\frac{2\pi\mu u_1 a}{\kappa + 1} \quad (15.53)$$

### 15.5.2 Διεισδυτής με επίπεδο οριζόντιο μέτωπο

Έστω ότι ο ορθογώνιος απαραμόρφωτος διεισδυτής του Σχήματος 15.6, φορτίζεται στο μέσο του μετώπου του με κατακόρυφη δύναμη  $F$ , έτσι ώστε να υπάρχει συμμετρία ως προς τον άξονα  $y$ . Το μέτωπο BC



Σχήμα 15.6: Ορθογώνιος διεισδυτής με κεντρική κατακόρυφη δύναμη  $F$ .

του διεισδυτή περιγράφεται από τις εξισώσεις

$$u_0(x) = C \quad (15.54)$$

$$\frac{du_0(x)}{dx} = 0 \quad (15.55)$$

και η (15.48) δίνει

$$p_n = 0 \quad \text{για} \quad n > 1 \quad (15.56)$$

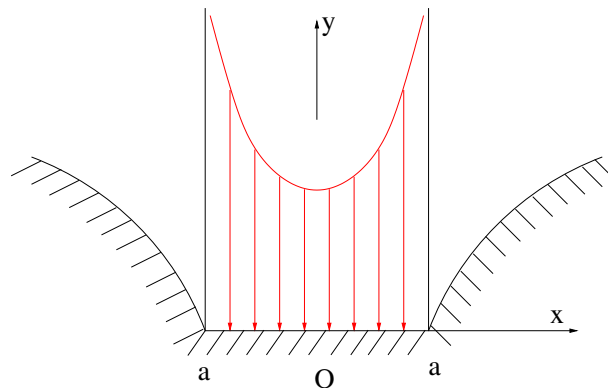
Επειδή το φορτίο είναι συμμετρικό, ισχύει ότι  $d = 0$  και η (15.51) δίνει

$$p_1 = 0 \quad (15.57)$$

ενώ το  $p_0$  δίνεται από την (15.50). Έτσι η (15.44), εξ αιτίας των (15.56), (15.57) και (15.50) δίνει

$$p(x) = \frac{p_0}{\sin \phi} = -\frac{F}{\pi a \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}} = -\frac{F}{\pi \sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{F}{\pi \sqrt{a-x} \sqrt{a+x}} \quad (15.58)$$

Παρατηρούμε από τη (15.58) ότι στα ακραία γωνιακά σημεία B και C του μετώπου του διεισδυτή, έχουμε ιδιομορφία τετραγωνικής ρίζας, στο διάνυσμα τάσης  $p(x)$ . Η λύση (15.58) είναι τυπική για προβλήματα διείσδυσης όπου ο διεισδυτής έχει γωνία σε ακραίο σημείο του μετώπου διείσδυσης. Η λύση (15.58) παριστάνεται γραφικά στο Σχήμα 15.7.

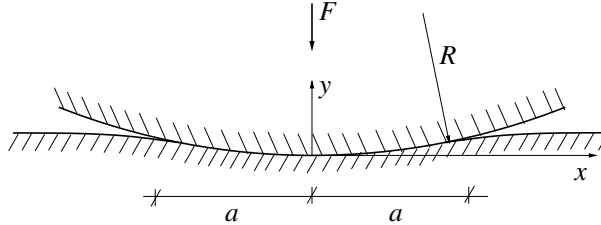


Σχήμα 15.7: Η κατανομή της πίεσης  $p(x)$  στην επιφάνεια επαφής με ταξύ ορθογώνιου, κεντρικά φορτιζόμενου, διεισδυτή και ημιεπιπέδου.

### 15.5.3 Διεισδυτής με κυλινδρικό μέτωπο

Θεωρούμε τη διείσδυση ενός απαραμόρφωτου κυλίνδρου ακτίνας  $R$ , στο ημιεπίπεδο (Σχήμα 15.8). Η διείσδυση γίνεται υπό την επίδραση

κεντρικής κατακόρυφης δύναμης  $F$ . Το πρόβλημα αυτό διαφέρει από



Σχήμα 15.8: Διείσδυση απαραμόρφωτου κυλίνδρου στο ημιεπίπεδο.

το προηγούμενο πρόβλημα του διεισδυτή με οριζόντιο επίπεδο μέτωπο, διότι εδώ το μήκος επαφής  $2a$  μεταξύ του κυλίνδρου και του ημιεπιπέδου, είναι άγνωστο.

Για μικρό βάθος διείσδυσης, η καμπυλότητα του μετώπου του διεισδυτή δίνεται από τη σχέση

$$\frac{d^2 u_0}{dx^2} = -\frac{1}{R} \quad (15.59)$$

και ολοκληρώνοντας παίρνουμε

$$u_0 = C_0 - \frac{x^2}{2R} = C_0 - \frac{a^2 \cos 2\phi}{4R} - \frac{a^2}{4R} \quad (15.60)$$

Από τη (15.60), προκύπτει ότι

$$\frac{du_0}{d\phi} = \frac{a^2 \sin 2\phi}{2R} \quad (15.61)$$

και ο μοναδικός μη μηδενικός συντελεστής της σειράς (15.45) είναι ο

$$u_2 = \frac{a^2}{2R} \quad (15.62)$$

Από τη (15.48), εξ αιτίας της (15.62), προκύπτει ότι

$$p_2 = \frac{2\mu a}{R(\kappa + 1)} \quad (15.63)$$

Επειδή το φορτίο είναι κεντρικό, έχουμε ότι  $d = 0$  και από τη (15.51) προκύπτει ότι  $p_1 = 0$ . Το  $p_0$  δίνεται από τη (15.50) και έτσι η (15.44) δίνει

$$p(\theta) = \frac{-\frac{F}{\pi a} + \frac{2\mu a}{R(\kappa + 1) \cos 2\theta}}{\sin \theta} \quad (15.64)$$

Η έκφραση στο δεξί μέλος της (15.64), γίνεται ιδιόμορφη όταν  $\theta = 0, \pi$  ή ισοδύναμα όταν  $x = \pm a$ . Για να μη συμβεί αυτό θα πρέπει να ισχύει

$$\frac{F}{\pi a} = \frac{2\mu a}{R(\kappa + 1)} \Rightarrow a = \sqrt{\frac{F(\kappa + 1)R}{2\pi\mu}} \quad (15.65)$$

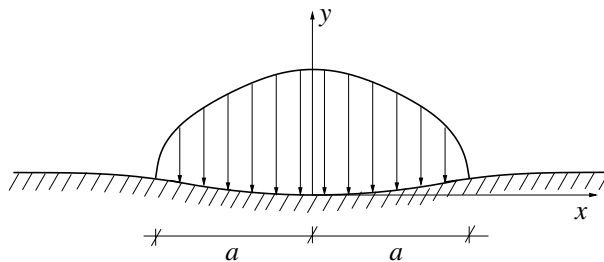
Εξ αιτίας της (15.65), η (15.64) δίνει

$$p(\theta) = -\frac{F(1 - \cos 2\theta)}{\pi a \sin \theta} = -\frac{2F \sin \theta}{\pi a} \quad (15.66)$$

ή ισοδύναμα

$$p(x) = -\frac{2F\sqrt{a^2 - x^2}}{\pi a^2} \quad (15.67)$$

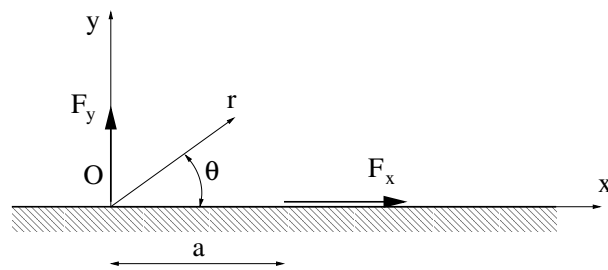
Η ελλειπτική κατανομή της πίεσης στην επιφάνεια επαφής, φαίνεται στο Σχήμα 15.9.



Σχήμα 15.9: Η κατανομή της πίεσης στην επιφάνεια επαφής.

## 15.6 Άσκηση

Να βρεθεί η τάση  $\sigma_{rr}$  στο ημιεπίπεδο του σχήματος, που φορτίζεται με κατακόρυφη δύναμη  $F_y$  και οριζόντια δύναμη  $F_x$ , στην ελεύθερη επιφάνεια. Τα σημεία εφαρμογής των δύο δυνάμεων απέχουν απόσταση  $a$  μεταξύ τους (Σχήμα 15.10).



Σχήμα 15.10: Ημιεπίπεδο με κατακόρυφη και οριζόντια συγκεντρωμένη δύναμη στην ελεύθερη επιφάνεια.



## Κεφάλαιο 16

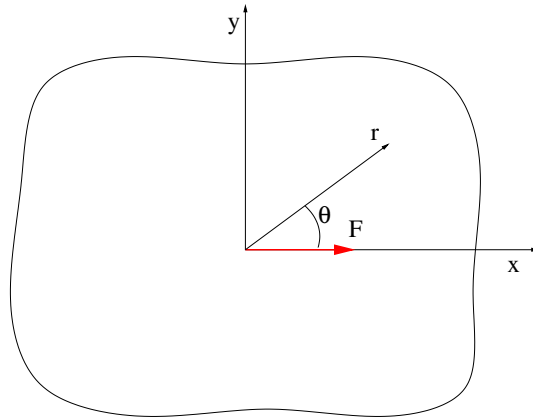
# Συγκεντρωμένες δυνάμεις, εξαρμώσεις και ρωγμές

Στο κεφάλαιο αυτό θα εξετάσουμε δύο λύσεις που είναι ιδιόμορφες σε εσωτερικό σημείο ενός σώματος και εκφράζουν το τασικό πεδίο εξ αιτίας μιας συγκεντρωμένης δύναμης (λύση *Kelvin*) και εξ αιτίας μιας *εξάρμωσης*. Και οι δύο λύσεις έχουν ιδιομορφία με εκθέτη  $-1$  και γι αυτό δεν είναι αποδεκτές, σύμφωνα με το ενεργειακό κριτήριο. Όμως μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως συναρτήσεις Green για την περιγραφή κατανομών σε ολοκληρώματα συνέλιξης. Στα ολοκληρώματα αυτά, η ολοκλήρωση μπορεί να γίνει παρά την ύπαρξη της ιδιομορφίας. Η λύση Kelvin είναι επίσης χρήσιμη διότι μπορεί να περιγράψει και το τασικό πεδίο εξ αιτίας μιας κατανεμημένης φόρτισης, σε σημεία μακριά από τη φορτιζόμενη περιοχή, όταν η επιφάνεια φόρτισης είναι μικρή.

### 16.1 Η λύση Kelvin

Θεωρούμε επίπεδο σώμα άπειρων διαστάσεων, που καταπονείται με δύναμη  $F$  κατά τη διεύθυνση  $x$ , στην αρχή των αξόνων (Σχήμα 16.1). Εξ αιτίας της συμμετρίας ως προς τον άξονα  $\theta = 0$ , επιλέγουμε μόνο τους όρους που δίνουν συμμετρικές ορθές τάσεις  $\sigma_{rr}$  και  $\sigma_{\theta\theta}$  ως προς  $\theta = 0$ , από τη λύση Flamant (14.3). Έτσι παίρνουμε την τασική συνάρτηση

$$\phi = C_1 r \theta \sin \theta + C_3 r \ln r \cos \theta \quad (16.1)$$



Σχήμα 16.1: Συγκεντρωμένη δύναμη σε επίπεδο σώμα άπειρων διαστάσεων.

που δίνει τις τάσεις

$$\sigma_{rr} = \frac{2C_1 \cos \theta}{r} + \frac{C_3 \cos \theta}{r} \quad (16.2)$$

$$\sigma_{r\theta} = \frac{C_3 \sin \theta}{r} \quad (16.3)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{C_3 \cos \theta}{r} \quad (16.4)$$

είτε από τις σχέσεις (14.4) - (14.6) είτε από τον Πίνακα 12.1. Από τον Πίνακα 12.2, οι αντίστοιχες μετατοπίσεις είναι

$$2\mu u_r = \frac{C_1}{2} [(\kappa - 1)\theta \sin \theta - \cos \theta + (\kappa + 1) \ln r \cos \theta] + \frac{C_3}{2} [(\kappa + 1)\theta \sin \theta - \cos \theta + (\kappa - 1) \ln r \cos \theta] \quad (16.5)$$

$$2\mu u_\theta = \frac{C_1}{2} [(\kappa - 1)\theta \cos \theta - \sin \theta - (\kappa + 1) \ln r \sin \theta] + \frac{C_3}{2} [(\kappa + 1)\theta \cos \theta - \sin \theta - (\kappa - 1) \ln r \sin \theta] \quad (16.6)$$

Έστω ότι κάνουμε μια φανταστική εγκοπή κατά μήκος του άξονα  $\theta = 0, 2\pi$  και ορίζουμε την πρωτεύουσα τιμή του  $\theta$  στο διάστημα  $0 \leq \theta < 2\pi$ . Ενώ οι τριγωνομετρικοί αριθμοί  $\sin \theta$  και  $\cos \theta$  παραμένουν συνεχείς για  $\theta = 0, 2\pi$ , η ποσότητα  $\theta \cos \theta$  παρουσιάζει ασυνέχεια για  $\theta = 0, 2\pi$ . Έτσι όταν  $\theta = 0$  έχουμε ότι  $\theta \cos \theta = 0$ , ενώ για  $\theta = 2\pi$  έχουμε ότι  $\theta \cos \theta = 2\pi$ . Επομένως, όπως φαίνεται από τη (16.6), η μετατόπιση  $u_\theta$  παρουσιάζει ασυνέχεια πάνω στον άξονα  $\theta = 0, 2\pi$ .

Μπορούμε να ακυρώσουμε την ασυνέχεια αυτή, επιλέγοντας τις σταθερές  $C_1$  και  $C_3$  έτσι, ώστε οι όροι που περιέχουν το  $\theta \cos \theta$  στην έκ-

φραση της  $u_\theta$  να αλληλοαναιρούνται. Αυτό μπορεί να επιτευχθεί απαιτώντας

$$C_1(\kappa - 1) + C_3(\kappa + 1) = 0 \quad (16.7)$$

ή για επίπεδη ένταση

$$(1 - \nu)C_1 + 2C_3 = 0 \quad (16.8)$$

Έτσι οι άγνωστες σταθερές μειώνονται από δύο σε μια. Η σταθερά αυτή θα βρεθεί από την ισορροπία δυνάμεων σε μια περιοχή γύρω από την αρχή των αξόνων. Από την ισορροπία ενός κυκλικού δίσκου ακτίνας  $r$ , γύρω από την αρχή των αξόνων, έχουμε

$$F + \int_0^{2\pi} (\sigma_{rr} \cos \theta - \sigma_{r\theta} \sin \theta) r d\theta = 0 \xrightarrow{(16.2), (16.3), (16.7)} C_1 = -\frac{F}{2\pi} \quad (16.9)$$

και από τη (16.8) βρίσκουμε

$$C_3 = \frac{(1 - \nu)F}{4\pi} \quad (16.10)$$

για επίπεδη ένταση. Εξ αιτίας των (16.9) και (16.10), οι (16.2) - (16.4) γίνονται

$$\sigma_{rr} = \frac{(3 + \nu)F \cos \theta}{4\pi r} \quad (16.11)$$

$$\sigma_{r\theta} = \frac{(1 - \nu)F \sin \theta}{4\pi r} \quad (16.12)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{(1 - \nu)F \cos \theta}{4\pi r} \quad (16.13)$$

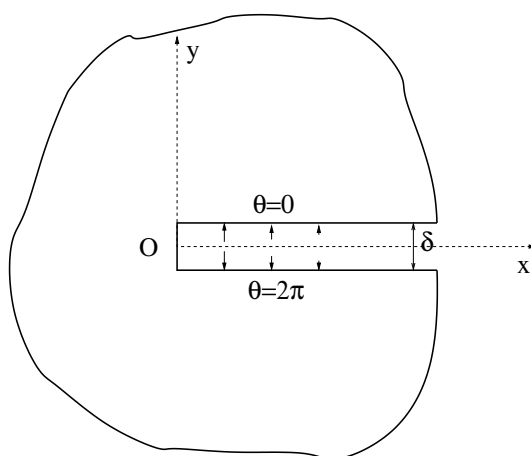
Οι (16.11) - (16.13) αποτελούν τη λύση *Kelvin*. Το αντίστοιχο αποτέλεσμα για μια δύναμη που δρα στην αρχή των αξόνων κατά τη διεύθυνση  $y$ , μπορεί να βρεθεί με παρόμοιο τρόπο, χρησιμοποιώντας τους όρους της (14.3) που δίνουν συμμετρικές ορθές τάσεις ως προς τον άξονα  $y$ . Εναλλακτικά, μπορούμε να στρέψουμε το σύστημα των αξόνων της

παραπάνω λύσης, θέτοντας όπου  $\theta$  το  $\theta - \frac{\pi}{2}$ .

## 16.2 Εξαρμώσεις (Dislocations)

Στην κλασσική Ελαστικότητα θεωρούμε ότι τα σώματα που εξετάζουμε είναι συνεχή, δηλαδή έχουν την ιδιότητα να διαιρούνται (τεμαχίζονται) άπειρες φορές. Θεωρούμε ένα συνεχές μέσο απείρων διαστάσεων και κάνουμε μια τομή κατά μήκος του ημιεπιπέδου  $x > 0$ ,  $y = 0$ . Μετά εφαρμόζουμε ίσα και αντίθετα διανύσματα τάσης στις δύο

πλευρές της εγκοπής (Σχήμα 16.2), έτσι ώστε να δημιουργήσουμε ένα άνοιγμα σταθερού πάχους, καθ' όλο το μήκος του θετικού ημιάξονα  $x$ . Μετά εισάγουμε στο κενό που δημιουργήθηκε μια λεπτή φέτα του ίδιου υλικού, η οποία καλύπτει πλήρως το κενό, κρατώντας τις πλευρές της εγκοπής μακριά τη μια από την άλλη. Η νεοεισαχθείσα φέτα συγκολλιέται στις πλευρές της εγκοπής. Έτσι δημιουργείται ένα νέο συνεχές μέσο, στο οποίο έχουν δημιουργηθεί παραμένουσες τάσεις. Η απομάκρυνση των δύο επιφανειών του ανοίγματος λέγεται *εξάρμωση* (*dislocation*) και το εντατικό πεδίο που δημιουργείται ονομάζεται *λύση εξάρμωσης* (*dislocation solution*).



Σχήμα 16.2: Η αναρριχητική εξάρμωση (climb dislocation)

Οι τάσεις αυτές μπορούν να βρεθούν με χρήση της τασικής συνάρτησης που χρησιμοποιήθηκε για τη συγκεντρωμένη δύναμη σε μέσο άπειρων διαστάσεων. Απαιτώντας η δύναμη που ασκείται στην αρχή των αξόνων να είναι μηδενική, δηλαδή  $C_1 = 0$ , παίρνουμε

$$\phi = C_3 r \ln r \cos \theta \quad (16.14)$$

Το μέγεθος των τάσεων που προκαλεί η δημιουργία της εξάρμωσης εξαρτάται από την ασυνέχεια στη μετατόπιση  $u_\theta$  πάνω στη γραμμή  $\theta = 0, 2\pi$ . Η ασυνέχεια αυτή, έχει ίδιο πάχος με την επί πλέον φέτα υλικού που εισήχθη, για την αποκατάσταση της συνέχειας του υλικού. Το πάχος της ασυνέχειας είναι

$$\delta = u_\theta(0) - u_\theta(2\pi) = -\frac{\pi(\kappa + 1)C_3}{2\mu} = -\frac{2\pi C_3}{\mu(1 + \nu)} \quad (16.15)$$

για την περίπτωση της επίπεδης έντασης.

Έτσι μπορούμε να ορίσουμε μια *εξάρμωση* με ασυνέχεια στη μετατόπιση  $\delta = B_y$ . Το άλμα αυτό στη μετατόπιση αντιστοιχεί σε σταθερά

$$C_3 = -\frac{B_y \mu (1 + \nu)}{2\pi} \quad (16.16)$$

και δίνει το τασικό πεδίο

$$\sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta} = -\frac{B_y \mu (1 + \nu) \cos \theta}{2\pi r} \quad (16.17)$$

$$\sigma_{r\theta} = -\frac{B_y \mu (1 + \nu) \sin \theta}{2\pi r} \quad (16.18)$$

Πάνω στον άξονα των  $x$ , δηλαδή για  $y = 0$  ή  $\theta = 0, \pi$ , οι τάσεις σε καρτεσιανές συντεταγμένες δίνονται από τις σχέσεις

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = -\frac{B_y \mu (1 + \nu)}{2\pi x} \quad (16.19)$$

$$\sigma_{xy} = 0 \quad (16.20)$$

Η παραπάνω λύση που δίνεται από τις σχέσεις (16.17) - (16.20) ονομάζεται *αναρριχητική εξάρμωση (climb dislocation)*, διότι δημιουργεί ένα χάσμα στην εγκοπή που βρίσκεται πάνω στο θετικό ημιάξονα  $x$ , όπου  $\theta = 0, 2\pi$ .

Μια ανάλογη λύση μπορούμε να πάρουμε από την τασική συνάρτηση

$$\phi = C_3 r \ln r \sin \theta \quad (16.21)$$

Στην περίπτωση αυτή προκύπτει ασυνέχεια στη μετατόπιση  $u_r$ , κατά μήκος του θετικού ημιάξονα  $x$ , έχουμε δηλαδή σχετική ολίσθηση του ενός χείλους της εγκοπής ως προς το άλλο, χωρίς αυτά να αποχωρίζονται. Στην περίπτωση αυτή έχουμε *ολισθητική εξάρμωση (glide dislocation)*. Το εντατικό πεδίο λόγω της ολισθητικής εξάρμωσης, δίνεται από τις σχέσεις

$$\sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta} = \frac{B_x \mu (1 + \nu) \sin \theta}{2\pi r} \quad (16.22)$$

$$\sigma_{r\theta} = -\frac{B_x \mu (1 + \nu) \cos \theta}{2\pi r} \quad (16.23)$$

ενώ για  $y = 0$  έχουμε

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = 0 \quad (16.24)$$

$$\sigma_{xy} = -\frac{B_x \mu (1 + \nu)}{2\pi x} \quad (16.25)$$

όπου

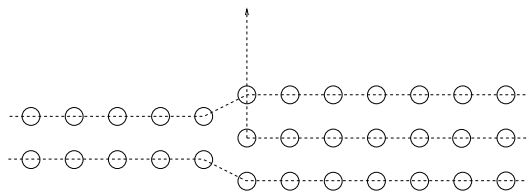
$$B_x = u_r(0) - u_r(2\pi) \quad (16.26)$$

είναι το ολισθητικό άνοιγμα της εξάρμωσης.

Οι λύσεις (16.17), (16.18) της αναρριχητικής και (16.22), (16.23) της ολισθητικής εξάρμωσης, διαφέρουν μόνο ως προς τη διεύθυνση. Η αναρριχητική εξάρμωση γίνεται ολισθητική εξάρμωση, αν επιλέξουμε να τοποθετήσουμε την εγκοπή κατά μήκος της γραμμής  $\theta = -3\pi/2, \pi/2$ , δηλαδή πάνω στο θετικό ημιάξονα των  $y$ . Διακρίνουμε τους δύο προσανατολισμούς χρησιμοποιώντας το σύμβολο  $B_x$  για την ασυνέχεια στη μετατόπιση της ολισθητικής εξάρμωσης και το σύμβολο  $B_y$  για την ασυνέχεια στη μετατόπιση της αναρριχητικής εξάρμωσης. Συχνά θεωρούμε τα  $B_x$  και  $B_y$  ως συνιστώσες του διανύσματος Burgers (Burgers vector).

### 16.2.1 Οι εξαρμώσεις στην Επιστήμη Υλικών

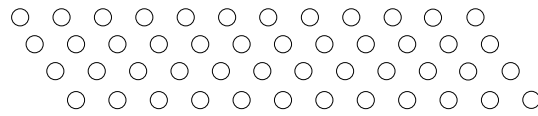
Στην πραγματικότητα τα υλικά έχουν ατομική ή μοριακή δομή. Όμως μπορούμε και σ' αυτή την περίπτωση να θεωρήσουμε την επιβολή ενός χάσματος στο σώμα, μεταξύ δύο σειρών από μόρια, πάνω στον ημιάξονα  $x > 0$  μέχρι την αρχή των αξόνων (Σχήμα 16.3). Στο κενό αυτό,



Σχήμα 16.3: Μια εξάρμωση στη μοριακή δομή.

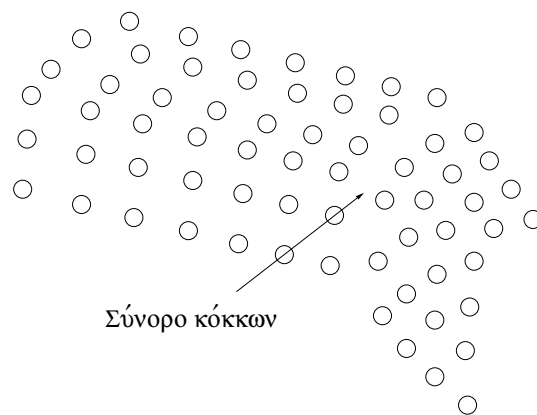
εισάγεται μια νέα σειρά από μόρια. Όταν το σώμα αφήνεται να ισορροπήσει, θα υπάρξει μια κίνηση μορίων κυρίως κοντά στο άκρο της εισαχθείσας σειράς μορίων. Έτσι δημιουργείται μια ατέλεια στην κανονική μοριακή διάταξη, που αντιστοιχεί σε μια εξάρμωση στα πλαίσια της Επιστήμης των Υλικών.

Σημαντικές πληροφορίες σχετικά με το ρόλο που παίζουν οι εξαρμώσεις στη μηχανική συμπεριφορά του υλικού, έδωσε το προσομοίωμα των φουσαλίδων, των Bragg και Nye [1]. Αυτοί επινόησαν μια μέθοδο για τη δημιουργία ενός συστήματος φουσαλίδων, όπου η μια με την άλλη φουσαλίδα έχουν ακριβώς το ίδιο σχήμα. Η ύπαρξη ελκτικών δυνάμεων μεταξύ των φουσαλίδων, οδηγεί στη δημιουργία μιας ομοιόμορφης διάταξης αυτών, όταν αυτό είναι δυνατό. Όμως εμφανίζονται και εξαρμώσεις, όπως φαίνεται και στο Σχήμα 16.4. Όταν εφαρμόζονται δυνάμεις στα εξωτερικά σύνορα ενός συστήματος φουσαλίδων, οι εξαρμώσεις μετακινούνται με τέτοιο τρόπο ώστε να επιτρέπουν την κίνηση και των συνόρων. Η κίνηση των εξαρμώσεων θεωρείται ότι είναι η κύρια αιτία των πλαστικών παραμορφώσεων στα όλκιμα υλικά.



Σχήμα 16.4: Το προσομοίωμα των φυσαλίδων με εμφανείς τις ολισθητικές εξαρμώσεις.

Μεγαλύτερα συστήματα από φυσαλίδες, παρουσιάζουν συγκεκριμένες περιοχές όπου οι φυσαλίδες διατάσσονται διαφορετικά από τις γειτονικές τους (Σχήμα 16.5). Η συμπεριφορά αυτή είναι παρόμοια με



Σχήμα 16.5: Το προσομοίωμα των φυσαλίδων με σύνορα κόκκων (grain boundaries).

τη συμπεριφορά των κόκκων σε κοκκώδη υλικά. Όταν το σώμα παραμορφώνεται, οι εξαρμώσεις κινούνται μέχρι να φτάσουν σ' ένα *σύνορο κόκκων* (*grain boundary*), όπου λόγω διαφορετικού προσανατολισμού η κίνηση των εξαρμώσεων διακόπτεται. Έτσι το σώμα γίνεται περισσότερο στιβαρό. Οι συστοιχίες (*pile ups*) εξαρμώσεων στα σύνορα κόκκων, είναι υπεύθυνες για την κρατυνόμενη πλαστική συμπεριφορά των όλκιμων υλικών. Όταν οι συγκεντρωμένες εξαρμώσεις αλληλεπιδρούν, δημιουργούν μεγαλύτερες διαταραχές στην κρυσταλλική δομή των σωμάτων, όπως κενά (*voids*) ή ρωγμές. Τα τελευταία αποτελούν σημάδια έναρξης της αστοχίας, λόγω θραύσης ή λόγω κόπωσης.

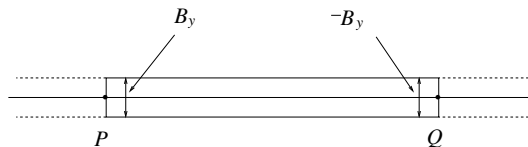
### 16.2.2 Σύγκριση της έννοιας των εξαρμώσεων στα συνεχή και στα διακριτά μέσα

Οι λύσεις για τις εξαρμώσεις σε ελαστικά μέσα, θα μπορούσαν ίσως να χρησιμοποιηθούν και για την περιγραφή των τάσεων σε εξαρμώσεις στη μοριακή δομή, αν η ασυνέχεια στη μετατόπιση θεωρηθεί ίση

με το πάχος της διεισδύουσας στρώσης μορίων. Όμως η έννοια της τάσης δεν είναι ξεκάθαρη σε τόσο μικρή κλίμακα. Θυμόμαστε ότι οι ιδιόμορφες τάσεις δικαιολογούνται με χρήση της έννοιας του διακριτού μέσου, όπου η ιδιομορφία εμφανίζεται εκτός του υλικού, στο κενό.

Σημειώνεται ότι οι εξαρμώσεις στα συνεχή μέσα μπορούν να έχουν ασυνέχεια στη μετατόπιση (διάνυσμα Burgers), οποιουδήποτε μεγέθους. Αντίθετα στο διακριτό μέσο, η ασυνέχεια στη μετατόπιση καθορίζεται αυστηρά από το πάχος της στρώσης μορίων. Το πάχος αυτό είναι πολύ μικρό και συνεπώς και οι παραγόμενες τάσεις είναι πολύ μικρές, σε σχέση με τις τάσεις που αναπτύσσονται σε μακροσκοπικές κατασκευές που ενδιαφέρουν το μηχανικό. Βέβαια στη γειτονιά της ατέλειας, μπορεί να έχουμε μεγάλες τάσεις λόγω της ύπαρξης ιδιομορφίας. Παραπέρα, ένα μεταλλικό σώμα, μετά τη δημιουργία πολλών εξαρμώσεων, δε θα είναι υπό τάση λόγω του τυχαίου προσανατολισμού των εξαρμώσεων αυτών. Αυτό βέβαια συμβαίνει μέσα στα όρια της ελαστικότητας.

Αν το μεταλλικό σώμα παραμορφώνεται στην πλαστική περιοχή, η κίνηση των εξαρμώσεων θα δημιουργήσει περισσότερο προσανατολισμένες δομές, που μπορεί να δώσουν παραμένουσες τάσεις. Σημειώνεται ότι κατά τη διάρκεια της πλαστικής παραμόρφωσης, οι εξαρμώσεις μόνο κινούνται, ούτε δημιουργούνται ούτε καταστρέφονται. Ένας τρόπος για να παρασταθεί μαθηματικά το εντατικό πεδίο κατά τη διάρκεια της πλαστικής παραμόρφωσης, είναι μέσα από μια κατανομή από εξαρμώσεις. Σε πρώτη φάση μπορούμε να θεωρήσουμε, ένα ζεύγος από δύο εξαρμώσεις, με ίσα και αντίθετα διανύσματα Burgers, σε μια απόσταση μεταξύ τους (Σχήμα 16.6). Μ' αυτό τον τρόπο πετυ-



Σχήμα 16.6: Ένα ζεύγος εξαρμώσεων με ίσες και αντίθετες ασυνέχειες στη μετατόπιση.

χαίνουμε μια ασυνέχεια στη μετατόπιση μόνο κατά μήκος του ευθύγραμμου τμήματος που τις ενώνει και όχι κατά μήκος μιας ημιάπειρης ευθείας όπως στην περίπτωση μιας και μόνης εξάρμωσης.

### 16.2.3 Οι εξαρμώσεις ως συναρτήσεις Green

Στη Θεωρία Ελαστικότητας, οι εξαρμώσεις χρησιμοποιούνται ως συναρτήσεις Green σε ολοκληρώματα, για την περιγραφή εντοπισμένων τάσεων και παραμορφώσεων. Έστω ότι έχουμε μια κατανομή από



εξαρμώσεις, σε μια ένα περιοχή  $\Omega$  ενός ελαστικού σώματος. Η περιοχή  $\Omega$  περιβάλλεται από το υπόλοιπο ελαστικό σώμα. Οι τάσεις που προκύπτουν από την ολοκλήρωση της λύσης, ικανοποιούν τις εξισώσεις ισορροπίας παντού μέσα στο σώμα, διότι η εξάρμωση περιέχει ασυνέχεια στη μετατόπιση αλλά όχι κάποια δύναμη. Επίσης οι μετατοπίσεις θα ικανοποιούν τις συνθήκες συμβιβαστού παντού, εκτός από την περιοχή  $\Omega$ , όπου έχουμε την ασυνέχεια των μετατοπίσεων ως δεδομένο, λόγω των εξαρμώσεων που υπάρχουν εκεί. Υπάρχει βέβαια η πιθανότητα να έχουμε ασυνέχεια στις μετατοπίσεις και σε άλλα σημεία του σώματος, όπως στην περίπτωση ενός ημιεπιπέδου, με συγκεντρωμένη δύναμη στην ελεύθερη επιφάνεια. Αυτή η εξέλιξη μπορεί να αποτραπεί, αν απαιτήσουμε οι ασυνέχειες στις μετατοπίσεις, να περιορίζονται στο χωρίο  $\Omega$  μόνο, δηλαδή στα άκρα του χωρίου  $\Omega$  να έχουμε μηδενικές ασυνέχειες στις μετατοπίσεις. Μια τέτοια *συνθήκη κλεισίματος* εκφράζεται από τις σχέσεις

$$\int_{\Omega} B_x(x, y) dx dy = 0 \quad (16.27)$$

$$\int_{\Omega} B_y(x, y) dx dy = 0 \quad (16.28)$$

Στις δύο παραπάνω σχέσεις τα  $B_x(x, y)$  και  $B_y(x, y)$  είναι οι κατανομές των ασυνεχειών ανά μονάδα επιφάνειας.

Στο Σχήμα 16.7 φαίνεται η προσομοίωση μιας ρωγμής από μια συνεχή κατανομή εξαρμώσεων, με ίσες και αντίθετες ασυνέχειες.



Σχήμα 16.7: Προσομοίωση ρωγμής από μια κατανομή εξαρμώσεων.

#### 16.2.4 Συγκεντρώσεις τάσεων

Ας επανέλθουμε στο πρόβλημα μιας κυκλικής οπής στην περιοχή  $\Omega$ , σε πλάκα άπειρων διαστάσεων που εφελκύεται με τάσεις στο άπειρο (Υποενότητα 12.3.1). Το πρόβλημα μπορεί να προσεγγιστεί, με «εισαγωγή» εξαρμώσεων μέσα στην οπή, όσο κι αν φαίνεται περίεργη η τοποθέτηση εξαρμώσεων στο κενό.

Θεωρούμε αρχικά την επίπεδη πλάκα χωρίς οπή και στην περιοχή  $\Omega$  του συνεχούς (όχι κομμένου) σώματος, τοποθετούμε εξαρμώσεις που δημιουργούν επί πλέον τάσεις στην περιφέρεια του κύκλου, της ανύπαρκτης προς το παρόν οπής. Αν η ένταση των εξαρμώσεων αυτών και η διάταξή τους στο χωρίο  $\Omega$  είναι τέτοια ώστε οι τάσεις που δημιουργούνται στην περιφέρεια του κύκλου, να είναι ίσες και αντίθετες με

τα διανύσματα τάσης που αναπτύσσονται εκεί λόγω του φορτίου στο άπειρο, τότε παίρνουμε μηδενικά διανύσματα τάσης σ' όλα τα σημεία της περιφέρειας στο συνεχές σώμα. Έχουμε δηλαδή ένα συνεχές σώμα χωρίς οπή, με μηδενικά διανύσματα τάσης στην περιφέρεια (της ανύπαρκτης οπής). Έχουμε συνεπώς ίδιες συνοριακές συνθήκες με αυτές του σώματος με οπή, διότι η παρουσία των εξαρμώσεων δεν αλλάζει την κατανομή των τάσεων στο άπειρο.

Η γενική ιδέα της χρήσης λύσεων διαταραχής (perturbation solutions), τοποθετώντας ιδιομορφίες σε μια περιοχή όπου δεν απαιτείται η ικανοποίηση των διεπουσών εξισώσεων, πιο συγκεκριμένα εδώ των εξισώσεων συμβιβαστού, είναι διαδεδομένη στην Εφαρμοσμένη Μηχανική. Για παράδειγμα, η λύση για τη ροή ενός ρευστού γύρω από ένα απαραμόρφωτο σώμα, μπορεί να βρεθεί σε αρκετές περιπτώσεις, τοποθετώντας μια κατάλληλη κατανομή πηγών και καταβοθρών (sources and sinks), στο γεωμετρικό χώρο που καταλαμβάνεται από το απαραμόρφωτο σώμα. Η κατανομή αυτή είναι τέτοια ώστε η κάθετη προς το σώμα συνιστώσα της ταχύτητας, στην εξωτερική επιφάνεια του σώματος, να γίνεται ίση με μηδέν.

Οι συνθήκες κλεισίματος, (16.27) και (16.28), επιτρέπουν τη χρήση κατανομών από εξαρμώσεις, αποτελούμενες από εκατέρωθεν ταιριαστές εξαρμώσεις με ίσες και αντίθετες ασυνέχειες στη μετατόπιση (Σχήμα 16.7). Όπως φαίνεται και από τα ολοκληρώματα στις σχέσεις (16.27) και (16.28), συχνά χρησιμοποιούμε τις πυκνότητες των εξαρμώσεων (dislocation densities), δηλαδή τις χωρικές παραγώγους των ασυνεχειών στη μετατόπιση.

Αν κοιτάξουμε τον κυρίαρχο όρο στις τάσεις, στο πρόβλημα της εφελκυσόμενης πλάκας άπειρων διαστάσεων που φέρει κυκλική οπή (σχέσεις (12.98) - (12.100)), θα δούμε ότι φθίνει στο άπειρο όπως το  $r^{-2}$ . Οι τάσεις για μια εξάρμωση φθίνουν όπως το  $r^{-1}$  (σχέσεις (16.17), (16.18)), επομένως οι τάσεις για τη χωρική παράγωγο της ασυνέχειας στη μετατόπιση  $\frac{dB_y}{dx}$  θα φθίνουν και αυτές όπως το  $r^{-2}$ . Φαίνεται έτσι η ποιοτική ισοδυναμία των δύο πεδίων.

### 16.3 Ρωγμές

Οι ρωγμές αποτελούν αντικείμενο μελέτης της Μηχανικής των Θραύσεων. Η ρωγμή ορίζεται ως η οριακή περίπτωση μιας οπής που ο όγκος της είναι μηδενικός, δηλαδή τα χείλη της ρωγμής βρίσκονται σε επαφή, τουλάχιστον στην αφόρτιστη κατάσταση. Η ρωγμή μπορεί να θεωρηθεί και ως μια εσωτερική επιφάνεια (γραμμή στην περίπτωση επιπέδου σώματος) που δε μπορεί να μεταφέρει εφελκυστικές τάσεις δια μέσου αυτής.

Στην πράξη οι ρωγμές συμπεριφέρονται μονοδιάστατα σε εφελκυσμό ή θλίψη, δηλαδή είτε ανοίγουν προσπαθώντας να μεταφέρουν εφελκυστικές τάσεις είτε κλείνουν σε περίπτωση θλίψης, χωρίς το μήκος τους να αλλάζει. Όταν οι ρωγμές ανοίγουν, τα χείλη τους είναι αφόρτιστα αν δεν υπάρχει εσωτερική πίεση, ενώ όταν κλείνουν τα χείλη τους φορτίζονται λόγω της επαφής. Για το λόγο αυτό ένα ρηγματωμένο σώμα θα είναι πιο στιβαρό σε θλίψη απ' ό,τι σε εφελκυσμό. Γενικά οι ρωγμές παρουσιάζουν συγκέντρωση τάσεων υπό εφελκυσμό, αλλά όχι υπό θλίψη.

### 16.3.1 Η Γραμμικά Ελαστική Μηχανική των Θραύσεων

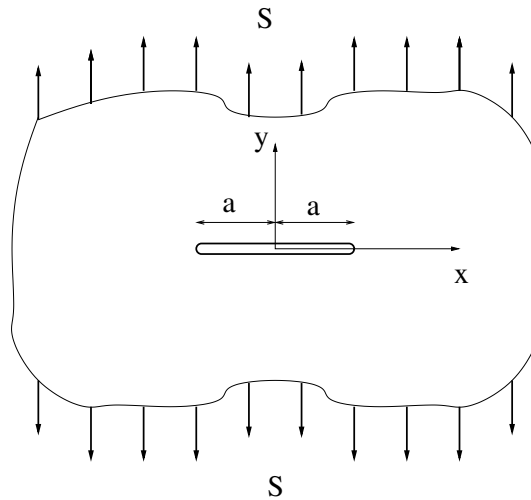
Η πιο απλή θεωρία θραύσης, αυτή που αναπτύχθηκε από τον Griffith [3], διατυπώνει ότι θα έχουμε διάδοση ρωγμής σ' ένα ψαθυρό υλικό όταν ο παράγοντας που πολλαπλασιάζει το ιδιόμορφο τασικό πεδίο, ο ονομαζόμενος *συντελεστής έντασης των τάσεων* (σχέσεις (14.68) - (14.70), (14.72) - (14.74)), υπερβαίνει μια κρίσιμη τιμή. Πιο συγκεκριμένα, ο Griffith εισηγήθηκε ότι μια ρωγμή θα διαδοθεί, όταν έχουμε μια μείωση στη συνολική ενέργεια του συστήματος. Η διάδοση της ρωγμής προκαλεί μείωση της ενέργειας παραμόρφωσης του σώματος, αλλά δημιουργεί καινούργιες επιφάνειες θραύσης που απορροφούν ενέργεια, την *επιφανειακή ενέργεια*. Η επιφανειακή ενέργεια απαιτείται για την υπερνίκηση των ατομικών δυνάμεων που εμποδίζουν την απόσχιση του υλικού. Διάδοση της ρωγμής θα έχουμε, όταν ο συντελεστής έντασης των τάσεων, ξεπεράσει την κρίσιμη τιμή του που λέγεται *σκληρότητα θραύσης*.

Φαίνεται παράξενο που η πραγματική συμπεριφορά των υλικών κατά τη θραύση, περιγράφεται από ένα μη πραγματικό, ιδιόμορφο τασικό πεδίο, που σίγουρα δε μπορεί να περιγράψει την εντατική κατάσταση, ακριβώς στην περιοχή που θα δημιουργηθεί η αστοχία. Όμως, αν το υλικό είναι ψαθυρό, δημιουργούνται μη γραμμικά φαινόμενα σε μια σχετικά μικρή περιοχή γύρω από το άκρο της ρωγμής. Η περιοχή αυτή ονομάζεται *ζώνη διεργασίας θραύσης*. Αν η ζώνη αυτή έχει μικρές διαστάσεις σε σχέση με τις άλλες διαστάσεις του σώματος, κυρίως σε σχέση με το μήκος της ρωγμής, τότε η Γραμμικά Ελαστική Μηχανική Θραύσεων με την ιδιομορφία στην τάση, περιγράφει ικανοποιητικά το εντατικό πεδίο έξω από τη ζώνη αυτή.

### 16.3.2 Ρωγμή στο επίπεδο υπό εφελκυσμό

Συχνά θεωρούμε τη ρωγμή, ως μια αλληλουχία από εξαρμώσεις, το συνολικό τασικό πεδίο των οποίων, προστιθέμενο στις τάσεις του αδιατάρακτου (χωρίς τη ρωγμή) πεδίου, δίνει μηδενικές τάσεις κατά

μήκος της ρωγμής. Το Σχήμα 16.8 δείχνει μια ρωγμή μήκους  $2a$  που καταλαμβάνει την περιοχή  $-a < x < a, y = 0$ , σ' ένα επίπεδο σώμα άπειρων διαστάσεων που υποβάλλεται σε ομοιόμορφο εφελκυσμό  $\sigma_{yy} = S$ , στο άπειρο.



Σχήμα 16.8: Ρωγμή στο επίπεδο υπό εφελκυσμό

Υποθέτοντας ότι η ρωγμή είναι ανοιχτή, δηλαδή ότι τα χείλη της δε βρίσκονται σε επαφή, οι συνοριακές συνθήκες γράφονται ως

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yy} = 0 \text{ για } -a < x < a \text{ και } y = 0 \quad (16.29)$$

$$\sigma_{yy} \rightarrow S, \sigma_{xy} \rightarrow 0, \sigma_{xx} \rightarrow 0 \text{ για } r \rightarrow \infty \quad (16.30)$$

Ακολουθώντας τη διαδικασία που εφαρμόσαμε στην περίπτωση της κυκλικής οπής σε εφελκυσόμενη πλάκα, θεωρούμε τη λύση του προβλήματος της ρωγμής ως επαλληλία του τασικού πεδίου του σώματος χωρίς τη ρωγμή και μιας διορθωτικής λύσης της οποίας οι συνοριακές συνθήκες είναι

$$\sigma_{xy} = 0, \sigma_{yy} = -S \text{ για } -a < x < a \text{ και } y = 0 \quad (16.31)$$

$$\sigma_{yy} \rightarrow 0, \sigma_{xy} \rightarrow 0, \sigma_{xx} \rightarrow 0 \text{ για } r \rightarrow \infty \quad (16.32)$$

Παρατηρούμε ότι η διορθωτική λύση αντιστοιχεί στο πρόβλημα μιας ρωγμής υπό εσωτερική πίεση  $S$ , που βρίσκεται σ' ένα αφόρτιστο σώμα άπειρων διαστάσεων. Η ρωγμή ανοίγει λόγω εσωτερικής πίεσης  $S$  στα χείλη της.

Γενικά το τασικό πεδίο λόγω ρωγμής, θα προέρχεται από μια αλληλουχία αναρριχητικών και ολισθητικών εξαρμώσεων. Στο παρόν πρόβλημα όμως, λόγω της συμμετρίας ως προς τον άξονα  $y = 0$ , δεν έχουμε

σχετική ολισθητική κίνηση κατά μήκος των χειλιών της ρωγμής. Συνεπώς η λύση μπορεί να κατασκευαστεί από μια συνεχή κατανομή αναρριχητικών εξαρμώσεων μόνο. Πιο συγκεκριμένα παριστάνουμε τη λύση ως μια συνεχή κατανομή από αναρριχητικές εξαρμώσεις, που έχουν ασυνέχεια στη μετατόπιση  $B_y(x)$  ανά μονάδα μήκους, στο διάστημα  $-a < x < a$  πάνω στον άξονα  $y = 0$ .

Θεωρούμε την τάση  $\sigma_{yy}$  στο σημείο  $(x, 0)$ , λόγω των εξαρμώσεων ανάμεσα στα σημεία  $\xi$  και  $\xi + \delta\xi$ , πάνω στον άξονα  $x$ . Αν το  $\delta\xi$  είναι πολύ μικρό, η κατανομή των εξαρμώσεων μπορεί να αντικατασταθεί από μια και μόνη εξάρμωση, με ασυνέχεια στη μετατόπιση  $B_y(\xi)d\xi$ . Η τάση  $\sigma_{yy}$  λόγω αυτής της εξάρμωσης, στο σημείο  $(x, 0)$  είναι

$$\sigma_{yy} = -\frac{\mu(1+\nu)B_y(\xi)d\xi}{2\pi(x-\xi)} \quad (16.33)$$

λόγω της (16.19), επειδή η απόσταση μεταξύ των σημείων  $(\xi, 0)$  και  $(x, 0)$  είναι  $x - \xi$ .

Η τάση  $\sigma_{yy}$  λόγω του συνολικού αριθμού των εξαρμώσεων κατά μήκος της ρωγμής, προκύπτει με την υπέρθεση των  $\sigma_{yy}$  από κάθε εξάρμωση και γράφεται υπό μορφή ολοκληρώματος ως

$$\sigma_{yy} = -\frac{\mu(1+\nu)}{2\pi} \int_{-a}^a \frac{B_y(\xi)d\xi}{x-\xi} \quad (16.34)$$

Λόγω της συνοριακής συνθήκης (16.31), η σχέση (16.34) οδηγεί στην παρακάτω ιδιόμορφη ολοκληρωτική εξίσωση τύπου Cauchy

$$\int_{-a}^a \frac{B_y(\xi)d\xi}{x-\xi} = \frac{2\pi S}{\mu(1+\nu)} \quad \text{για } -a < x < a \quad (16.35)$$

Η (16.35) είναι ίδια με την ολοκληρωτική εξίσωση (14.40), που αναφέρεται στο πρόβλημα διείσδυσης απαραμόρφωτου σώματος σε ημιεπίπεδο. Μπορεί επομένως να λυθεί με τη μέθοδο αναπτύγματος της άγνωστης συνάρτησης σε σειρά Fourier, όπως παρουσιάζεται στην Υποενότητα 15.5.1. Κάνοντας τις αλλαγές μεταβλητών

$$x = a \cos \phi \quad (16.36)$$

$$\xi = a \cos \theta \quad (16.37)$$

η (16.35) δίνει

$$\int_0^\pi \frac{B_y(\theta) \sin \theta d\theta}{\cos \phi - \cos \theta} = \frac{2\pi S}{\mu(1+\nu)} \quad (16.38)$$

όπου  $0 < \phi < \pi$ . Επίσης για  $n = 1$ , από τη (14.46) παίρνουμε

$$\int_0^\pi \frac{\cos \theta d\theta}{\cos \phi - \cos \theta} = -\pi \quad (16.39)$$

και τελικά προκύπτει

$$B_y(\theta) = -\frac{2S \cos \theta}{\mu(1+\nu) \sin \theta} + \frac{A}{\sin \theta} \quad (16.40)$$

ή

$$B_y(\xi) = -\frac{2S\xi}{\mu(1+\nu)\sqrt{a^2-\xi^2}} + \frac{Aa}{\sqrt{a^2-\xi^2}} \quad (16.41)$$

όπου  $A$  είναι μια σταθερά ολοκλήρωσης. Αυτή μπορεί να βρεθεί από το δεδομένο ότι στα δύο άκρα της η ρωγμή είναι κλειστή, δηλαδή ότι εκεί η ασυνέχεια στη μετατόπιση είναι μηδενική. Η συνθήκη αυτή γράφεται ως

$$\int_{-a}^a B_y(\xi) d\xi = 0 \quad (16.42)$$

και δίνει  $A = 0$ .

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει το τασικό πεδίο κοντά στο άκρο της ρωγμής. Λόγω της (16.34), η τάση  $\sigma_{yy}$  στην περιοχή  $|x| > a$  πάνω στον άξονα  $y = 0$  είναι

$$\begin{aligned} \sigma_{yy} &= -\frac{\mu(1+\nu)}{2\pi} \int_{-a}^a \frac{B_y(\xi) d\xi}{x-\xi} = \\ &= \frac{S}{\pi} \int_{-a}^a \frac{\xi d\xi}{(x-\xi)\sqrt{a^2-\xi^2}} = \\ &= S \left( -1 + \frac{|x|}{\sqrt{x^2-a^2}} \right) \end{aligned} \quad (16.43)$$

όπως φαίνεται σε πίνακα των Gradshteyn και Ryzhik [2].

Υπενθυμίζεται ότι η (16.43) είναι η διορθωτική λύση, για μια ρωγμή που ανοίγει λόγω εσωτερικής πίεσης  $S$  και δημιουργεί μηδενικές τάσεις στο άπειρο. Για να πάρουμε τη λύση του αρχικού προβλήματος, όπου έχουμε ανοιχτή ρωγμή και δεδομένη εφελκυστική τάση  $S$  στο άπειρο, πρέπει να προσθέσουμε την τάση  $S$  στη (16.43). Έτσι παίρνουμε

$$\sigma_{yy} = \frac{S|x|}{\sqrt{x^2-a^2}} \quad (16.44)$$

για  $|x| > a$ . Όπως φαίνεται από τη (16.44), η  $\sigma_{yy}$  τείνει στο αδιατάρακτο τασικό πεδίο όταν  $x \rightarrow \infty$  και παρουσιάζει ιδιομορφία όταν  $x \rightarrow +a^+$  ή όταν  $x \rightarrow -a^-$ .

Ορίζουμε το *συντελεστή έντασης των τάσεων*  $K_I$  ως

$$\begin{aligned} K_I &\equiv \lim_{x \rightarrow a^+} \sigma_{yy}(x) \sqrt{2\pi(x-a)} \\ &= \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{Sx\sqrt{2\pi(x-a)}}{\sqrt{x^2-a^2}} \end{aligned} \quad (16.45)$$

$$= S\sqrt{\pi a} \quad (16.46)$$

Μπορούμε επίσης να βρούμε την ασυνέχεια στη μετατόπιση σε κάθε θέση  $x$  πάνω στα χείλη της ρωγμής, από τη σχέση

$$u_y(x, 0^+) - u_y(x, 0^-) = \int_{-a}^x B_y(\xi) d\xi = \frac{2S}{\mu(1+\nu)} \sqrt{a^2 - x^2} \quad (16.47)$$

Έτσι η ρωγμή ανοίγει παίρνοντας το σχήμα μιας μακρόστενης έλλειψης, σαν αποτέλεσμα της εφελκυστικής τάσης  $S$  που εφαρμόζεται στο άπειρο.

208ΚΕΦΑΛΑΙΟ 16. ΣΥΓΚΕΝΤΡΩΜΕΝΕΣ ΔΥΝΑΜΕΙΣ, ΕΞΑΡΜΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΡΩΓΜΕΣ



# Βιβλιογραφία

- [1] L. Bragg and J. F. Nye. A dynamical model of a crystal structure. *Proceedings of the Royal Society, Series A*, 190:474–481, 1947.
- [2] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik. *Tables of integrals, series and products*. Academic Press, New York, 1980.
- [3] A. A. Griffith. The phenomena of rupture and flow in solids. *Philosophical Transactions*, 221:163–198, 1920.
- [4] K. L. Johnson. *Contact mechanics*. Cambridge University Press, 1985.
- [5] N. I. Muskhelishvili. *Singular integral equations*. Nordhoff, Groningen, 1953. English translation by J. R. M. Radok.
- [6] N. I. Muskhelishvili. *Some basic problems of the mathematical theory of elasticity*. Nordhoff, Groningen, 1953. English translation by J. R. M. Radok.
- [7] M. L. Williams. Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extension. *ASME - Journal of Applied Mechanics*, 19:526–528, 1952.